Úloha III.5 ... sešit dezertér

5 bodů; průměr 2,52; řešilo 42 studentů

Na lavici se sklonem $\alpha = 5^\circ$ leží sešit formátu A4 o hmotnosti m, mezi lavicí a sešitem působí statická třecí síla s koeficientem $f_0 = 0{,}52$. Poté kdosi do lavice strčí a ta začne kmitat ve směru sklonu desky s frekvencí $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$ a amplitudou $A = 1\,\mathrm{mm}$.

a) Určete, jakou dodatečnou silou musíme na sešit tlačit (kolmo na lavici), aby se sešit nezačal pohybovat.

b) Určete, za jak dlouho sešit spadne z lavice, jestliže je na počátku jeho spodní hrana (ta kratší) na dolním okraji lavice. Dynamický koeficient tření je f, sešit považujte za tuhou desku.

Mirkovy sešity se snaží prchnout z přednášek v F1.

Pozrime sa na svet otočený o uhol α. Vtedy je lavica vodorovná a kmitá zvislo, ale tiažové zrýchlenie je od zvislej osi o uhol α naklonené. Trecia sila pôsobí v smere, v ktorom sa zošit pohybuje alebo chce pohybovať, teda vodorovne.

Tým, že doska kmitá, sa mení sila F_p, ktorá pritláča zošit na dosku. Konkrétne vieme, že pri harmonických kmitoch závisí poloha dosky na čase podľa vzťahu $y = A\sin(2\pi\nu t)$. Dvojitým derivovaním získame zrýchlenie, ktoré pôsobí na dosku $a_\mathrm{d} = -4\pi^2\nu^2 A\sin(2\pi\nu t) = -4\pi^2\nu^2 y$. Ak zošit leží na doske, pôsobí naňho doska silou $F = ma_\mathrm{d}$, ktorá mu udeľuje zrýchlenie a_d.

Tu si ale uvedomme, že zošit nemusí stále ležať na doske. Ak bude maximálna hodnota a_d väčšia ako hodnota "zvislej" zložky tiažového zrýchlenia $g\cos\alpha$, gravitačné zrýchlenie v hornom bode obratu dosky nedokáže na nej držať zošit a ten sa začne hýbať šikmým vrhom, až kým zasa nedopadne na dosku (alebo na zem). Našťastie tento prípad pre naše hodnoty nenastáva; časť b) si ale môžete skúsiť preňho spočítať. Ak ste masochisti, môžete predpokladať aj že zošit sa po dopade na dosku trochu odráža a šmýka.

Ale naspäť k riešenej úlohe. Sila, ktorá pritláča zošit na dosku, je vektorovým súčtom „zvislej“ (kolmej na dosku) zložky tiažovej sily a sily F: $F_\mathrm{p} = m(g\cos\alpha - 4\pi^2\nu^2 y)$. Vo vodorovnom smere na zošit pôsobí „vodorovná“ zložka tiažovej sily $F_{g\mathrm{v}} = mg\sin\alpha$, proti ktorej pôsobí trecia sila $F_t \leq f_0 F_\mathrm{p}$. Na to, aby sa zošit po doske nešmýkal, nesmie $F_{g\mathrm{v}}$ prekročiť maximálnu hodnotu statickej trecej sily, z podmienky $F_{g\mathrm{v}} \leq f_0 F_\mathrm{p}$ teda dostávame

$$mg\sin\alpha \leq f_0 m(g\cos\alpha - 4\pi^2\nu^2 y)\,,$$

$$g\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{f_0}\right) \geq 4\pi^2\nu^2 y\,. \tag{1}$$

Je jasné, že ak táto podmienka prestane platiť, bude to pre hodnotu $y = A$, teda v hornom bode obratu dosky. Dosadením hodnôt zo zadania ale overíme, že ani vtedy podmienka platiť nenastane... Nuž, číselné výpočty nie sú silnou stránkou matfyzáka. Keď zoberieme $\nu = 15\,\mathrm{Hz}$, už vychádza, že sa zošit bez upevnenia z lavice zošmykne. Všimnime si tiež, že tento výsledok nezávisí na hmotnosti zošita. Nestačí teda niečo ťažké naňho položiť, ale potrebujeme ho pritlačiť nejakou pevnou, najlepšie konštantnou silou F_a (svorka?).

Najmenšia hodnota tejto sily je samozrejme taká, aby nastala rovnováha síl $F_{g\mathrm{v}}$ a $F_t = f_0 F_\mathrm{p}$ v bode $y = A$. V tomto prípade platí $F_\mathrm{p} = m(g\cos\alpha - 4\pi^2\nu^2 A) + F_\mathrm{a}$ a tiež $mg\sin\alpha = f_0 F_\mathrm{p}$, z čoho dostávame pre hmotnosť zošita $m = 400\,\mathrm{g}$

$$F_\mathrm{a} = \frac{mg\sin\alpha}{f_0} - m(g\cos\alpha - 4\pi^2\nu^2 A) \doteq 0{,}3\,\mathrm{N}\,,$$

pričom pre číselné výpočty používame spomenutú hodnotu $\nu = 15\,\mathrm{Hz}$.

V časti b) žiadnu ďalšiu silu nemáme. Keď teda prestane platiť nerovnosť $F_{gv} \le f_0 F_p$, začne pôsobiť dynamická trecia sila $F_t = fF_p$ a zošit sa začne z lavice zošmykovať so zrýchlením

$$a = g \sin\alpha - fg\cos\alpha + 4\pi^2\nu^2 fy = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 4\pi^2\nu^2 fA \sin 2\pi\nu t \tag{2}$$

až dovtedy, kým z lavice nespadne alebo sa nezastaví. Ak sa zastaví a podmienka (1) neplatí, bude sa ďalej pohybovať dynamickým trením; inak počká, kým sa zasa nedostane do bodu, v ktorom (1) platiť prestane, a cyklus sa opakuje.

V skutočnosti ale vieme povedať, že nastane druhý prípad – zošit počká. Časová závislosť zrýchlenia je totiž len sínusovka posunutá dole (keď $f > \operatorname{tg}\alpha$, čo je podmienka na to, aby sa zošit nezošmykol pri najmenšom otrase) a rýchlosť zošitu je plocha pod grafom zrýchlenia od bodu, v ktorom sa začne pohybovať. Tým, že graf posunieme dole, dosiahneme to, že kladné kopčeky majú menšiu plochu ako záporné. Zošit teda zastaví v bode, kde je zrýchlenie podľa (2) záporné, a vtedy musí byť aj statické trenie silnejšie ako gravitácia, lebo statické trenie je silnejšie ako dynamické ($f < f_0$).

Teraz spravíme celkom rozumný predpoklad, že dráha s_0, ktorú zošit prejde počas jednej periódy kmitov dosky, bude malá – oveľa menšia ako dĺžka jeho hrany. Potom môžeme zanedbať časť tejto dráhy, ktorú by prešiel počas poslednej periódy pred spadnutím, a povedať, že čas, za ktorý sa posunie o $l/2$ (pozor, zošit spadne už keď o polovicu trčí), je $Tl/2s_0 = l/2s_0\nu$.

Túto dráhu získame integrovaním. Nech sa zošit začne šmýkať v čase t_0, kedy $a = 0$, a prestane v čase t_1, kedy $v = 0$. Rýchlosť v čase $t \ge t_0$ dostaneme ako

$$\begin{aligned} v &= \int_{t_0}^{t} \left(g(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 4\pi^2\nu^2 fA\sin 2\pi\nu t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= g(\sin\alpha - f\cos\alpha)(t - t_0) + 4\pi^2\nu^2 fA \int_{t_0}^{t} \sin 2\pi\nu t\,\mathrm{d}t \\ &= g(\sin\alpha - f\cos\alpha)(t - t_0) - 2\pi\nu fA\left[\cos(2\pi\nu t) - \cos(2\pi\nu t_0)\right]. \end{aligned}$$

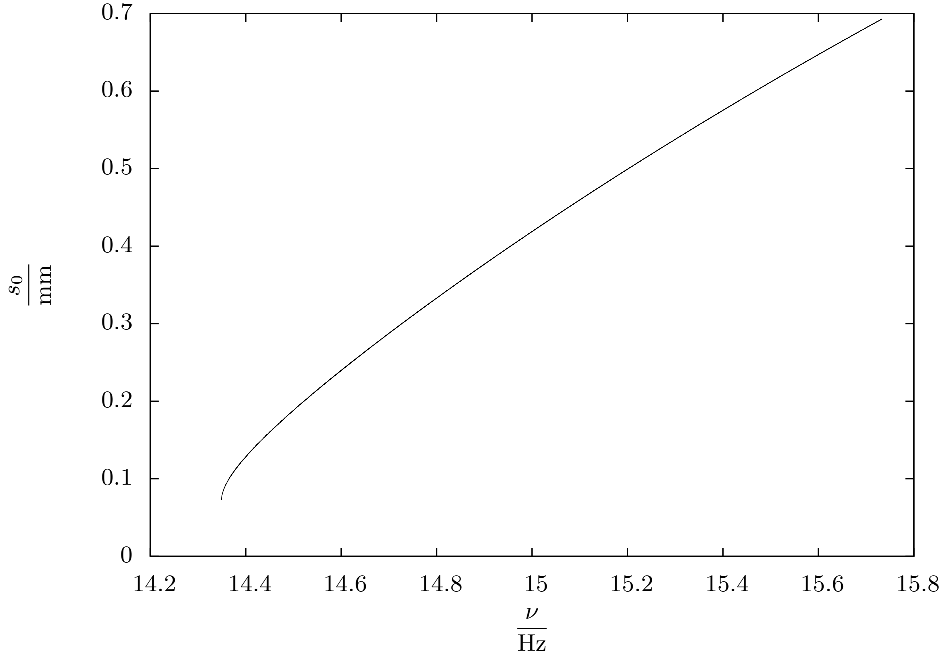
Dráhu v čase $t \ge t_0$ teraz dostaneme ako

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^{t} g(\sin\alpha - f\cos\alpha)(t - t_0) - 2\pi\nu fA\left[\cos(2\pi\nu t) - \cos(2\pi\nu t_0)\right]\,\mathrm{d}t \\ &= g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{(t - t_0)^2}{2} + 2\pi\nu fA\cos 2\pi\nu t_0 (t - t_0) - fA\left[\sin(2\pi\nu t) - \sin(2\pi\nu t_0)\right]. \end{aligned}$$

Hľadáme dráhu $s_0 = s(t = t_1)$. V čase t_0 platí $g(\sin\alpha - f_0\cos\alpha) + 4\pi^2\nu^2 f_0 A\sin 2\pi\nu t_0 = 0$, teda

$$t_0 = \frac{1}{2\pi\nu}\arcsin\frac{g(f_0\cos\alpha - \sin\alpha)}{4\pi^2\nu^2 f_0 A};$$

čas $t_1 > t_0$, kedy $v = 0$, ale nemôžeme jednoducho určiť, lebo sme dostali transcendentnú rovnicu. Neostáva nič iné, ako riešiť numericky. Zvoľme si koeficient dynamického trenia $f = 0{,}4$ (hodnoty pre drevo a papier nie sú veľmi tabuľkové, ak nešpecifikujeme konkrétnu úpravu dreva, typ papiera atď.). Pre našu frekvenciu $\nu = 15\,\mathrm{Hz}$ dostávame $t_0 \doteq 12{,}3\,\mathrm{ms}$, $t_1 \doteq 28{,}1\,\mathrm{ms}$ (perióda je $T \doteq 67\,\mathrm{ms}$) a po dosadení do vzťahu pre dráhu máme $s_0 \doteq 0{,}42\,\mathrm{mm}$, teda čas, za ktorý sa zošit A4 s hranou $l = 21\,\mathrm{cm}$ zošmykne, je približne $17s$.



Obr. 1: Dráha urazená zošitom za jednu periódu.

To vyzerá rádovo rozumne. Ešte môžeme prepočítať celý rozsah ν, pre ktoré náš model platí – zošit sa hýbe, ale neodletí, teda

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{f_0}\right)} \leq \nu \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{A}}\,.$$

Hodnoty $s_0(\nu)$ sú vykreslené v grafe 1. Vidíme, že pri dolnej limite na frekvenciu kmitov padá dráha do nuly, čo zodpovedá tomu, že sa zošit pohybuje len minimálne. Zdanlivú rýchlosť, ktorou by sa zošit pohyboval, vypočítame ako s_0/T. Vychádza rádovo v milimetroch za sekundu. V skutočnosti ale zošity padajú rýchlejšie.

Komentáře k došlým řešením

Okrem „fail-u" s číslami nebolo jasné, ako sa myslia kmity v smere sklonu. Vysvetlenie: ak je lavica sklonená mierne do zvislého smeru, bude kmitať približne v zvislom smere (kolmo na svoju rovinu). Ak by kmitala rovnobežne so svojou rovinou, bolo by to polovicu času „proti" smeru jej sklonu. To fyzikálne nevadí (v časti b) to akurát zaistí, že sa zošit nebude hýbať nahor), ale opravoval som miernejšie – body sa strácali skôr za vynechanie niektorých síl alebo príliš číselné počítanie. Ale povedať, že sa počas kmitov mení uhol α, je už nezmysel – čo potom má byť smer sklonu? Názov úlohy nebol „tableflip".

Časť b) nikto nedopočítal do konca, bola teda za 2 body a jeden ste mohli získať už za správny návod bez integrálov. Niekedy sa oplatí poslať aj nápady.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz