Úloha IV.S ... pracovní

6 bodů; průměr 3,68; řešilo 41 studentů

a) *Z nerovnosti*

$$\Delta S_{\mathrm{tot}} \geq 0$$

ze seriálu vyjádřete W a odvoďte tak nerovnost pro práci

$$W \leq Q\left(1 - \frac{T_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{H}}}\right) .$$

b) *Vypočítejte účinnost Carnotova cyklu bez použití entropie.*

Pomůcka: *Napište čtyři rovnice spojující čtyři vrcholy Carnotova cyklu*

$$p_1V_1 = p_2V_2\,, \quad p_2V_2^{\kappa} = p_3V_3^{\kappa}\,, \quad p_3V_3 = p_4V_4\,, \quad p_4V_4^{\kappa} = p_1V_1^{\kappa}$$

a vynásobte je všechny čtyři spolu. Po úpravě dostanete

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} .$$

Dále stačí použít vzorec pro práci při izotermickém procesu: pokud jde proces z objemu V_{A} do V_{B}, práce vykonaná na plynu je

$$nRT \ln \frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}} .$$

Teď si už jen stačí uvědomit, že práce při izotermickém ději je rovna teplu (se správným znaménkem) a vypočítat získanou práci (vzpomeňte si, že adiabatické procesy nepřispívají) a odevzdané teplo. Jako řešení stačí doplnit detaily tohoto postupu.

c) *Minule jste pracovali s pV a Tp diagramem. Proveďte podobné cvičení s TS diagramem, tedy nakreslete do něj izotermický, izobarický, izochorický a adiabatický proces. Nakreslete do diagramu též cestu plynu v Carnotově cyklu a označte správně směr a vrcholy, aby souhlasily s obrázkem v seriálu.*

d) *V seriálu jsme zmínili, že někdy je třeba dávat pozor na přijaté a odevzdané teplo. Někdy se totiž to, zda teplo přijímáme anebo dáváme, mění během procesu. Jedním z příkladů je proces*

$$p = p_0 e^{-\frac{V}{V_0}} ,$$

kde p_0 a V_0 jsou konstanty. Určete, pro jaké hodnoty V (při rozpínaní) proudi teplo do plynu, a kdy z plynu.

Jančiho účinnost je větší nebo rovna účinnosti Carnotova cyklu.

a) Vyjdime teda zo vzťahu

$$\Delta S_{\mathrm{tot}} = \frac{-Q}{T_{\mathrm{H}}} + \frac{Q - W}{T_{\mathrm{C}}} .$$

Vieme, že $\Delta S_{\mathrm{tot}} \geq 0$, teda

$$\frac{-Q}{T_{\mathrm{H}}} + \frac{Q - W}{T_{\mathrm{C}}} \geq 0 .$$

Prevedieme člen s W na druhú stranu

$$Q\left(\frac{1}{T_{\mathrm{C}}} - \frac{1}{T_{\mathrm{H}}}\right) \geq \frac{W}{T_{\mathrm{C}}}$$

a vynásobíme kladným T_C, takže dostávame

$$W \le Q\left(1 - \frac{T_\mathrm{C}}{T_\mathrm{H}}\right) .$$

b) Ak vynásobíme všetky tieto rovnice zo zadania, dostaneme

$$p_1p_2p_3p_4V_1V_2^\kappa V_3V_4^\kappa = p_1p_2p_3p_4V_2V_3^\kappa V_4V_1^\kappa ,$$

čo upravíme na

$$V_2^{\kappa-1}V_4^{\kappa-1} = V_1^{\kappa-1}V_3^{\kappa-1}$$

a ďalej na

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} .$$

Vieme, že pri oboch adiabatických procesoch sa vôbec neprenáša teplo; keď teda uvážime, že vnútorná energia sa nemení pri izotermických procesoch, zistíme, že práca pri prvom je rovná práci pri druhom, ale s opačným znamienkom. Do účinnosti teda tieto procesy neprispejú (ale sú dôležité tým, že menia teplotu). Plyn teda naberie teplo Q_H pri prvom rozpínaní na teplote T_H: toto teplo spočítame ako opačnú prácu (pretože zmena vnútornej energie v tomto procese je nula)

$$Q_\mathrm{H} = nRT_\mathrm{H}\ln\frac{V_2}{V_1} .$$

Znamienko je tu správne, pri rozpínaní plyn prijíma teplo a koná prácu (práca by bola so znamienkom mínus, bola by záporná). Rovnako spočítame aj teplo, ktoré plyn „dostane“ pri izotermickom stlačovaní na teplote T_C, čo je proces $3 \to 4$:

$$Q_\mathrm{C} = nRT_\mathrm{C}\ln\frac{V_4}{V_3} = -nRT_\mathrm{C}\ln\frac{V_2}{V_1} .$$

Tu nastáva kompresia, teda $V_4 < V_3$ a dostaneme $Q_\mathrm{C} < 0$, čo je správne. Zo zákona zachovania energie vieme spočítať získanú prácu ako rozdiel prijatého a odovzdaného tepla, s našimi znamienkami to bude

$$W = Q_\mathrm{H} + Q_\mathrm{C} .$$

Tu W je už extrahovaná práca (práca plynu by bola $-W$). Účinnosť vypočítame ako pomer „užitočného a drahého“, teda

$$\eta = \frac{W}{Q_\mathrm{H}} = 1 + \frac{Q_\mathrm{C}}{Q_\mathrm{H}} = 1 - \frac{nRT_\mathrm{C}\ln\frac{V_2}{V_1}}{nRT_\mathrm{H}\ln\frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_\mathrm{C}}{T_\mathrm{H}} .$$

c) Izotermický a adiabatický (izoentropický) proces sú opäť veľmi jednoduché. Na izochorický proces budeme potrebovať vyjadrenie entropie z tretieho seriálu

$$S(T,V;n) = nR\ln\left(\frac{T^{s/2}V}{n}\right) + nRs_0 .$$

Odtiaľ vyjadríme $T(S)$:

$$S \;= nR\ln\left(\frac{V}{n}\right) + nRs_0 + \frac{s}{2}nR\ln T ,$$

osamostatníme $\ln T$

$$\ln T = \frac{S}{\frac{s}{2}nR} - \frac{2}{s}s_0 - \frac{2}{s}\ln\left(\frac{V}{n}\right)$$

a zrušíme logaritmus

$$T = \left(\frac{V}{n}\right)^{-\frac{2}{s}} e^{-\frac{2}{s}s_0} e^{\frac{2S}{snR}}\,.$$

Do grafu teda pri konštantnom objeme kreslíme exponenciály, pričom konštanta pred exponenciálou klesá s rastúcim objemom. Izobaru vyjadríme podobne, len najprv dosadíme za V

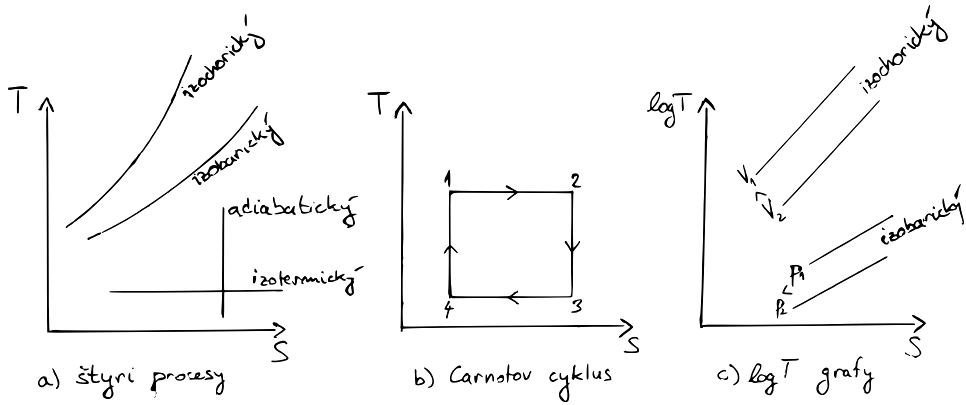
$$S(T,p;n) = nR\ln\left(\frac{T^{s/2}RT}{p}\right) + nRs_0\,.$$

Podobným postupom ako pre izochorický proces dostaneme

$$T = \left(\frac{p}{R}\right)^{\frac{2}{s+2}} e^{-\frac{2}{s+2}s_0} e^{\frac{S}{\left(\frac{s}{2}+1\right)nR}}\,.$$

Ide teda o menej strmú exponenciálnu závislosť, konštanta pred exponenciálou naopak rastie s tlakom. Všetky štyri procesy sú zakreslené do grafu a) na obrázku 1. Aby sme lepšie znázornili rozdiel týchto závislostí, nakreslíme izochorický a izobarický dej aj do $[\log T]S$ diagramu, kde pôjde o priamky, viz graf c).

Carnotov cyklus začína na vysokej teplote. Odtiaľ izotermicky expanduje a jeho entropia sa zvyšuje. Ďalej adiabaticky expanduje ďalej, čím sa jeho teplota znižuje, po čom sa opäť v dvoch krokoch vráti späť. Spolu teda dostaneme obdĺžnik, ako na grafe b).



Obr. 1: TS diagram a $[\log T]S$ diagram

d) To, či plyn teplo odovzdáva alebo prijíma, ľahko určíme podľa znamienka $\delta Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$. Ak ešte vyjadríme $\mathrm{d}U = \mathrm{d}(\frac{s}{2}pV) = \frac{s}{2}V\mathrm{d}p + \frac{s}{2}p\mathrm{d}V$, môžeme písať

$$\delta Q = \frac{s}{2}V\mathrm{d}p + \left(\frac{s}{2}+1\right)p\mathrm{d}V\,.$$

My máme zadané, ako sa mení tlak s objemom. Teda malé zmeny tlaku závisia od malých zmien objemu. To spočítame jednoducho pomocou

$$\mathrm{d}p = \mathrm{d}\left(p_0 e^{-\frac{V}{V_0}}\right) = -p_0 e^{-\frac{V}{V_0}} \frac{\mathrm{d}V}{V_0}\,,$$

čo vieme ešte šikovne prepísať na

$$\mathrm{d}p = -p\frac{\mathrm{d}V}{V_0}\,.$$

Ak všetko dosadíme do vzťahu pre δQ, dostaneme

$$\delta Q = -\frac{s}{2}V\ p\frac{\mathrm{d}V}{V_0} + \left(\frac{s}{2}+1\right)p\mathrm{d}V \ = \left(\frac{s}{2}+1-\frac{s}{2}\frac{V}{V_0}\right)p\mathrm{d}V$$

Vidíme, že pre malé objemy je $\delta Q > 0$ a plyn teplo pri expanzii ($\mathrm{d}V > 0$) prijíma. To platí až do bodu, kde je $\delta Q = 0$, čo je pre

$$V \ = \frac{s+2}{s}V_0 = \kappa V_0\,.$$

Do objemu κV_0 bude plyn pri expanzii teplo prijímať, pre väčší objem naopak odovzdávať.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`