Úloha IV.3 ... šetřeme lesy

3 body; průměr 2,54; řešilo 65 studentů

Máme roli toaletního papíru o poloměru $R = 8\,\mathrm{cm}$ s dutou částí o poloměru $r = 2\,\mathrm{cm}$. Každá vrstva namotaného papíru má tloušťku $d = 200\,\mathrm{\mu m}$ a vrstvy na sebe dokonale přiléhají. O kolik útržků více v takovéto roli máme, pokud má jeden útržek délku $l_1 = 9\,\mathrm{cm}$, než když má jeden útržek délku $l_2 = 13\,\mathrm{cm}$? Jako součást řešení vyžadujeme odhad chyby použité aproximace.
Bonus: *Vypočtěte přesnou délku spirály, kterou papír vytváří.*

Kiki je sice potvora, ale tohle by přece jen do Náboje nedala.

Celou úlohu lze zjednodušit na plošný problém, protože délka navinutého papíru na šířce role nezávisí. Máme tedy mezikruží do kterého navíjíme dlouhý obdélník o stejné ploše, známé tloušťce a neznámé délce. Porovnáním ploch dostaneme

$$
\begin{aligned}
S &= \pi(R^2 - r^2)\,, \quad S = ld\,,\\
\Rightarrow \quad ld &= \pi(R^2 - r^2)\,,\\
l &= \frac{\pi(R^2 - r^2)}{d} \doteq 9\,420\,\mathrm{cm}\,.
\end{aligned}
$$

Vydělíme-li toto délkou útržku, dostaneme počet útržků.

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_1}\,,\\
n_2 &= \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_2}\,.
\end{aligned}
$$

Rozdíl je pak

$$
\Delta n = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_1} - \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_2} = \pi(R^2 - r^2)\frac{l_2 - l_1}{dl_1 l_2}\,.
$$

Dosazením dostaneme

$$
\Delta n \doteq 322\,.
$$

Odhad chyby

Největší chyba je způsobena tím, že nevíme, kde přesně je měřený průměr vůči konci papíru. Naše metoda vyžaduje měření v půlce poslední vrstvy, aby byla přesná. Proto můžeme maximální chybu odhadnout na polovinu vnějšího obvodu, tedy přibližně na $25\,\mathrm{cm}$. Ostatní chyby, jako jsou nepřesnosti způsobené nepřesně přiléhajícím papírem na začátku role nebo změnou obsahu při přechodu od obdélníku ke spirále, jsou řádově menší, a proto je lze zanedbat.

Složitější řešení

Pokud počítáme délku křivky s v polárních souřadnicích (r, φ), víme, že

$$
s = \int \sqrt{r(\varphi)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi\,.
$$

Naši spirálu vyjádříme v polárních souřadnicích

$$
r(\varphi) = \frac{\varphi d}{2\pi}\,; \quad \varphi \in \left\langle \frac{2\pi r}{d}; \frac{2\pi R}{d} \right\rangle\,.
$$

Délka spirály je potom

$$l_\mathrm{i} = \int_{2\pi r/d}^{2\pi R/d} \sqrt{\left(\frac{\varphi d}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi = \\ = \left[\frac{d}{4\pi}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right]_{2\pi r/d}^{2\pi R/d}.$$

Dosadíme a zjistíme, že $l_\mathrm{i} \doteq 9\,420\,\mathrm{cm}$, což se při použitém zaokrouhlení neliší od výsledku přes obsahy. To není překvapivé – platí $R^2 \gg d^2$, a tedy $(R/d)^2 \gg 1$. O řád hůře platí stejné nerovnosti i pro r. Ve výsledném tvaru integrálu pro můžeme zcela vynechat člen s logaritmem, zanedbat jedničku v odmocnině a psát

$$l_\mathrm{i} \approx \frac{d}{4\pi}\left(\frac{2\pi R}{d}\right)^2 - \frac{d}{4\pi}\left(\frac{2\pi r}{d}\right)^2 = \frac{\pi(R^2-r^2)}{d} = l\,.$$

Již v předpisu integrálu si lze všimnout, že aproximací $R^2 \gg d^2$ odebereme člen, který bychom mohli nazvat „spirálním“, tj. ten člen, který zahrnuje odchylku délky spirály od délky soustředných kružnic. Rozdíl

$$l_\mathrm{i} - l = 0{,}004\,\mathrm{cm}$$

je daleko za poslední platnou číslicí, na kterou jsme zaokrouhlili. Největší chyba bude způsobena stejným mechanismem jako předtím, neboť stále uvažujeme, že poloměr byl změřen v koncovém bodě navíjení. Také záleží na tom, zda byl poloměr určen dělením průměru, nebo přímým měřením. Závěrem tedy můžeme pouze zopakovat, že největší chyba není dána aproximacemi při výpočtech, ale neznalostí přesného poloměru.

Mikuláš Matoušek
`mikulas@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.