

**Úloha IV.E . . . trhni si!**

8 bodů; průměr 6,00; řešilo 45 studentů

Změřte mez pevnosti kancelářského papíru v tahu. Ideálně použijte co nejméně potištěnou část brožurky, ve které vám přišlo zadání (pro tisk je využíván papír  $80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$ ).

*Karel viděl příspěvek Vojty Žáka o měření s papírem na Veletrhu nápadů učitelů fyziky 20.*

**Teorie**

Papír je tenký materiál, který se nejčastěji vyrábí z buničiny. Jeho vlastnosti jsou určeny právě druhem surovin použitých k jeho výrobě (obvykle jde o smrkové dřevo). Jedním ze základních parametrů papíru je gramáž. V kancelářských potřebách se nejčastěji setkáme s papírem o gramáži  $80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Papír je v dnešní době vyráběn strojově a vlákna jsou seřazena jedním směrem. Směr těchto vláken ovlivňuje všechny další vlastnosti, např. způsobuje anizotropii pevnosti v tahu – pevnost ve směru podélném je větší než ve směru příčném. Pevnost v tahu  $\sigma_t$  znamená schopnost odolávat vnějším silám, které vzorek materiálu natahují. Vypočítá se jako podíl působící síly na plochu

$$\sigma_t = \frac{F}{S},$$

kde  $S$  je plocha řezu v rovině kolmé na působící sílu  $F$ . Pevnost vyjadřujeme nejčastěji v jednotkách MPa a GPa.

Pokud do vzorce dosazujeme plochu řezu nedeformovaného vzorku  $S_0$ , hovoříme o tzv. smluvním napětí. Papír se však působením síly natáhne z délky  $l_0$  na délku  $l = l_0(1 + \varepsilon)$ . Pokud budeme předpokládat zachovávající se objem listu papíru  $V$  (a malé deformace), dostaneme skutečné napětí

$$\sigma_t = \frac{Fl}{V} = \frac{Fl_0(1 + \varepsilon)}{V} = \frac{F}{S_0}(1 + \varepsilon). \quad (1)$$

Mez pevnosti definujeme jako napětí, při němž začne deformačně-napěťová křivka klesat a dojde k narušení celistvosti vzorku.

**Pomůcky**

- Kancelářský papír,
- řezačka,
- LabQuest od firmy Vernier + Dual-Range Force Sensor,
- svorka na papír,
- mikrometr.

**Postup práce**

Prvotním úkolem bylo nalézt způsob, jak upevnit papír na siloměr, aniž by došlo k jeho perforaci. Siloměr končí háčkem, na který jsme zavěsili plechovou kancelářskou svorku a tou papír přicvakli. Svorka nebyla však příliš silná – papíry širší než 2 mm se dříve ze svorky vyvlékly, než se přetrhly. Proto jsme využili řezačku k tvorbě velmi tenkých, rovných proužků papíru. Před každým pokusem jsme změřili šířku proužku mikrometrem. Pro každou šířku jsme proměřili mez pevnosti několikrát. Siloměr měřil sílu s přesností na tři desetinná místa. Před každým pokusem byl vynulován.

Jednoduchým pokusem, při němž položíme čtverec papíru na vodu a pozorujeme jeho zkroucení, jsme zjistili, který ze směrů je příčný a který podélný. Osa zkroucení je rovnoběžná s podélným směrem vláken. Tento podélný směr vláken korespondoval s delší stranou papíru a příčný tedy naopak s kratší stranou papíru. Měřili jsme síly pro roztrhnutí jak v podélném směru vláken, tak v příčném.

Relativní prodloužení bylo vyhodnocováno pomocí videozáznamu.

### Zpracování

Hodnoty síly pro každý rozměr jsme statisticky zpracovali. Na základě opakovaných měření jsme stanovili nejistotu v šířce proužku jako  $s_{\bar{s}} = 0,02$  mm (pro všechny proužky stejnou). Ke každé šířce papíru náležela sada hodnot naměřených sil, z nichž jsme vypočítali průměr a výběrovou směrodatnou odchylku. Na základě Studentova koeficientu pro  $3\sigma$  jsme stanovili interval spolehlivosti, na základě něž jsme vylučovali hrubé chyby. Poté bylo statistické zpracování nejistot zopakováno.

Směrodatnou odchylku nepřímého měření jsem stanovili z Gaussova zákona hromadění chyb, který má pro naše měření tvar

$$s_{\sigma_t} = \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon}{S}\right)^2 s_F^2 + \left(\frac{-F(1+\varepsilon)}{S^2}\right)^2 s_{\bar{s}}^2 + \left(\frac{F}{S}\right)^2 s_{\varepsilon}^2}.$$

Ze zákona hromadění chyb jsme vypočítali směrodatnou odchylku pro každou šířku papíru zvlášť a z těchto hodnot určili aritmetický průměr, který představoval hledanou mez pevnosti v tahu pro kancelářský papír.

Tloušťku papíru jsem stanovili jako  $d = (0,105 \pm 0,01)$  mm. Maximální chyba mikrometru daná výrobcem je 0,004 mm a chyba siloměru je 0,005 N. Při zaokrouhlování bereme v potaz skutečnost, že při měření mikrometrem neaplikujeme vždy stejný tlak a chyby jsou proto spíše větší.

### Podélný směr

V podélném směru jsem naměřili 35 hodnot, z nichž některé jsme jako chyby vyřadili. Celkově zbylo 28 hodnot. Relativní prodloužení bylo  $(0,7 \pm 0,05)\%$ , chybu jsme odhadovali ze snímků videozáznamu. Šířka proužku papíru se pohybovala v rozmezí od 0,84 mm do 1,5 mm, čemuž odpovídá rozmezí sil od 2,21 N do 3,945 N. Mez pevnosti v tahu papíru byla v podélném směru vypočítána jako

$$\sigma_{t1} = (24,9 \pm 0,7) \text{ MPa}.$$

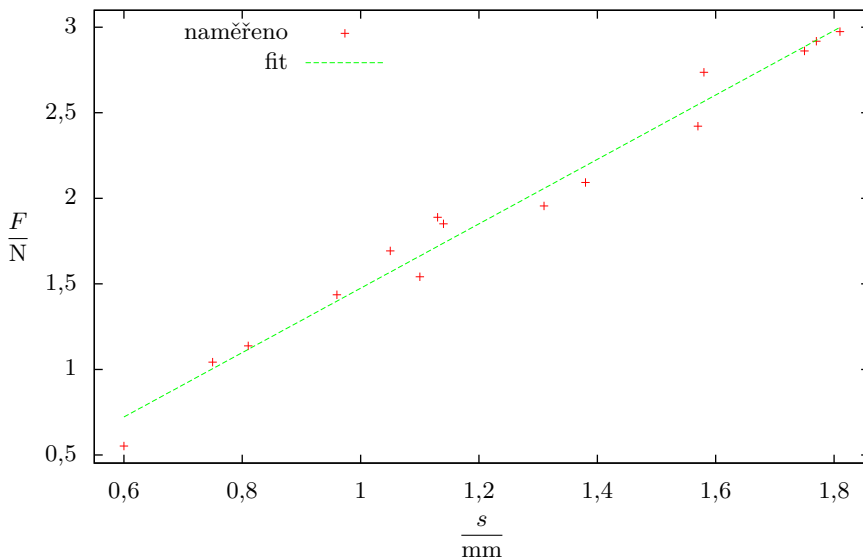
Data pro podélný směr trhání jsou vynesena na obrázku 1.

### Příčný směr

V příčném směru jsem naměřila 100 hodnot, 92 z nich nepředstavovalo hrubé chyby. Relativní prodloužení bylo  $(0,9 \pm 0,05)\%$ . Šířka papíru se pohybovala od 0,6 mm do 1,81 mm. Síla pro roztržení se pohybovala od 0,85 N do 3,21 N. Mez pevnosti v tahu papíru byla v příčném směru vypočítána jako

$$\sigma_{t2} = (14,9 \pm 0,6) \text{ MPa}.$$

Data pro podélný směr trhání jsou vynesena na obrázku 2.



Obr. 1: Graf závislosti síly potřebné k roztržení papíru v závislosti na šířce vzorku; podélný směr

### Diskuse chyb

Největší chyby měření byly převážně způsobeny lidským faktorem. Nebylo možné docílit toho, aby za proužek vždy bylo taháno stejným způsobem. Nejvíce vychýlené hodnoty byly vyloučeny při statistickém zpracování metodou  $3\sigma$ .

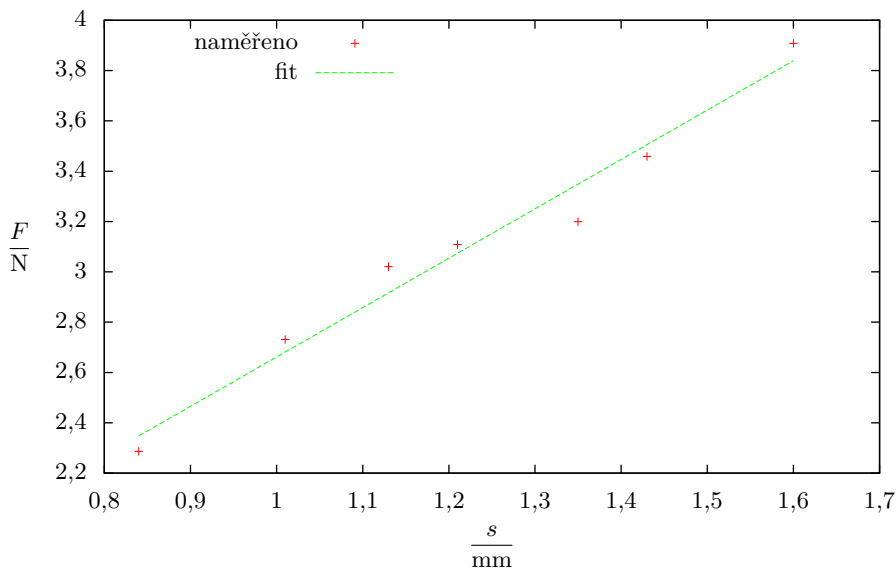
Ačkoliv jsme u každého proužku kontrolovali, jestli má na obou koncích přibližně stejnou tloušťku, ve většině případů tomu tak ale nebylo, protože řezačka nebyla tak ostrá, aby papír přesně seřízla. Pro získání přesnějších hodnot by bylo vhodné změnit metodiku a stanovovat šířku proužku jako minimální nikoli průměrnou. Měření relativního prodloužení by bylo možné podrobit detailnější analýze za pomoci rychloběžné kamery.

Vypočítané nejistoty typu B byly tak malé, že se vůbec nepromítly do prvních třech platných číslic meze v tahu, které ve výsledcích uvádíme. Proto jsem tyto nejistoty vůbec nezmiňovali. V průběhu měření jsme zjistili, že síla utržení závisí i na délce papíru, pravděpodobně v důsledku nerovnoměrného rozložení sil po délce. Měření tedy probíhalo vždy s papírem o stejné délce.

### Závěr

Na základě více než 100 měření jsme stanovili hodnoty meze v tahu papíru o gramáži  $80\text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$ . Potvrdili jsme teoretické předpoklady<sup>1</sup>, že pevnost v tahu ve směru podélném je větší než ve směru příčném.

<sup>1</sup>Ph.D. Pecina, P.: Papír. [http://www.ped.muni.cz/wtech/03\\_studium/papir.pdf](http://www.ped.muni.cz/wtech/03_studium/papir.pdf)



Obr. 2: Graf závislosti síly potřebné k roztržení papíru v závislosti na šířce vzorku; příčný směr.

Pevnost v tahu ve směru podélném je

$$\sigma_{t1} = (24,9 \pm 0,7) \text{ MPa},$$

pevnost v tahu ve směru příčném je

$$\sigma_{t2} = (14,9 \pm 0,6) \text{ MPa}.$$

V žádných běžně dostupných inženýrských tabulkách ani další literatuře jsme nenalezli hodnoty, s nimiž bychom mohli naše výsledky porovnat. Z internetových zdrojů jedinou číselnou hodnotu poskytl zdroj *Goyal, H.:* PaperOnWeb. <http://www.paperonweb.com/paperpro.htm#Strength%20Properties>. V ostatních zemích neurčují mez v tahu (*tensile strength*) v pascálech, ale v  $\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$ , je tedy potřeba naše výsledky násobit tloušťkou. Hodnoty po převodu jsou  $\sigma_{t1} \doteq 2,6 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$  a  $\sigma_{t2} \doteq 1,6 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$ , ve zdroji je uvedeno  $3,6 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$  a  $2,6 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$  v příslušných směrech. Z našeho měření vychází tedy vychází pro příčný a podélný směr kvalitativně stejné výsledky, ale mez pevnosti je zhruba o  $1 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$  menší. Tento rozdíl bude pravděpodobně způsoben tím, že v našem experimentu nebyla dobře kontrolována šířka a neporušenost papíru po celé délce proužku. Zároveň se struktura našeho papíru může razantně

lišit od struktury papíru zmíněného v internetovém zdroji.

*Kateřina Stodolová*

*Miroslav Hanzelka*  
mirek@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.