Úloha II.4 ... svítíme si na zrcadla
5 bodů; (chybí statistiky)

Máme optickou soustavu tvořenou třemi polopropustnými zrcadly v jedné ose za sebou. Každé zrcadlo by samo o sobě polovinu dopadajícího záření propustilo a polovinu odrazilo. Jaká část světla celkově projde naší optickou soustavou?

Bonus *Vyřešte úlohu pro n zrcadel.*

Karel se prohlížel v zrcadle.

Než se pustíme do řešení, připomeňme si jednu důležitou vlastnost polopropustných zrcadel: Pokud zrcadlo z jedné strany propouští zlomek p dopadajícího světla a odráží $1-p$, tak také nutně[1] z druhé strany propouští p a odráží $1-p$. Dále také víme, že se veškeré záření odrazí nebo projde, zrcadla se tedy nezahřívají.

Řešme úlohu nejprve pouze pro $n=2$. Po průchodu prvním zrcadlem projde zlomek záření p, po průchodu druhým zrcadlem p^2. Při dopadu na druhé zrcadlo se však také $p(1-p)$ odrazí zpět na první zrcadlo.[2] Část záření projde prvním zrcadlem do oblasti zdroje, zpět k druhému zrcadlu se vrátí $p(1-p)^2$ a druhým zrcadlem projde $p^2(1-p)^2$. Znovu se však odrazí $p(1-p)^3$... Takto bychom mohli pokračovat velmi dlouho, konkrétně do nekonečna. Stačí si však všimnout, že záření, které projde soustavou dvou zrcadel, prodělá 2 průchody a $2k$ odrazů, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$ Naším úkolem je tedy sečíst geometrickou řadu s kvocientem $(1-p)^2$

$$p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k} = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(1-p)^2\right]^k = p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}\,.$$

Po dosazení $p = 1/2$ dostaneme, že zrcadlem projde $1/3$ záření.

Kdybychom nyní chtěli obdobně postupovat pro $n = 3$, zjistíme, že nám přítomnost prostředního zrcadla naše výpočty značně ztíží. My se však nezalekneme a rovnou si ukážeme, jak úlohu vyřešit pro obecné $n \in \mathbb{N}$. Budeme postupovat indukčně. Stačí si totiž uvědomit, že soustavu dvou zrcadel můžeme označit za nový optický prvek, který propouští $P_2 = p/(2-p)$ a odráží $1 - P_2 = 2(1-p)/(2-p)$. Pak už můžeme opět použít jednoduchou geometrickou řadu. Pouze si nyní musíme lépe rozmyslet, kde vystupuje p a kde P_2. Dva průchody vytvoří prefaktor pP_2, kvocient řady bude $(1-p)(1-P_2)$. Potom

$$pP_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(1-p)(1-P_2)\right]^k = pP_2 \frac{1}{1-(1-p)(1-P_2)} \equiv P_3\,.$$

Zde jsme označili P_3 ako část záření, která projde optickou soustavou tří zrcadel. Po dosazení $p = 1/2$ dostaneme

$$P_3 = pP_2 \frac{1}{1-(1-p)(1-P_2)} = \frac{p}{3-2p} = \frac{1}{4}\,.$$

Nyní si můžeme všimnout podobnosti

$$P_2 = \frac{p}{2-p} \quad \text{a} \quad P_3 = \frac{p}{3-2p}\,.$$

Možná vás napadne, že by tedy mohlo platit

$$P_n = \frac{p}{n-(n-1)p}\,,$$

[1] Jedná se důsledek zákonů termodynamiky.

[2] Jelikož $p = 1/2$, mohli bychom psát $1 - p = p$, budeme však postupovat obecněji. Stále ale používáme alespoň předpoklad, že všechna zrcadla mají stranu propouštějící p směrem ke zdroji.

konkrétně pro $p = 1/2$

$$P_n = \frac{1}{n+1}\,.$$

Abychom ukázali, že hledaným řešením je skutečně zmíněná harmonická posloupnost $1/(n+1)$, využijeme našeho indukčního postupu a přepíšeme vztah pro $n = 3$ pro obecné $n > 1$

$$P_n = pP_{n-1}\frac{1}{1-(1-p)(1-P_{n-1})} = \frac{pP_{n-1}}{p+P_{n-1}-pP_{n-1}}\,.$$

Tento vztah dále upravíme do tvaru

$$P_n = \frac{1}{\frac{1-p}{p}+\frac{1}{P_{n-1}}}\,.$$

Když dodefinujeme $P_1 \equiv p$, snadno už vyjádříme kýžený výsledek

$$P_n = \frac{1}{\frac{1-p}{p}+\frac{1}{P_{n-1}}} = \frac{1}{\frac{1-p}{p}+\frac{1-p}{p}+\frac{1}{P_{n-2}}} = \cdots = \frac{1}{(n-1)\frac{1-p}{p}+\frac{1}{p}} = \frac{p}{n-(n-1)p}\,.$$

Všimněme si, že posloupnost konverguje k nule, což fyzikálně znamená, že i skrz velmi dobře propustná skla neuvidíme, pokud jich bude v řadě velký počet.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.