Úloha V.2 ... mnohočásticová

2 body; průměr 2,00; řešilo 38 studentů

Mějme nádobu, která je pomyslně rozdělena na dvě shodné disjunktní oblasti A a B. V nádobě je n částic, z nichž se každá nachází s pravděpodobností 50 % v části A a s pravděpodobností 50 % v části B. Určete, s jakou pravděpodobností bude v části A $n_A = 0{,}6n$, resp. $n_A = 1+n/2$ částic. Řešte pro $n = 10$ a $n = N_\mathrm{A}$, kde $N_\mathrm{A} \doteq 6\cdot 10^{23}$ je Avogadrova konstanta.

Mirek má rád zákon velkých čísel.

O úloze se lépe přemýšlí jako o posloupnosti bitů, jeden bit pro každou částici. Když je částice v části A, je hodnota 1, pro částici v části B bude hodnota příslušného bitu 0.

Případ $n = 10$

Obě otázky se slily do jedné: „Kdy je v části A 6 částic z 10?“ Předpokládáme, že částice jsou navzájem odlišitelné. Potom všech možných rozdělení částic mezi části A a B je $2^{10} = 1\,024$ (počet všech možností pro 10 bitů) a všech možných šestic, které mohou v části A být, je $\binom{10}{6} = 210$. Tomuto se říká kombinační číslo, které je definováno

$$\binom{n}{k} = n!/[k!\cdot(n-k)!]\,,$$

kde symbol ! znamená faktoriál. Tedy pravděpodobnost, že v části A bude právě 6 částic, je $p = 210/1\,024 \doteq 0{,}205$.

Případ $n = N_\mathrm{A}$

První otázka: „Kdy je v části A počet částic roven $0{,}6N_\mathrm{A}$?“, druhá „Kdy je v části A počet částic roven $N_\mathrm{A}/2+1$?“ Rádi bychom použili stejný postup, ale čísla, která vycházejí při mezivýpočtech, jsou moc velká (zkuste si například spočítat 2^{N_A}, to je mnohem větší číslo, než je kalkulačka schopna si zapamatovat). Musíme tedy postupovat opatrně.

V prvním případu má být v části A celkem $3N_\mathrm{A}/5$ částic a v druhém případu je v části A celkem $N_\mathrm{A}/2+1$ částic. Pravděpodobnosti, že tyto situace nastanou, jsou menší než pravděpodobnost, že částice budou rovnoměrně rozděleny (z vlastností kombinačních čísel). Budeme tedy počítat pravděpodobnost, že jsou částice rovnoměrně rozděleny mezi obě poloviny. Spočítáme to stejně jako v první části, jen si budeme muset dávat větší pozor.

Nejprve si povězme, jakou použijeme strategii. Rádi bychom si shora omezili kombinační číslo $\binom{2n}{n}$ pro n jdoucí k nekonečnu (pro jednoduchost), pokud možno aby se nám v tomto odhadu vyskytovala nějaká mocnina dvojky, pak se pravděpodobnost bude hezky krátit. Tedy si výraz napišme a upravujme:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1\cdot 2\cdots 2n}{(1\cdot 2\cdots n)^2\cdot\frac{2^{2n}}{2^{2n}}} = \frac{2^{2n}(1\cdot 2\cdots 2n)}{(2\cdot 4\cdots 2n)^2}\,.$$

To si ještě můžeme upravit:

$$\frac{2^{2n}(1\cdot 2\cdots 2n)}{(2\cdot 4\cdots 2n)(2\cdot 4\cdots 2n)} = 2^{2n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} = 2^{2n}p\,.$$

Nyní budeme p odhadovat shora. Uvažme součin:

$$1 \geq (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{(2n)^2}) = \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = (2n+1)p^2\,.$$

Tedy:

$$p \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\,.$$

Tak jsme si šikovně omezili p. Tedy pravděpodobnost, kterou chceme spočítat, je:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = p \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\,.$$

Pro velká n je $1/\sqrt{2n}$ opravdu malé číslo, přesněji pro N_A je to zhruba $9{,}1 \cdot 10^{-13}$. Tedy i obě pravděpodobnosti v druhé části se blíží nule, neboť jsou menší než pravděpodobnost, že rozdělení je rovnoměrné.

Je také užitečné si uvědomit, v jakém poměru jsou vůči sobě pravděpodobnosti pro $0{,}6N_\mathrm{A}$ a $N_\mathrm{A}/2 + 1$. Když si tyto pravděpodobnosti rozepíšeme podle výše uvedeného vzorečku a podělíme, dostaneme, že poměr první pravděpodobnosti ku druhé je

$$\frac{(0{,}5N_\mathrm{A}-1)(0{,}5N_\mathrm{A}-2)\cdots(0{,}4N_\mathrm{A}+1)}{0{,}6N_\mathrm{A}(0{,}6N_\mathrm{A}-1)\cdots(0{,}5N_\mathrm{A}+2)} = \frac{0{,}5N_\mathrm{A}-1}{0{,}6N_\mathrm{A}} \cdot \frac{0{,}5N_\mathrm{A}-2}{0{,}6N_\mathrm{A}-1} \cdots \frac{0{,}4N_\mathrm{A}+1}{0{,}5N_\mathrm{A}+2}\,.$$

Všimneme si, že každý ze zlomků je menší než $5/6$, tedy poměr pravděpodobností se dá shora odhadnout číslem $(5/6)^{0{,}1N_\mathrm{A}-1} \approx 10^{-10^{22}}$, což je také maličké. Tedy pravděpodobnost pro $N_\mathrm{A}+1$ je řádově mnohem větší než pravděpodobnost pro $0{,}6N_\mathrm{A}$.

Úloha se také dala pěkně spočítat s využitím Stirlingova vzorce pro odhad faktoriálu, který odhaduje $n!$ jako

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\,.$$

Po dosazení by se výrazy pokrátily a vyšly pravděpodobnosti blížící se nule – už jenom jejich (desítkové) logaritmy jsou přibližně $-2\cdot 10^{23}$, tedy jejich hodnoty jsou kolem $10^{-2\cdot 10^{23}}$. Toto řešení je samozřejmě také úplně správně, zde jsme ale chtěli ukázat, že to jde spočítat i středoškolskými metodami. Stejně je ale úloha těžší, než je u jednoduchých úloh běžné, a to při opravování samozřejmě bude zohledněno.

Komentář k bodovému hodnocení: Úloha byla dost obtížná, proto bylo bodování upraveno. Kdo spočítal jen první jednodušší část, dostal jeden bod, za neúplné řešení nebo pokus o spočtení druhé části jsme dávali body dva. Kdo se zdárně dostal až do konce, dostal bonus, dva bonusy dostalo jen několik málo řešení, která byla opravdu dobrá (respektive byla lepší než vzorák). Všichni řešitelé, kteří se o úlohu pokusili, si zaslouží pochvalu.

Markéta Calábková
`calabkovam@fykos.cz`