Úloha V.5 ... Rolling Stones

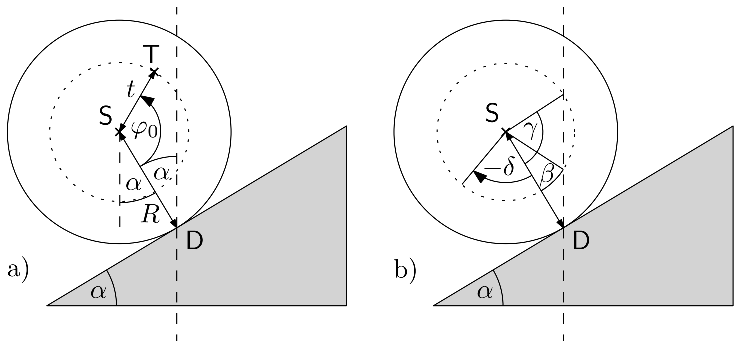
5 bodů; průměr 2,44; řešilo 27 studentů

Na nakloněné rovině stojí koule s nehomogenním rozložením hustoty. Známe úhel sklonu nakloněné roviny α, poloměr koule R a vzdálenost t těžiště koule od jejího středu. Pokud si označíme střed koule S, bod dotyku koule s rovinou D a těžiště koule T, pak definujeme úhel $\varphi_0 = \angle\mathsf{DST}$ jako úhel před začátkem pohybu. Těžiště se navíc nachází v rovině určené úsečkou DS (normálou k rovině) a směrem z kopce dolů. V závislosti na těchto parametrech podrobně rozeberte, jak se bude dál vyvíjet pohybový stav koule. Koule na rovině neprokluzuje.

Tohle si chtěl Kuba spočítat už odmala.

Přistupme k problému rozborem momentu sil působícího na kouli vzhledem k ose procházející bodem dotyku s rovinou (bod D) a kolmé k obrázku 1. Ze znaménka tohoto momentu budeme soudit, jakým směrem se začne koule valit. Protože na kouli působí pouze její tíha a podložka, volíme jako vztažný bod (resp. osu) takový, kde do momentu mluví pouze tíhová síla. V bodě D na něj totiž působí ještě normálová reakční síla od podložky a tečná třecí síla. Vzhledem ke středu koule bychom tedy museli do celkového působícího momentu sil započítat ještě vliv třecí síly. Třecí sílu *nelze* zanedbat – bez ní by se koule nemohla otáčet, ale pouze klouzat.

Nejprve si rozeberme, kde je jaký úhel na obrázku 1. Spojnice SD se od svislého směru odklání o α, a tedy od vodorovného směru o $\pi/2 - \alpha$.



Obr. 1: Náčrt situace. Část a) ukazuje počáteční parametry, část b) dopočtené významné úhly. Velikosti úhlů jsou pouze orientační.

Nyní si zadefinujme pomocnou veličinu r jako vodorovnou složku polohy těžiště T vzhledem k bodu dotyku D (kladná směrem do kopce). Tu si můžeme vyjádřit jako

$$r := -R\sin\alpha + t\sin(\varphi + \alpha)\,.$$

Pokud bude pro všechny φ platit $r \leq 0$, bude se koule určitě už jen valit dolů. Pokud neplatí ostrá nerovnost, může rovnost nastat pouze v izolovaných bodech (konkrétně pouze v jednom, a to ve $\varphi = \pi/2 - \alpha$). V tomto bodě je koule ve vratké rovnováze - při sebemenší výchylce na libovolnou stranu bude platit $r < 0$ a koule se rozjede dolů.

Hledejme, jakým nastavením parametrů dosáhneme toho, aby alespoň na nějakém intervalu φ bylo $r > 0$. Do výrazu pro r přispívá kladnou hodnotou pouze druhý člen, který bude maximální pro $\sin(\varphi+\alpha)=1$. Odtud dostáváme první výsledek, že zajímavé věci se mohou dít pouze, pokud platí

$$t > R\sin\alpha\,.$$

Dále tedy rozebírejme jen tento případ, protože jinak koule prostě sjede dolů.

Nyní najděme hodnoty φ, ve kterých nastává rovnováha, jinak řečeno $r=0$. Řešením této rovnice dostáváme dvě řešení (otočení o 2π nás nezajímá), které si označíme jako β a γ,

$$\beta := \varphi_1 = \arcsin\left(\frac{R}{t}\sin\alpha\right) - \alpha\,,$$
$$\gamma := \varphi_2 = \pi - \alpha - \arcsin\left(\frac{R}{t}\sin\alpha\right)\,.$$

Z oboru hodnot funkce arcsin je vidět $\beta<\gamma$ a z obrázku je zřejmé, že $\beta\in(0,\pi/2-\alpha)$, a tedy platí také $\gamma\in(\pi/2-\alpha,\pi-2\alpha)$. Nyní můžeme říci, že pro $\varphi\in(\beta,\gamma)$ je r kladné, jinak je záporné (pohybujeme se pouze na intervalu $(-\delta,2\pi-\delta)$, kde úhel $\delta\in(0,\pi)$ později šikovně zvolíme, abychom mohli říkat, co je děje pro φ na intervalech, nikoli jejich sjednoceních).

Pro $\varphi\in(0,\pi/2-\alpha)$ se při valení dolů zvyšuje r a pro $\varphi\in(\pi/2-\alpha,\pi-2\alpha)$ se při valení dolů snižuje r. Rozmyslete si, že proto platí, že v β je stabilní rovnováha a v γ vratká.

Pokud $\varphi_0\in(\beta,\gamma)$, pojede koule nahoru, bude zrychlovat, po překročení hranice $r=0$ bude zpomalovat, až zastaví. Následně se rozjede dolů, bude zrychlovat, zpomalovat a nakonec zastaví opět ve φ_0 (ZZE). Proto pro všechny φ_0 mezi β a γ bude koule kmitat. Také pro nějaký interval záporných φ_0 bude koule kmitat (právě zde poprvé zastavila koule v předchozím myšleném pokusu).

Nalezněme záporný mezní úhel $-\delta$, do kterého bude ještě koule kmitat. Určitě platí $-\delta\in(-\pi,0)$, protože pro $\varphi=-\pi\equiv\pi$ bude těžiště ve výšce (ve smyslu úhlů) $\pi-\alpha$, což je výše než pro $\varphi=\gamma$, kdy je těžiště ve výšce $\pi-\arcsin((R/t)\sin\alpha)$, protože pro $\alpha\in(0,\pi/2)$ platí

$$\sin\alpha < \frac{R}{t}\sin\alpha\,,$$
$$\alpha < \arcsin\left(\frac{R}{t}\sin\alpha\right)\,.$$

A tedy, když sjede koule níže, bude mít energii dostatečnou, aby se těžiště dostalo nad hranici $\varphi=\gamma$ a dále pokračovalo ve sjezdu dolů.

Pokud se koule rozjede z $-\delta$, bude zrychlovat z kopce dolů, pak zpomalovat, až zastaví mezi β a γ. Protože pro všechny úhly mezi β a γ včetně, existuje nějaký úhel $\varphi\in(-\pi,0)$, kde se koule zastaví a obrátí, musí $-\delta$ odpovídat právě γ. Nyní kouli vypustíme z bodu $\varphi_0 = -\delta$ a ona zastaví v γ, mezi oběma stavy se tedy zachovává potenciální energie (kinetická je nulová). To také znamená, že těžiště je ve stejné výšce. Při přechodu od $-\delta$ ke γ sjede koule dolů o $R(\gamma+\delta)\sin\alpha$ a těžiště se otočí nahoru o $-t\cos(\alpha+\gamma)+t\cos(\delta-\alpha)$. Dostáváme tedy rovnici pro δ

$$R(\gamma+\delta)\sin\alpha - t\left(\cos(\delta-\alpha)-\cos(\alpha+\gamma)\right) = 0\,.$$

Levou stranu rovnice označme jako $h(\delta)$. Kvůli lineárnímu členu platí, že pro vysoká kladná čísla $h(\delta)$ roste do nekonečna a pro vysoká záporná čísla (v absolutní hodnotě) klesá $h(\delta)$ do minus nekonečna. Pro derivaci $h(\delta)$ platí

$$h'(\delta) = R\sin\alpha + t\sin(\delta-\alpha) > R\sin\alpha(1+\sin(\delta-\alpha)) \geq 0\,.$$

Tedy $h(\delta)$ je rostoucí na $(0, \pi)$ a rovnice $h(\delta) = 0$ má právě jedno řešení. Protože při vypuštění koule z γ se koule někde zastaví a obrátí (a to někde je přesně $-\delta$), musí to řešení být z přípustného intervalu. Rovnici sice nelze vyřešit obecně, ale pro libovolné konkrétní hodnoty t, α, φ_0 z ní numericky dostaneme požadovanou dolní mez $-\delta$ (resp. dostaneme δ).

Při rozjezdu z úhlu $-\delta$ se koule zastaví v úhlu γ, který představuje vratkou rovnováhu mezi kmitáním a sjezdem z kopce dolů. Proto je i $-\delta$ vratkou pozicí, nicméně ne pozicí rovnovážnou.

Teď už máme všechny údaje potřebné k finálnímu rozboru.

1. $t \leq R \sin \alpha$ koule pojede dolů
2. $t > R \sin \alpha$
   - $\varphi_0 \in (-\delta, \gamma)$ koule bude kmitat okolo $\varphi = \beta$
   - $\varphi_0 = -\delta$ vratká pozice mezi kmitáním okolo β a sjezdem dolů
   - $\varphi_0 = \gamma$ vratká rovnováha mezi kmitáním okolo β a sjezdem dolů
   - $\varphi_0 \in (\gamma, 2\pi - \delta)$ koule pojede dolů

Nezapomeňte však, že β, γ, δ jsou parametry závislé na t, α, R.

Nyní si ještě rozeberme limitní případy z našeho rozboru. Pro $\alpha = 0$ bude koule kmitat na místě (zkuste si vypočítat hodnoty δ a γ). Pro $\alpha = \pi/2$ sjede koule dolů pro libovolné t, protože musí být nutně menší než R. Pro $t = 0$ pojede koule dolů a pro $t = R$ bude koule kmitat nezávisle na sklonu kopce.

Zvlášť musíme vzít případy, kdy mají oba dva parametry svou limitní hodnotu. V případě $t = 0, \alpha = 0$ se nic dít nebude a pro $t = R, \alpha = \pi/2$ koule sjede dolů. Zbylé dva případy už odpovídají předchozímu rozboru, a sice pro $t = R, \alpha = 0$ bude koule kmitat a pro $t = 0, \alpha = \pi/2$ sjede koule dolů.

Komentáře k došlým řešením

Chtěli bychom upozornit na takovou klasickou chybu, že na kouli nepůsobí tření. Je tomu však naopak, tření hraje v pohybu koule velmi *zásadní roli*. Bez tření by se koule vůbec neotáčela a pouze klouzala dolů. Tření působí v bodě dotyku s nakloněnou rovinou směrem proti pohybu koule (podél kopce) takovým způsobem, že mění hybnost a moment hybnosti koule, ale zachovává její energii. Zanedbání valivého tření a odporu prostředí už je na místě.

Toto je důvod, proč je výhodné počítat rotaci kolem bodu dotyku, protože vůči němu má třecí síla nulový moment. Pokud počítáte moment sil působící na kouli vůči jejímu středu, těžišti nebo jakémukoli bodu uznáte za vhodné, musíte započítat i třecí sílu (jejíž velikost musíte vyjádřit z dalších pohybových rovnic).

Dalším „nešvarem“ v došlých řešeních bylo, že jste pouze okomentovali situace, které mohou nastat. V úloze 5 se však očekává počítání při jejím řešení (na rozdíl od úloh P, popř. některých jednoduchých). Z toho důvodu nešlo udělit za slovní rozbor více než jeden bod.

Jakub Dolejší
`krasnykuba@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.