Úloha II.2 ... numismatická

2 body; (chybí statistiky)

Občas nastane stav, kdy je nominální hodnota mincí nižší, než jejich výrobní náklady. Mějme dvě mince vyrobené ze slitiny zlata a stříbra. První má průměr $d_1 = 1\,\mathrm{cm}$, druhá $d_2 = 2\,\mathrm{cm}$, obě mají tloušťku $h = 2\,\mathrm{mm}$. Menší mince při ponoření do nádoby se rtutí klesne ke dnu, zatímco větší mince se začne vynořovat. Ponoříme-li do rtuti obě mince, menší na větší, budou se v kapalině vznášet. Určete, kolik hmotnostních procent stříbra obsahuje větší mince, jestliže menší je celá zlatá.

Bonus *Jak se změní výsledek úlohy, pokud menší mince může obsahovat i stříbro?*

Mirek má radši mince než bankovky.

V tomto texte budeme používať nasledovné značenie: index 1, resp. 2 prislúcha menšej, resp. väčšej minci, podobne ako v zadaní. Indexy Hg, Au a Ag odpovedajú príslušným chemickým značkám daných prvkov čiže ortuť, zlato a striebro. V tomto texte sa vyskytnú aj kombinácie týchto indexov, napríklad $V_{1,\mathrm{Au}}$ je objem zlata v menšej minci.

Pre túto úlohu budeme používať tabuľkové hodnoty hustôt $\varrho_{\mathrm{Hg}} = 13\,546\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $\varrho_{\mathrm{Au}} = 19\,320\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a $\varrho_{\mathrm{Ag}} = 10\,503\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Pre prípad, keď sú obe minca položené na sebe a ponorené do ortuti platí vzťah

$$m_1 g + m_2 g = (V_1 + V_2)\varrho_{\mathrm{Hg}} g\,, \tag{1}$$

Po použití základných vzťahov na výpočet objemu a hmotnosti valcov dostaneme zo vzťahu (1)

$$\varrho_2 = \varrho_{\mathrm{Hg}}\,(1 + k) - \varrho_1 k\,, \tag{2}$$

kde $k = (d_1/d_2)^2$. Hustoty daných mincí musia vyhovovať vzťahu (2).

Zo zadania vieme, že malá minca je celá zo zlata, čiže $\varrho_1 = \varrho_{\mathrm{Au}}$. Táto voľba nám presne určila aj hustotu väčšej mince zo vzťahu (2):

$$\varrho_2 = \varrho_{\mathrm{Hg}}\,(1 + k) - \varrho_{\mathrm{Au}} k\,.$$

Teraz nám už len stačí určiť hmotnosti zlata a striebra v druhej minci. Pre jej hustotu platí vzťah

$$\varrho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{\varrho_{\mathrm{Au}} V_{2,\mathrm{Au}} + \varrho_{\mathrm{Ag}} V_{2,\mathrm{Ag}}}{V_2} = \frac{\varrho_{\mathrm{Au}} V_{2,\mathrm{Au}} + \varrho_{\mathrm{Ag}}\,(V_2 - V_{2,\mathrm{Au}})}{V_2}\,. \tag{3}$$

Z rovnice (3) nám plynie vzťah pre objem zlata v druhej minci

$$V_{2,\mathrm{Au}} = \frac{V_2\,(\varrho_2 - \varrho_{\mathrm{Ag}})}{\varrho_{\mathrm{Au}} - \varrho_{\mathrm{Ag}}}\,.$$

Objem striebra v tejto minci môžeme dopočítať zo vzťahu

$$V_{2,\mathrm{Ag}} = V_2 - V_{2,\mathrm{Au}}\,.$$

Akonáhle poznáme objemy zlata a striebra v jednotlivých minciach, dopočítanie hmotnosti už nebude robiť problém. Použitím známeho vzorca $m = \varrho V$ dostávame. že $m_{1,\mathrm{Au}} = 3{,}0\,\mathrm{g}$, $m_{1,\mathrm{Ag}} = 0{,}0\,\mathrm{g}$, $m_{2,\mathrm{Au}} = 2{,}2\,\mathrm{g}$, $m_{3,\mathrm{Ag}} = 5{,}4\,\mathrm{g}$. Zo známych hmotností dopočítame hmotnostné percentá. Dostaneme, že v prvej minci sa nachádza 100 % zlata, zatiaľ čo vo väčšej sa nachádza približne 29 % zlata a 71 % striebra.

Bonus

V našom riešení sme použili predpoklad, že menšia minca je celá zo zlata. Aby však boli splnené podmienky zo zadania úlohy, stačí, aby hustota malej mince spĺňala podmienku $\varrho_{\mathrm{Hg}} < \varrho_1 \leq \varrho_{\mathrm{Au}}$. Pokiaľ teda hustota menšej mince túto podmienku spĺňa, vieme zo vzťahu

$$V_{1,\mathrm{Au}} = V_1 \frac{\varrho_1 - \varrho_{\mathrm{Ag}}}{\varrho_{\mathrm{Au}} - \varrho_{\mathrm{Ag}}} \,,$$

ktorý sme dostali analogickým postupom, ako je uvedený vyššie, vypočítať objem zlata v menšej minci. Následne vieme zo vzťahu

$$V_{1,\mathrm{Ag}} = V_1 - V_{1,\mathrm{Au}}$$

dopočítať objem striebra v menšej minci. Zo vzťahu (2) si vieme dopočítať hustotu väčšej mince. Počítanie hmotností a hmotnostných percent je už analogické postupu uvedenému vyššie.

Interval hmotnostných percent striebra v menšej minci je teda $[0; 52{,}4)\ \%$. Hmotnostné percento zlata v menšej minci už pre danú hodnotu hmotnostných percent striebra ľahko dopočítame.

Lýdia Janitorová
janitorova@fykos.cz