

## Úvodem

Milí řešitelé FYKOSu,

pomalu nám začíná jaro a s ním přichází i pátá série letošního ročníku. V tradiční osmici úloh na Vás čekají rozličné problémy z oblasti mechaniky, termodynamiky i elektromagnetismu, v problémové úloze zavítáme do tunelů metra a při řešení experimentální úlohy si můžete udělat romantický večer ve městě s Vaším přítelem/přítelkyní foťákem. V seriálu zabrousíme již do vysokoškolské termodynamiky, mnohokrát padne výraz termodynamický potenciál. Také nezapomeňte, že letní blok FYKOSích přednášek je již v plném proudu – témata naleznete na našem webu. A na začátku dubna samozřejmě přijde již dlouho očekávané soustředění. Ve chvíli, kdy se Vám tato brožurka dostane do rukou, již pravděpodobně obdržíte legendovou pozvánku. Přejeme Vám mnoho zábavy při jejím luštění a také spoustu příjemných chvil strávených nad našimi úlohami.

*Organizátoři*



Zadání V. série



Termín uploadu: 12. 4. 2016 23.59

Termín odeslání: 11. 4. 2016

### Úloha V.1 ... už to teče

2 body

Tenký drát s odporem  $R = 100 \text{ m}\Omega$  a délkou  $l = 1 \text{ m}$ , který je připojen ke zdroji stejnosměrného napětí  $U = 3 \text{ V}$ , obsahuje ve svém objemu  $N = 10^{22}$  volných elektronů, kterými přispívá k toku elektrického proudu. Určete, jak velkou průměrnou (přesněji střední) rychlostí se elektrony v drátu pohybují.

### Úloha V.2 ... mnohočasticová

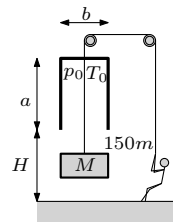
2 body

Mějme nádobu, která je pomyslně rozdělena na dvě shodné disjunktní oblasti A a B. V nádobě je  $n$  částic, z nichž se každá nachází s pravděpodobností 50 % v části A a s pravděpodobností 50 % v části B. Určete, s jakou pravděpodobností bude v části A  $n_A = 0,6n$ , resp.  $n_A = 1 + n/2$  částic. Řešte pro  $n = 10$  a  $n = N_A$ , kde  $N_A \doteq 6 \cdot 10^{23}$  je Avogadrova konstanta.

### Úloha V.3 ... egyptská brána

3 body

Ve starověkém Egyptu uměli vyrobit bránu, ale ještě neznali mříže, tak brány zavírali nilany (vápencovými kameny). Na obrázku vidíte 150 otroků o hmotnosti  $m = 60 \text{ kg}$ , kteří právě velmi pomalu otevírají bránu zavřenou nilanem o hmotnosti  $M = 8 \text{ t}$ . Nilan přesně (vzduchotěsně) pasuje do konstrukce nad bránou ve tvaru kvádra, která má vnitřní rozměry  $a = 3 \text{ m}$ ,  $b = 0,5 \text{ m}$  a  $c = 3 \text{ m}$ . Uvnitř konstrukce je na počátku tlak  $p_0 = 100 \text{ kPa}$  a teplota  $T_0 = 300 \text{ K}$  a je umístěna ve výšce  $H = 3 \text{ m}$ . Určete, jak vysoko jsou otroci schopni vlastní vahou nilan zdvihnout, jestliže se teplota vzduchu nemění.



**Úloha V.4 ... bezpečná jízda**

4 body

Máme auto, které se blíží kolmo ke zdi. Řidič, který v autě jede, by se ale chtěl přibližovat ke zdi bezpečně. Jaký by muselo mít auto průběh rychlosti, aby vzdálenost od auta ke zdi v každý okamžik odpovídala dráze, kterou by auto s okamžitou rychlostí v té chvíli urazilo za  $T = 2\text{ s}$ ?

**Úloha V.5 ... Rolling Stones**

5 bodů

Na nakloněné rovině stojí koule s nehomogenním rozložením hustoty. Známe úhel sklonu nakloněné roviny  $\alpha$ , poloměr koule  $R$  a vzdálenost  $t$  těžiště koule od jejího středu. Pokud si označíme střed koule  $S$ , bod dotyku koule s rovinou  $D$  a těžiště koule  $T$ , pak definujeme úhel  $\varphi_0 = \angle DST$  jako úhel před začátkem pohybu. Těžiště se navíc nachází v rovině určené úsečkou  $DS$  (normálou k rovině) a směrem z kopce dolů. V závislosti na těchto parametrech podrobně rozeberte, jak se bude dál vyvíjet pohybový stav koule. Koule na rovině neprokluzuje.

**Úloha V.P ... metrová**

5 bodů

Jak všichni víme, v jeskyních střední Evropy je docela zima, okolo  $4^\circ\text{C}$ . Proč je v metru docela teplo celý rok? Uvolňuje se více tepla z přítomných lidí, nebo spíše z technického zázemí?

**Úloha V.E ... fotografická**

7 bodů

Pomocí digitálního fotoaparátu změřte frekvenci střídavého proudu v síti. Postačí i chytrý telefon s vhodnou aplikací, která umožní nastavit přesnou hodnotu expozičního času.

**Úloha V.S ... přirozeně proměnná**

6 bodů

a) Použijte vztah pro entropii ideálního plynu  $S(U, V, N)$  z řešení třetí seriálové úlohy

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2} nR \ln \left( \frac{U V^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R n^{\kappa}} \right) + nR s_0.$$

a vztah pro změnu entropie

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

a vypočítejte chemický potenciál jako funkci  $U$ ,  $V$  a  $N$ . Upravte dále na funkci  $T$ ,  $p$  a  $N$ .

*Pomůcka:* Přečtěte si o derivacích a malých změnách v druhém díle seriálu. Nyní by už mělo být zřejmější, že koeficienty jako  $1/T$  před  $dU$  spočítáte jako parciální derivaci  $S(U, V, N)$  podle  $U$ . Nezapomeňte na užitečný vztah  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$  a že  $n = N/N_A$ .

*Bonus:* Vyjádřete tímto způsobem i teplotu a tlak jako funkce  $U$ ,  $V$  a  $N$ . Eliminujte závislost tlaku na  $U$ , abyste dostali stavovou rovnici.

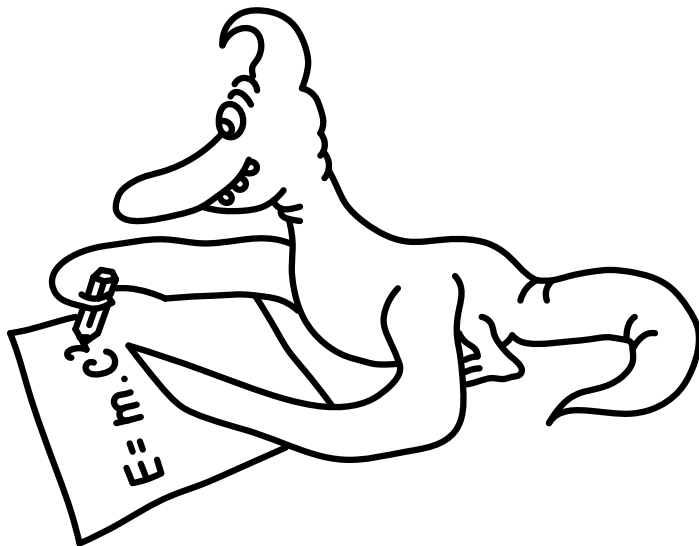
b) Je chemický potenciál ideálního plynu kladný, nebo záporný ( $s_0$  považujte za zanedbatelné)?

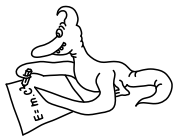
- c) Co se bude dít s plynem v pístu, pokud je plyn napojený na rezervoár s teplotou  $T_r$ ? Píst se může volně pohybovat a z druhé strany na něj nic nepůsobí. Popište, co se bude dít, pokud dovolíme jen kvazistatické procesy. Kolik práce takto dokážeme extrahovat? Platí, že se takto minimalizuje volná energie?

*Pomůcka:* Na výpočet práce se vám může hodit vztah

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

- d) Entalpii jsme definovali jako  $H = U + pV$ , Gibbsovu energii jako  $G = U - TS + pV$ . Jaké jsou přirozené proměnné těchto potenciálů? Jaké termodynamické veličiny dostaneme derivacemi těchto potenciálů podle svých přirozených proměnných?
- e) Vypočítejte změnu grandkanonického potenciálu  $d\Omega$  z jeho definičního vztahu  $\Omega = F - \mu N$ .





## Řešení IV. série

## Úloha IV.1 ... kofolová

2 body; průměr 1,23; řešilo 60 studentů

Mějme kofolu s energetickou hodnotou  $Q_k = 1360 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  a teplotou  $t_k = 24^\circ\text{C}$  a kofolu bez cukru s energetickou hodnotou  $Q_{\text{bez}} = 14,4 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  a teplotou  $t_{\text{bez}} = 4^\circ\text{C}$ . Pokud předpokládáme, že v jiných vlastnostech se kofoly od vody neliší, při jaké teplotě můžeme pít směs těchto kapalin tak, aby byla celková získaná energie nulová? *Filip chcel chudnúť pitím kofoly.*

Směs obou kofol má energetickou hodnotu  $Q_{\text{kof}} = Q_k p + Q_{\text{bez}} q$ , kde  $p, q$  jsou kladná reálná čísla,  $p : q$  je hmotnostní poměr normální kofoly ke kofole bez cukru ve výsledné směsi a  $p + q = 1$ . Taktéž bude mít teplotu  $t_{\text{kof}} = t_k p + t_{\text{bez}} q$ , neboť obě kofoly mají stejné fyzikální vlastnosti a výsledná teplota je pouhým aritmetickým průměrem.

Teplota uvnitř lidského těla je  $t_0 \approx 37^\circ\text{C}$ . Když směs o teplotě  $t_{\text{kof}}$  vypijeme, ohřeje se uvnitř našeho těla na jeho teplotu, tedy jí musíme nějakou energii odevzdat. Předpokládejme, že hmotnost vypité kofoly je mnohem menší než hmotnost lidského těla, tedy změna teploty těla bude zanedbatelná. Jeden kilogram kofoly přijme při ohřátí teplo  $Q_{\text{oh}} = c_{\text{kof}}(t_0 - t_{\text{kof}})$ , přičemž  $c_{\text{kof}} = c_{\text{voda}} = 4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

Abyste byla celková přijatá energie rovna nule, musí platit  $Q_{\text{oh}} = Q_{\text{kof}}$ , tedy

$$c_{\text{kof}}(t_0 - t_k p - t_{\text{bez}} q) = Q_k p + Q_{\text{bez}} q.$$

Upravíme a s podmínkou  $p + q = 1$  dostaneme

$$p = \frac{c_{\text{kof}} t_0 - Q_{\text{bez}} - c_{\text{kof}} t_{\text{bez}}}{Q_k + c_{\text{kof}} t_k - Q_{\text{bez}} - c_{\text{kof}} t_{\text{bez}}},$$

$$q = \frac{Q_k + c_{\text{kof}} t_k - c_{\text{kof}} t_0}{Q_k + c_{\text{kof}} t_k - Q_{\text{bez}} - c_{\text{kof}} t_{\text{bez}}}.$$

Hmotnostní zlomky vynásobíme teplotami  $t_k, t_{\text{bez}}$  a vypočteme

$$t_{\text{kof}} = \frac{t_k (c_{\text{kof}} t_0 - Q_{\text{bez}} - c_{\text{kof}} t_{\text{bez}}) + t_{\text{bez}} (Q_k + c_{\text{kof}} t_k - c_{\text{kof}} t_0)}{Q_k + c_{\text{kof}} t_k - Q_{\text{bez}} - c_{\text{kof}} t_{\text{bez}}}$$

$$= \frac{c_{\text{kof}} t_0 (t_k - t_{\text{bez}}) + Q_k t_{\text{bez}} - Q_{\text{bez}} t_k}{c_{\text{kof}} (t_k - t_{\text{bez}}) + Q_k - Q_{\text{bez}}}$$

Na kalkulačce dosadíme známé hodnoty (energetické hodnoty v  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ , teplotu v  $^\circ\text{C}$  a měrnou tepelnou kapacitu v  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ) a získáme

$$t_{\text{kof}} \doteq 5,7^\circ\text{C}.$$

Je zřejmé, že tedy budeme pít směs, kde bude převážně kofola bez cukru. Pokud by nás zajímal i přesný poměr, snadno nalezneme  $q = 0,914$ .

Markéta Calábková  
calabkovam@fykos.cz

**Úloha IV.2 ... mozek v mikrovlnce**

2 body; průměr 1,23; řešilo 53 studentů

*Jak daleko musí být člověk od BTS (základnové převodní stanice), aby působení jejího vysílání na mozek bylo srovnatelné s vysíláním mobilu přímo u hlavy? Předpokládejte, že BTS vysílá rovnoměrně do poloprostoru a má vysílací výkon 400 W. Vysílací výkon mobilu je 1 W.*

*Napadlo Marka N. při pohledu na internetovou diskusi.*

Keďže mozog má konštantnú veľkosť, tak našou úlohou je nájsť takú vzdialenosť hlavy od BTS vysielateľa, pri ktorej je rovnaká intenzita žiarenia, ako je intenzita žiarenia v hlave od mobilu, keď držíme mobil pri uchu. Intenzita žiarenia (zvyčajne značená ako  $I$ ) je veličina, ktorá hovorí, aký veľký výkon žiarenia pripadá na jednotkovú plochu. Napríklad na meter štvorcový povrchu Zeme na rovníku na poludnie dopadá za sekundu žiarenie nesúce 1360 kJ. Teda možno hovoriť o intenzite žiarenia  $I \approx 1360 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Intenzita žiarenia sa dá zo vzdialenosti od vysielateľa  $r$  a výkonu vysielateľa  $P$  vypočítať z predpokladu, že všetko žiarenie sa rovnomerne rozloží na povrch gule polomeru  $r$ . Plocha gule polomeru  $r$  je  $S = 4\pi r^2$ . Z toho vyplýva, že intenzita žiarenia vo vzdialenosti  $r$  bude

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Odhadnime vzdialenosť mozgu od mobilu ako  $r_m \approx 5 \text{ cm}$ , výkon mobilu označme ako  $P_m = 1 \text{ W}$ , neznámu vzdialenosť mozgu od BTS vysielateľa ako  $r_v$  a výkon vysielateľa ako  $P_v = 2P = 800 \text{ W}$ . Keďže v zadaní sa píše o vysielaní do polpriestoru, za výkon vysielateľa vysielajúceho do priestoru považujeme dvojnásobok výkonu vysielateľa vysielajúceho do polpriestoru. Inak povedané, aby vysielateľ vysielal do celého priestoru s rovnakou intenzitou ako teraz do polpriestoru, musel by mať celkový výkon dvojnásobný. Potom z predpokladu rovnosti intenzít žiarenia dostaneme

$$\begin{aligned} I_m &= I_v, \\ \frac{P_m}{4\pi r_m^2} &= \frac{P_v}{4\pi r_v^2}, \\ r_v &= r_m \sqrt{\frac{P_v}{P_m}} \doteq 1,4 \text{ m}. \end{aligned}$$

Teda, ak sa nachádzame zhruba 1,4 m od vysielateľa, vysielateľ na náš mozog pôsobí približne rovnako ako pri telefonovaní.

**Samuel Kočíšćák**

samo@fykos.cz

**Úloha IV.3 ... šetřeme lesy**

3 body; průměr 2,58; řešilo 65 studentů

*Máme roli toaletního papíru o poloměru  $R = 8 \text{ cm}$  s dutou částí o poloměru  $r = 2 \text{ cm}$ . Každá vrstva namotaného papíru má tloušťku  $d = 200 \mu\text{m}$  a vrstvy na sebe dokonale přiléhají. O kolik útržků více v takovéto roli máme, pokud má jeden útržek délku  $l_1 = 9 \text{ cm}$ , než když má jeden útržek délku  $l_2 = 13 \text{ cm}$ ? Jako součást řešení vyžadujeme odhad chyby použité aproximace.*

Bonus: Vypočtete přesnou délku spirály, kterou papír vytváří.

*Kiki je sice potvora, ale tohle by přece jen do Náboje nedala.*

Celou úlohu lze zjednodušit na plošný problém, protože délka navinutého papíru na šířce role nezávisí. Máme tedy mezikružší do kterého navijíme dlouhý obdélník o stejné ploše, známé tloušťce a neznámé délce. Porovnáním ploch dostaneme

$$\begin{aligned} S &= \pi(R^2 - r^2), \quad S = ld, \\ \Rightarrow \quad ld &= \pi(R^2 - r^2), \\ l &= \frac{\pi(R^2 - r^2)}{d} \doteq 9420 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Vydělíme-li toto délkou útržku, dostaneme počet útržků.

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_1}, \\ n_2 &= \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_2}. \end{aligned}$$

Rozdíl je pak

$$\Delta n = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_1} - \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_2} = \pi(R^2 - r^2) \frac{l_2 - l_1}{dl_1 l_2}.$$

Dosažením dostaneme

$$\Delta n \doteq 322.$$

### *Odhad chyby*

Největší chyba je způsobena tím, že nevíme, kde přesně je měřený průměr vůči konci papíru. Naše metoda vyžaduje měření v půlce poslední vrstvy, aby byla přesná. Proto můžeme maximální chybu odhadnout na polovinu vnějšího obvodu, tedy přibližně na 25 cm. Ostatní chyby, jako jsou nepřesnosti způsobené nepřesně přiléhajícím papírem na začátku role nebo změnou obsahu při přechodu od obdélníku ke spirále, jsou řádově menší, a proto je lze zanedbat.

### *Složitější řešení*

Pokud počítáme délku křivky  $s$  v polárních souřadnicích  $(r, \varphi)$ , víme, že

$$s = \int \sqrt{r(\varphi)^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Naši spirálu vyjádříme v polárních souřadnicích

$$r(\varphi) = \frac{\varphi d}{2\pi}; \quad \varphi \in \left\langle \frac{2\pi r}{d}; \frac{2\pi R}{d} \right\rangle.$$

Délka spirály je potom

$$\begin{aligned} l_i &= \int_{2\pi r/d}^{2\pi R/d} \sqrt{\left(\frac{\varphi d}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2} d\varphi = \\ &= \left[ \frac{d}{4\pi} \left( \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \ln \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} \right) \right]_{2\pi r/d}^{2\pi R/d}. \end{aligned}$$

Dosadíme a zjistíme, že  $l_i \doteq 9420$  cm, což se při použitém zaokrouhlení neliší od výsledku přes obsahy. To není překvapivé – platí  $R^2 \gg d^2$ , a tedy  $(R/d)^2 \gg 1$ . O řád hůře platí stejné nerovnosti i pro  $r$ . Ve výsledném tvaru integrálu pro můžeme zcela vynechat člen s logaritmem, zanedbat jedničku v odmocnině a psát

$$l_i \approx \frac{d}{4\pi} \left( \frac{2\pi R}{d} \right)^2 - \frac{d}{4\pi} \left( \frac{2\pi r}{d} \right)^2 = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{d} = l.$$

Již v předpisu integrálu si lze všimnout, že aproximací  $R^2 \gg d^2$  odebereme člen, který bychom mohli nazvat „spirálním“, tj. ten člen, který zahrnuje odchylku délky spirály od délky soustředných kružnic. Rozdíl

$$l_i - l = 0,004 \text{ cm}$$

je daleko za poslední platnou číslicí, na kterou jsme zaokrouhlili. Největší chyba bude způsobena stejným mechanismem jako předtím, neboť stále uvažujeme, že poloměr byl změřen v koncovém bodě navíjení. Také záleží na tom, zda byl poloměr určen dělením průměru, nebo přímým měřením. Závěrem tedy můžeme pouze zopakovat, že největší chyba není dána aproximací při výpočtech, ale neznalostí přesného poloměru.

**Mikuláš Matoušek**  
mikulas@fykos.cz

#### Úloha IV.4 ... bubliny znovu spojeny! 4 body; průměr 2,45; řešilo 56 studentů

*Kolik nejméně stejně velkých mýdlových bublinek o poloměru  $r$  se musí spojit, aby vytvořily jednu bublinu, která má poloměr alespoň  $3r$ ? Uvažujte, že vzduch v bublinách má stále stejnou teplotu.*

*Karel se díval na bublifuk.*

Aby byla bublina v rovnováze, musí se vyrovnat kapilární tlak mýdlové membrány  $p_k$ , atmosférický tlak  $p_a$  a tlak plynu  $p$  uvnitř, tedy musí platit

$$p = p_k + p_a.$$

Kapilární tlak mýdlové membrány je

$$p_k = \frac{4\sigma}{r},$$

kde  $\sigma$  je povrchové napětí membrány a  $r$  je poloměr bubliny. Dále uvažujeme zjednodušující předpoklad, že vzduch v bublině se chová jako ideální plyn. Ten má stavovou rovnici

$$pV = nRT,$$

kde  $p$  je tlak plynu,  $V$  jeho objem,  $n$  látkové množství,  $R$  univerzální plynová konstanta a  $T$  teplota. Pro jednu malou bublinu o poloměru  $r$  tedy z rovnosti tlaků plyne

$$\begin{aligned} \left( \frac{4\sigma}{r} + p_a \right) V_1 &= n_1 RT, \\ \left( \frac{4\sigma}{r} + p_a \right) \frac{4}{3} \pi r^3 &= n_1 RT, \\ n_1 &= (4\sigma + p_a r) \frac{4\pi r^2}{3RT}, \end{aligned}$$

kde jsme v druhém kroku použili fakt, že bublina je kulová. Obdobně získáme látkové množství ve velké bublině o poloměru  $3r$

$$n_2 = (4\sigma + 3p_a r) \frac{4\pi(3r)^2}{3RT}.$$

Nyní podílem získáme

$$\frac{n_2}{n_1} = 9 \frac{4\sigma + 3p_a r}{4\sigma + p_a r} \stackrel{\text{def}}{=} f(r),$$

což je lineární lomená funkce. Protože  $\sigma$  i  $p_a$  mají kladnou hodnotu, je funkce pro  $r \in \langle 0, +\infty \rangle$  rostoucí,  $f(0) = 9$  a  $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = 27$ . Potřebujeme tedy něco mezi 9 a 27 bublinami v závislosti na okolním tlaku, povrchovém napětí a poloměru bublin.

Nakonec si vypočítáme potřebný počet pro běžné hodnoty. Nechť atmosférický tlak je standardních 101 kPa, povrchové napětí mýdlové membrány<sup>1</sup> 25 mN·m<sup>-1</sup> a poloměr malých bublin 1 cm. Potřebný počet pak je 27. Z monotonie  $f(r)$  je vidět, že pro větší poloměr bublin budeme tím spíš v tomto limitním případě.

### Komentáře k došlým řešením

Mnoho z vás uvažovalo, že se musí zachovávat celkový objem bublin. V tomto případě to sice platí, protože je děj dle zadání izotermický a zároveň lze zanedbat změnu tlaku, nicméně jde o netriviální výsledek vzešlý až z výpočtu výše. Zachování objemu lze obecně uvažovat u nestlačitelných látek, nikoliv však u plynů. Co se ale musí zachovávat je celkové látkové množství plynu, protože zde neprobíhá žádná chemická reakce a jde o uzavřený systém.

*Lukáš Tímko*  
lukast@fykos.cz

### Úloha IV.5 ... skluzavka

5 bodů; průměr 2,79; řešilo 38 studentů

Na vodorovné ploše jsou rovnoběžně položeny dva stejné kvádry o hmotnosti  $m$  a délce  $l$ . Vzdálenost bližších stěn těchto kvádrů je  $2x_0$ . Mezi kvádry začneme lít vodu objemovým tokem  $Q$ . Na krajích těchto kvádrů jsou mantinely zabraňující odtékání vody z prostoru mezi kvádry. Statický koeficient tření mezi kvádrem a podložkou je  $f_0$  a dynamický  $f$ . Tření mezi kvádry a mantinely neuvažujte. Jaká je podmínka na  $f_0$ , aby se kvádry vůbec nerozpochovaly? V případě, kdy je  $f_0$  dostatečně malé, vypočítejte závislost zrychlení kvádrů na jejich poloze a vzdálenost, ve které kvádry zastaví.

Veškerý pohyb vody považujeme za dostatečně pomalý, takže v ní nevznikají žádné vlny ani víry, nezahřívá se třením a ani sama nemá žádnou kinetickou energii. Protože je tedy  $i$   $Q$  malé, můžete uvažovat, že přilévání další vody po rozpochování kvádrů nemá na jejich pohyb vliv. Bonus: Najděte podmínku pro překlopení kvádrů.

*Kubovi se zdálo o plavání v divném bazénu.*

První věc, co se hodí zmínit, je, že situace je symetrická na obě strany. Proto budeme vyšetřovat pouze pohyb jednoho kvádrů a ten druhý se bude pohybovat stejně, tedy v každém okamžiku bude mít stejný (s opačným znaménkem) polohový vektor, rychlost i zrychlení.

Na kvádry působí tíhová síla, třecí síla a tlaková síla od vody. Nejprve spočítáme, jak je velká tlaková síla  $F_p$ , když je mezi kvádry vody do výšky  $h$ . Označme  $dy$  tloušťku tenké vrstvy vody

<sup>1</sup>[http://physics.about.com/od/physicsexperiments/a/surfacetension\\_5.htm](http://physics.about.com/od/physicsexperiments/a/surfacetension_5.htm)



v hloubce  $y$ . V této hloubce je hydrostatický tlak o velikosti  $p = y\varrho g$  a ten působí na element plochy kvádrů o velikosti  $dS = ld y$ . Zintegrujme působící sílu přes celou výšku vody.

$$\int_0^F dF = \int_0^h y\varrho g l dy,$$

$$F = \varrho g l \frac{h^2}{2}.$$

Ke stejnému výsledku se lze dostat tak, že hydrostatický tlak lineárně roste s hloubkou  $y$ , a tak celkový průměrný tlak na kvádr bude polovina maximálního tlaku v hloubce  $h$ .

Zřejmě maximální tlak na kvádr nastane, když bude celý prostor mezi kvádry vyplněn vodou. Pokud se ani v tomto okamžiku kvádry nerozjedou, pak už se nerozjedou vůbec. Označme výšku kvádrů  $H$ , pak podmínka, aby se kvádry nerozpochoybovaly, vypadá následovně

$$\frac{1}{2}\varrho g l H^2 < m g f_0,$$

$$f_0 > \frac{\varrho l H^2}{2m}.$$

Dále předpokládejme, že  $f_0$  je nižší. V okamžiku, kdy se kvádry začnou pohybovat, nastává rovnost mezi silou tlakovou a silou třecí. Odtud můžeme spočítat výšku hladiny vody v tomto okamžiku,

$$h_0 = \sqrt{\frac{2m f_0}{\varrho l}}.$$

Podle zadání je vliv přilévání vody na pohyb zanedbatelný. To je ekvivalentní tomu, že se od tohoto okamžiku už nepřilévá další voda. Zachovává se tedy objem vody mezi kvádry. Voda bude mít v tomto hydrostatickém modelu vodorovnou hladinu<sup>2</sup>, proto píšeme

$$V = 2x l h = 2x_0 l h_0 = 2x_0 l \sqrt{\frac{2m f_0}{\varrho l}},$$

$$h = \frac{x_0}{x} \sqrt{\frac{2m f_0}{\varrho l}},$$

kde přirozeně používáme index 0 pro počáteční hodnoty. Pokud spočítáme sílu, kterou působí voda na kvádr jako tlakovou sílu od přilehlé vrstvy vody (svislé vrstvy), nemusí nás zajímat, co se děje se zbytkem vody a jak tam působí síly. Celkovou sílu působící na kvádr v libovolném okamžiku během pohybu můžeme spočítat jako

$$F = \frac{1}{2}\varrho g l h^2 - m g f = m g \left( \frac{f_0 x_0^2}{x^2} - f \right),$$

$$a = \frac{F}{m} = g \left( \frac{f_0 x_0^2}{x^2} - f \right),$$

<sup>2</sup> Toto platí jen díky tomu, že zanedbáváme kinetickou energii vody, což znamená, že je rychlost vody celou dobu nulová, a tedy i zrychlení. Ve skutečnosti se však i voda musí pohybovat se zrychlením, jinak by jí kvádr ujel. Pokud si rozdělíme vodu na svislé plátky a napíšeme si pohybové rovnice pro tyto plátky, zjistíme, že jediná působící síla je tlaková od sousedních plátek. Aby bylo zrychlení nenulové (kladné), musí výška vody klesat se vzdáleností od středu. To znamená, že u kvádrů bude hladina vody nejnižší, a bude na něj působit síla jiná, než jakou uvažujeme v našem modelu.

kde jsme rovnou spočetli i zrychlení kvádrů v závislosti na jeho poloze.

Nyní vyšetřujeme, kdy kvádr zastaví. První věc, co by mohla někoho napadnout, je, že zastaví, když se síly vyrovnají. Jenže v ten okamžik je pouze zrychlení nulové, ale kvádr má stále nějakou rychlost (dokonce svou maximální rychlost).

Asi nejspolehlivější a nejjednodušší cesta je přes energii.<sup>3</sup> Práce, kterou vykoná síla  $F$  (vykonává voda, ale část energie se disipuje kvůli tření), tedy  $\int F dx$ , je rovna kinetické energii kvádrů. Když kvádr zastaví, bude mít nulovou kinetickou energii. Máme tedy rovnici

$$0 = \int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x mg \left( \frac{f_0 x_0^2}{x^2} - f \right) dx = mg \left( f_0 x_0^2 \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \right) - f(x - x_0) \right),$$

$$f_0 x_0^2 \frac{x - x_0}{x x_0} = f(x - x_0),$$

$$x = x_0 \frac{f_0}{f}.$$

Rozeberme si, co jsme to vlastně získali. Předně je koeficient statického tření vyšší než dynamického, proto se opravdu kvádry rozjedou. Pokud by se koeficienty rovnaly, což je také možné, je třeba si uvědomit, že jsme počítali, kde se kvádr zastaví, když nebudeme přilévat vodu. Pokud bychom ji stále pomalu přilévali, kvádr by se trochu rozjel, ale vzápětí by opět zastavil, protože by hladina klesla zpět pod kritickou výšku. Takže by se kvádr pozvolna odsouval dál, ale rychlost by měl neustále prakticky nulovou. Pro tento limitní případ náš model nefunguje.

### Bonus

Vedle síly působí voda na kvádr i momentem síly, v analogii s předchozím zde působí třecí a tíhový moment. Vztáhněme veškeré momenty vzhledem k ose procházející vnější spodní hranou kvádrů, tedy tou hranou, kolem které hrozí překlopení. Vůči této ose má třecí síla nulový moment. Když označíme šířku kvádrů  $b$ , působí na kvádr tíhová síla momentem o velikosti  $M_G = mgb/2$ . Moment tlakové síly si budeme muset zintegrovat.<sup>4</sup> Využijme toho, že už máme vyjádření pro element síly a pouze ho vynásobíme příslušným ramenem elementu síly, čímž získáme element momentu síly

$$dM_P = (h - y)dF = (h - y)\rho g l dy,$$

$$M_P = \int_0^{M_P} dM_P = \int_0^h (h - y)\rho g l dy = \frac{1}{6}\rho g l h^3.$$

Pokud moment tlakové síly převyšuje moment tíhové síly, kvádr se nadzdvihne a začne na něj působit ještě moment vztlakové síly, a navíc se i rameno tíhové síly bude zmenšovat, a tak už se kvádr převrátí úplně. Krom tohoto efektu však vztlak nadlehčí kvádr, a tím sníží maximální

<sup>3</sup> Stejně tak bychom mohli řešit diferenciální rovnici  $a = g(f_0 x_0^2/x^2 - f)$  s okrajovými podmínkami  $v(x_0) = v(x_1) = 0$ . K jednoduchému řešení této rovnice se využije trik  $a = dv/dt = dv/dx \cdot dx/dt = dv/dx \cdot v$ , kterým převedeme rovnici na rovnici prvního řádu, navíc separovatelnou.

<sup>4</sup> Někdo si mohl spočítat působíště tlakové síly a pak ho vynásobit výslednou silou, ale působíště se stejně počítá jako poloha, kde by musela výsledná síla působit, aby měla stejný moment síly jako ten, který na těleso opravdu působí. (Síla působí ve výšce  $h/3$ .)

třetí sílu, a voda kvádr pravděpodobně odnese. To už je ale mnohem složitější problém než naše úloha.

Podmínka pro překlopení kvádru tedy je, že tlakový moment převyší tíhový alespoň v okamžiku, kdy je ještě kvádr celý na zemi. To nastane když

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} \rho g l h^3 &= \frac{1}{2} m g b, \\ h^3 &= \frac{3mb}{\rho l},\end{aligned}$$

tedy hladina vody se musí dostat nad určitou hranici. To se určitě nestane, pokud bude výška kvádrů nižší než tato hranice, tedy pokud bude splněna podmínka

$$H^3 > \frac{3mb}{\rho l}.$$

Porušení této podmínky však stále nezaručí, že se kvádr převrátí. Pokud se rozjede dříve, než se hladina vody dostane do výšky  $\sqrt[3]{3mb/\rho l}$ , bude už hladina vody jen klesat – je tedy třeba, aby při rozjezdu byla výška hladiny vyšší než tato mez. V okamžiku rozjezdu platí  $h^2 = 2mf_0/\rho l$ . Po dosazení za  $h$  do podmínky pro překlopení kvádru dostáváme

$$\begin{aligned}\left(\frac{2mf_0}{\rho l}\right)^3 &> \left(\frac{3mb}{\rho l}\right)^2, \\ \frac{8mf_0^3}{9\rho lb^2} &> 1.\end{aligned}$$

Aby se tedy kvádr překlopil, musí být současně splněny dvě podmínky, které můžeme spojit do jedné řetězové nerovnosti  $H^3 > 3mb/\rho l > 27b^3/8f_0^3$ . Vidíme, že první a třetí člen můžeme odmocnit, z čehož získáme nutnou, ale ne postačující podmínku překlopení kvádru, a sice, že rameno tíhové síly musí být menší než  $f_0$ -násobek ramene tlakové síly.

**Jakub Dolejší**

krasnykuba@fykos.cz

## Úloha IV.P ... dietní věž

5 bodů; průměr 2,71; řešilo 38 studentů

*Jak vysoká věž by se dala postavit z hliníkových plechovok od dietního nápoje kolového typu?*

*Michal z <http://what-if.xkcd.com/88/>*

Pri stavaní veže z plechoviek musíme riešiť ako u každej stavby niekoľko problémov. Na prvý problém nás upozorní statik. Vežu ničím nelepieme a len staviame plechovky na seba, teda si musíme dávať pozor, aby sme ich stavali dokonale rovno. A hneď sa nám ozve ďalší odborník: a čo materiál? Veď hliník je celkom mäkký kov a na plechovky sa používa tenký plech. A potom aj miesto je dôležité. Kde budeme našu vežu stavať, ako ovplyvní stavbu počasie? Zafúka vietor a vežu nám zborí. Podme si teda rozobrať postupne všetky úskalia.

## Výška veže s ohľadom na materiál

Typy plechoviek sa od seba výrazne líšia. My sme zvolili väčšiu plechovku s objemom 0,5 l (predsa len chceme stavať vežu do výšky). Váha takej hliníkovej plechovky sa pohybuje okolo  $m_1 = 20$  g. Najskôr sa skúsme zamyslieť nad tým, čo sa deje, keď plechovku zatažíme. Isto ste niekedy skúšali stúpiť na plechovku a tak ju „zdemolovať“. Avšak sem-tam sa stalo, že ste sa postavili na plechovku a tá vás bez problémov uniesla. Ako to?

Ak si plechovku predstavíme ako homogénne medzivalčie, tak vás neprekvapí, že ak na vrchnú stenu budeme pôsobiť silou, tak sa všetká prenesie do podstavy a deformácia bude vo všetkých miestach rovnaká. Keď však napätie v materiáli prekročí medz pevnosti, materiál sa poškodí a naša veža padne. Medza pevnosti pre hliník je približne  $\sigma_{Al} \doteq 50$  MPa. Najslabšie miesto celej plechovky je bočná stena. Ak odhadneme<sup>5</sup> jej hrúbku ako  $t = 0,2$  mm a polomer plechovky na  $r = 3$  cm, dostávame približný prierez steny plechovky ako  $S = 2\pi r t$ . Po dosadení máme približný odhad  $S = 3,8 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>.

Takže už jednoducho spočítame, aké zataženie spôsobené hmotnosťou  $m$  znesie jedna plechovka:

$$\begin{aligned}\sigma_{Al} &= \frac{F_g}{S}, \\ \sigma_{Al} S &= F_g, \\ 2\pi r t \sigma_{Al} &= m g, \\ m &= \frac{2\pi \sigma_{Al} r t}{g}.\end{aligned}$$

Z čoho po dosadení dostávame  $m = 200$  kg. Prečo ale toto v praxi nefunguje stále? V prvom rade plechovka nie je úplne homogénna. Vyskytne sa slabé miesto, v dôsledku čoho rozloženie záťaže nebude rovnomerné a na steny plechovky budú pôsobiť aj sily nerovnoobežné zo stenou. Síce stena plechovky je odolná, keď na ňu pôsobíme pozdĺž steny, ale slabšia, keď pôsobíme kolmo na stenu. Tak poďme ešte spočítať, koľko by sme dokázali takých dokonalých plechoviek poukladať na seba. Jednoducho

$$n = \frac{m}{m_1}.$$

Z toho dostávame  $n = 10\,000$  ks, jednoducho si spočítame aj výšku, ktorá dosahuje  $h = 1\,800$  m pri výške plechovky  $h_1 = 18$  cm.

## Stabilita veže

Predpokladajme teda, že máme dokonalé homogénne plechovky a dokážeme postaviť 10 000 plechoviek na seba. Je nám jasné, že plechovky musíme ukladať s veľkou presnosťou. Aby nám takáto veža nespadla, musí platiť, že priemet ťažiska do roviny podstavy je stále „v podstave“. Ako bolo spomenuté, tak polomer podstavy je  $r = 3$  cm, a teda ťažisko sa nesmie vychýliť o viac ako polomer. Teda musíme plechovky ukladať s presnosťou  $\delta = 2r/n = 6 \cdot 10^{-7}$  m. Toto je iba extrémny prípad, ak by sme uvažovali pri každom uložení rovnakú systematickú asymetrickú chybu položenia. Reálne chyba skôr prislúcha náhodnému rozloženiu, približne gaussovskému. V prípade gaussovského rozdelenia by sme dostali chybu položenia o tri rády vyššiu, ale aj tak

<sup>5</sup>Informácie o použití hliníka vo výrobe plechoviek nájdete napríklad tu: <http://packaging.world-aluminium.org/benefits/lightweight.html>.

presnosť ostáva rádo vo desatinách milimetra, čo je pre obyčajnú plechovku a ruku človeka stále nedosiahnuteľný cieľ.

A čo keby sme mali dokonalé plechovky a dokonalý stroj na stavanie? Čo všetko by taká veža vydržala? Ako by pôsobili „veľkí nepriatelia stavieb“ ako silný vietor, zemetrasenie, tornádo, výbuch sopky, cunami, pád meteoritu, prelet veľkej čiernej diery v blízkosti našej veže. . .

Skoro každý z týchto scenárov sa dá previesť na problém, čo sa stane, keď nám do stavby fúka vietor. Predstavme si našu vežu tentokrát ako veľký dutý valec o polomere  $r = 3$  cm a výške  $h = 1800$  m. Predpokladajme, že vietor fúka v celej výške konštantnou rýchlosťou  $v$ .

Veža sa nám prevrhne, keď moment sily vetra bude väčší ako moment sily tiaže veže. Veža sa nám bude otáčať (padať) okolo hrany podstavy, teda aj voči nej budeme vzťahovať momenty síl. V tabuľkách si nájdeme súčiniteľ odporu, ktorý sa pre valec pohybuje okolo  $C = 0,5$ . Vietor, ktorý pôsobí na istú časť plochy veže o výške  $dh$ , nám spôsobí silou veľkosti  $d\mathbf{F}$  a momentom sily  $d\mathbf{M} = \mathbf{R} \times d\mathbf{F}$ . Využijeme Newtonov vzorec pre odpor vzduchu

$$F = \frac{1}{2} C \rho v^2 S,$$

kde  $\rho$  je hustota vzduchu,  $v$  rýchlosť vetra a  $S$  je prierez veže, v našom prípade  $S = 2rh$ . Ak chceme len diferenciál sily  $dF$  prislúchajúcej istej elementárnej ploche  $dS$ , tak platí

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{2} C \rho v^2 dS, \\ dF &= C \rho v^2 r dh. \end{aligned}$$

Ale pozor, táto sila pôsobí kolmo na plochu, nie na vektor  $\mathbf{R}$ . Teda potrebujeme vedieť jej určitý priemet. Zároveň si musíme uvedomiť, že naša veža je veľmi vysoká, presnejšie  $h \gg r$ , a pre veľké výšky platí

$$F \approx F_{\text{priemet}}, \quad R \approx h.$$

Potom môžeme spočítať aj veľkosť momentu sily ako

$$\begin{aligned} dM &= h C \rho v^2 r dh, \\ M &= \int_0^h h' C \rho v^2 r dh', \end{aligned}$$

lebo chyba spôsobená integráciou pri malých  $h'$  bude tiež malá.

$$\begin{aligned} M &= C \rho v^2 \int_0^h h' r dh', \\ M &= C r \rho v^2 \frac{1}{2} [(h')^2]_0^h, \\ M &= \frac{1}{2} C r \rho v^2 h^2. \end{aligned}$$

Moment, ktorý vytvára tiažová sila, spočítame ako

$$M = F_g r.$$

Potom z rovnosti momentov spočítame medznú podmienku rýchlosti vetra.

$$F_g r = \frac{1}{2} C_r \rho v^2 h^2,$$

$$m g = \frac{1}{2} C_q v^2 h^2.$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C_q h^2}}.$$

Po dosadení dostávame medznú rýchlosť  $v = 0,05 \text{ ms}^{-1}$ . Takže našu vežu zhodí aj „bezvetrie“. Na tomto mieste je nutné spomenúť, že pre malé rýchlosti nebude prúdenie turbulentné, ale laminárne, čo by náš odhad mierne zväčšilo.<sup>6</sup>

### A čo tak teroristi alebo neprajníci?

Určite, keď postavíte najvyššiu vežu z plechoviek, tak sa nájdú neprajníci, ktorý vám vašu vežu budú chcieť zbúrať.

Tak si predstavme nášho nepriateľa: ten príde k veži a bude sa ju snažiť zhodiť tým, že na ňu začne tlačiť.

Keď využijeme úvahu ako v predchádzajúcom prípade, tak môžeme povedať, že veža začne padať, keď moment sily od nášho nepriateľa bude väčší ako moment tiažovej sily. Predpokladáme, že nepriateľ je vysoký, a teda pôsobí na vežu vo výške  $v_n = 2 \text{ m}$  silou  $F_n$ .

$$F_g r = F_n h_n,$$

$$F_n = \frac{F_g r}{h_n}.$$

Po dosadení dostávame hodnotu sily  $F_n = 265 \text{ N}$ , z čoho jasne vidíme, že nepriateľ by nemal problém ju zbúrať len opretím sa o našu vežu. Nezabúdajte však, že plechovky považujeme za homogenný dutý valec, prítomnosť plošiek medzi plechovkami by silu ešte znížila.

A čo keby sa rozhodol, že by podkopol spodnú plechovku?

V prvom rade, ak takáto sila bude pôsobiť na stenu spodnej plechovky, tak veľmi isto nám spodnú plechovku zdemoluje a tá stratí svoju nosnosť a veža nám spadne. Rozumný a dostatočne presný fyzikálny model pre prípad bočnej deformácie je už náročné vytvoriť, ale sami isto viete, že plechovky sú v tomto ohľade veľmi „tvárne“.

*Michal Červeňák*

*miso@fykos.cz*

### Úloha IV.E ... trhni si!

8 bodů; průměr 6,00; řešilo 45 studentů

Změřte mez pevnosti kancelářského papíru v tahu. Ideálně použijte co nejméně potištěnou část brožurky, ve které vám přišlo zadání (pro tisk je využíván papír  $80 \text{ g}\cdot\text{m}^2$ ).

*Karel viděl příspěvek Vojty Žáka o měření s papírem na Veletrhu nápadů učitelů fyziky 20.*

<sup>6</sup>Hodnoty Reynoldsovo čísla pre náš prípad si môžete zistiť napríklad tu: [http://www.engineeringtoolbox.com/reynolds-number-d\\_237.html](http://www.engineeringtoolbox.com/reynolds-number-d_237.html).

Řešení experimentální úlohy bude součástí další brožurky a také ho naleznete v brzké době na webu. Za zpoždění se omlouváme.

*Oldřich Holcner*  
holcner@fykos.cz

### Úloha IV.S ... pracovní

6 bodů; průměr 3,67; řešilo 42 studentů

a) Z nerovnosti

$$\Delta S_{\text{tot}} \geq 0$$

ze seriálu vyjádřete  $W$  a odvoďte tak nerovnost pro práci

$$W \leq Q \left( 1 - \frac{T_C}{T_H} \right).$$

b) Vypočítejte účinnost Carnotova cyklu bez použití entropie.

Pomůcka: Napište čtyři rovnice spojující čtyři vrcholy Carnotova cyklu

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad p_2 V_2^\kappa = p_3 V_3^\kappa, \quad p_3 V_3 = p_4 V_4, \quad p_4 V_4^\kappa = p_1 V_1^\kappa$$

a vynásobte je všechny čtyři spolu. Po úpravě dostanete

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Dále stačí použít vzorec pro práci při izotermickém procesu: pokud jde proces z objemu  $V_A$  do  $V_B$ , práce vykonaná na plynu je

$$nRT \ln \frac{V_A}{V_B}.$$

Teď si už jen stačí uvědomit, že práce při izotermickém ději je rovna teplu (se správným znaménkem) a vypočítat získanou práci (vzpomeňte si, že adiabatické procesy nepřispívají) a odevzdané teplo. Jako řešení stačí doplnit detaily tohoto postupu.

c) Minule jste pracovali s  $pV$  a  $Tp$  diagramem. Provedte podobné cvičení s  $TS$  diagramem, tedy nakreslete do něj izotermický, izobarický, izochorický a adiabatický proces. Nakreslete do diagramu též cestu plynu v Carnotově cyklu a označte správně směr a vrcholy, aby souhlasily s obrázkem v seriálu.

d) V seriálu jsme zmínili, že někdy je třeba dávat pozor na přijaté a odevzdané teplo. Někdy se totiž to, zda teplo přijímáme anebo dáváme, mění během procesu. Jedním z příkladů je proces

$$p = p_0 e^{-\frac{V}{V_0}},$$

kde  $p_0$  a  $V_0$  jsou konstanty. Určete, pro jaké hodnoty  $V$  (při rozpínání) proudí teplo do plynu, a kdy z plynu.

Jančího účinnost je větší nebo rovna účinnosti Carnotova cyklu.

a) Vyjdíme teda zo vzťahu

$$\Delta S_{\text{tot}} = \frac{-Q}{T_{\text{H}}} + \frac{Q - W}{T_{\text{C}}}.$$

Vieme, že  $\Delta S_{\text{tot}} \geq 0$ , teda

$$\frac{-Q}{T_{\text{H}}} + \frac{Q - W}{T_{\text{C}}} \geq 0.$$

Prevedieme člen s  $W$  na druhú stranu

$$Q \left( \frac{1}{T_{\text{C}}} - \frac{1}{T_{\text{H}}} \right) \geq \frac{W}{T_{\text{C}}}$$

a vynásobíme kladným  $T_{\text{C}}$ , takže dostávame

$$W \leq Q \left( 1 - \frac{T_{\text{C}}}{T_{\text{H}}} \right).$$

b) Ak vynásobíme všetky tieto rovnice zo zadania, dostaneme

$$p_1 p_2 p_3 p_4 V_1 V_2^{\kappa} V_3 V_4^{\kappa} = p_1 p_2 p_3 p_4 V_2 V_3^{\kappa} V_4 V_1^{\kappa},$$

čo upravíme na

$$V_2^{\kappa-1} V_4^{\kappa-1} = V_1^{\kappa-1} V_3^{\kappa-1}$$

a ďalej na

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Vieme, že pri oboch adiabatických procesoch sa vôbec neprenáša teplo; keď teda uvažíme, že vnútorná energia sa nemení pri izotermických procesoch, zistíme, že práca pri prvom je rovná práci pri druhom, ale s opačným znamienkom. Do účinnosti teda tieto procesy neprispievajú (ale sú dôležité tým, že menia teplotu). Plyn teda naberie teplo  $Q_{\text{H}}$  pri prvom rozpínaní na teplote  $T_{\text{H}}$ : toto teplo spočítame ako opačnú prácu (pretože zmena vnútornej energie v tomto procese je nula)

$$Q_{\text{H}} = nRT_{\text{H}} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Znamienko je tu správne, pri rozpínaní plyn prijíma teplo a koná prácu (práca by bola so znamienkom mínus, bola by záporná). Rovnako spočítame aj teplo, ktoré plyn „dostane“ pri izotermickom stlačovaní na teplote  $T_{\text{C}}$ , čo je proces  $3 \rightarrow 4$ :

$$Q_{\text{C}} = nRT_{\text{C}} \ln \frac{V_4}{V_3} = -nRT_{\text{C}} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Tu nastáva kompresia, teda  $V_4 < V_3$  a dostaneme  $Q_{\text{C}} < 0$ , čo je správne. Zo zákona zachovania energie vieme spočítať získanú prácu ako rozdiel prijatého a odovzdaného tepla, s našimi znamienkami to bude

$$W = Q_{\text{H}} + Q_{\text{C}}.$$

Tu  $W$  je už extrahovaná práca (práca plynu by bola  $-W$ ). Účinnosť vypočítame ako pomer „užitočného a drahého“, teda

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{H}}} = 1 + \frac{Q_{\text{C}}}{Q_{\text{H}}} = 1 - \frac{nRT_{\text{C}} \ln \frac{V_2}{V_1}}{nRT_{\text{H}} \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_{\text{C}}}{T_{\text{H}}}.$$



- c) Izotermický a adiabatický (izoentropický) proces sú opäť veľmi jednoduché. Na izochorický proces budeme potrebovať vyjadrenie entropie z tretieho seriálu

$$S(T, V; n) = nR \ln \left( \frac{T^{s/2} V}{n} \right) + nR s_0.$$

Odtiaľ vyjadříme  $T(S)$ :

$$S = nR \ln \left( \frac{V}{n} \right) + nR s_0 + \frac{s}{2} nR \ln T,$$

osamostatníme  $\ln T$

$$\ln T = \frac{S}{\frac{s}{2} nR} - \frac{2}{s} s_0 - \frac{2}{s} \ln \left( \frac{V}{n} \right)$$

a zrušíme logaritmus

$$T = \left( \frac{V}{n} \right)^{-\frac{2}{s}} e^{-\frac{2}{s} s_0} e^{\frac{2S}{s nR}}.$$

Do grafu teda pri konštantnom objeme kreslíme exponenciály, pričom konštanta pred exponenciálou klesá s rastúcim objemom. Izobaru vyjadříme podobne, len najprv dosadíme za  $V$

$$S(T, p; n) = nR \ln \left( \frac{T^{s/2} RT}{p} \right) + nR s_0.$$

Podobným postupom ako pre izochorický proces dostaneme

$$T = \left( \frac{p}{R} \right)^{\frac{2}{s+2}} e^{-\frac{2}{s+2} s_0} e^{\frac{2S}{(s+2)nR}}.$$

Ide teda o menej strmú exponenciálnu závislosť, konštanta pred exponenciálou naopak rastie s tlakom. Všetky štyri procesy sú zakreslené do grafu a) na obrázku 1. Aby sme lepšie znázornili rozdiel týchto závislostí, nakreslíme izochorický a izobarický dej aj do  $[\log T]S$  diagramu, kde pôjde o priamky, viz graf c).

Carnotov cyklus začína na vysokej teplote. Odtiaľ izotermicky expanduje a jeho entropia sa zvyšuje. Ďalej adiabaticky expanduje ďalej, čím sa jeho teplota znižuje, po čom sa opäť v dvoch krokoch vráti späť. Spolu teda dostaneme obdĺžnik, ako na grafe b).

- d) To, či plyn teplo odovzdáva alebo prijíma, ľahko určíme podľa znamienka  $\delta Q = dU + pdV$ . Ak ešte vyjadříme  $dU = d\left(\frac{s}{2} pV\right) = \frac{s}{2} V dp + \frac{s}{2} p dV$ , môžeme písať

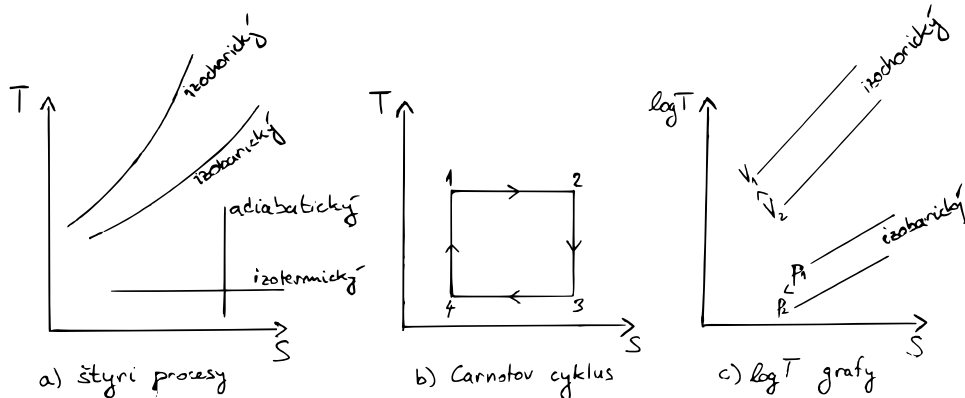
$$\delta Q = \frac{s}{2} V dp + \left( \frac{s}{2} + 1 \right) p dV.$$

My máme zadané, ako sa mení tlak s objemom. Teda malé zmeny tlaku závisia od malých zmien objemu. To spočítame jednoducho pomocou

$$dp = d \left( p_0 e^{-\frac{V}{V_0}} \right) = -p_0 e^{-\frac{V}{V_0}} \frac{dV}{V_0},$$

čo vieme ešte šikovne prepísať na

$$dp = -p \frac{dV}{V_0}.$$

Obr. 1:  $TS$  diagram a  $[\log T]S$  diagram

Ak všetko dosadíme do vzťahu pre  $\delta Q$ , dostaneme

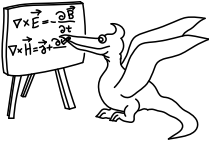
$$\delta Q = -\frac{s}{2} V p \frac{dV}{V_0} + \left(\frac{s}{2} + 1\right) p dV = \left(\frac{s}{2} + 1 - \frac{s}{2} \frac{V}{V_0}\right) p dV$$

Vidíme, že pre malé objemy je  $\delta Q > 0$  a plyn teplo pri expanzii ( $dV > 0$ ) prijíma. To platí až do bodu, kde je  $\delta Q = 0$ , čo je pre

$$V = \frac{s+2}{s} V_0 = \kappa V_0.$$

Do objemu  $\kappa V_0$  bude plyn pri expanzii teplo prijímať, pre väčší objem naopak odovzdávať.

**Ján Pulmann**  
janci@fykos.cz



## Seriál: Termodynamické potenciály

Vráťme sa na začiatku do tretieho dielu seriálu a spomeňme si na definíciu entropie

$$\delta Q = TdS.$$

Spolu s prvým termodynamickým zákonom môžeme napísať

$$dU = \delta Q + \delta W = TdS - pdV.$$

Toto znamená, že ak vezmeme vnútornú energiu ako funkciu  $S$  a  $V$ , parciálnymi deriváciami dostaneme teplotu  $T$  a záporný tlak  $-p$ , opäť ako funkcie  $S$  a  $V$ . V jednej funkcii  $U(S, V)$  máme teda schované navyše aj funkcie  $T(S, V)$  a  $p(S, V)$ . Ak by sme ďalej vyjadrili entropiu napríklad z  $T(S, V)$  a dosadili, dostaneme funkcie  $U(T, V)$  a  $p(T, V)$ , čo by pre ideálny plyn boli práve naša kalorická a stavová rovnica.

Funkcia  $U(S, V, N)$  obsahuje aj ďalšie informácie o chemickom potenciáli (ten budeme definovať o chvíľu), ktoré len zo stavovej a kalorickej rovnice nevieme určiť! Naozaj, *všetky* informácie o systéme sú obsiahnuté vo funkcii  $U(S, V, N)$ . To môžeme chápať tak, že z nej vieme vypočítat výsledky ľubovoľných experimentov s látkou, pokiaľ neporušia predpoklady termodynamiky (napríklad manipulácia s jednotlivými časticami).

To je veľký rozdiel oproti napríklad funkcii  $U(T, V)$ . Pre ideálny plyn je to dokonca  $U(T, V) = \frac{5}{2}nRT$ , z čoho nezískam žiadne informácie o tlaku.

Vidíme, že pre vnútornú energiu máme špeciálne premenné  $S$  a  $V$ . Ak je v nich vyjadrená, potom obsahuje všetky informácie o systéme. Tieto premenné sa nazývajú *prirodené*. Podobne má prirodené premenné aj entropia, stačí vyjadriť  $dS$

$$dS = \frac{1}{T}dU - \frac{p}{T}dV$$

a vidíme, že z vyjadrenia  $S(U, V)$  vieme dostať teplotu  $T$  a potom aj tlak z  $p/T$ .

### Chemický potenciál

Aby sme pre ideálny plyn zakódovali rovnakú informáciu ako máme v  $S(U, V, N)$  alebo  $U(S, V, N)$ , potrebujeme závislosti teploty, vnútornej energie a *chemického potenciálu* na premenných  $p, V, N$ . Chemický potenciál súvisí práve s počtom častíc  $N = nN_A$ , ktorú sme doteraz brali ako konštantu. Preto sme nikde nepísali členy ako  $dN$ . To sme ale robili len kvôli jednoduchosti, nič nám nebráni meniť počet častíc. Ak do plynu pridáme časticu, zrejme tým zmeníme jeho vnútornú energiu. To, o koľko sa zmení jeho energia, ak pri pridaní častice nezmeníme entropiu a objem, voláme *chemický potenciál* a značíme  $\mu$ . To matematicky zapíšeme ako ďalší možný príspevok do energie

$$dU = \delta Q + \delta W = TdS - pdV + \mu dN.$$

Správne sú teda prirodené premenné pre energiu  $S, V$  a  $N$ , pre entropiu zase  $U, V$  a  $N$ .

Chemický potenciál sme tiež nevedeli dopočítať priamo zo stavovej a kalorickkej rovnice. Pri výpočte entropie sme totiž mali vo výsledku neznámu funkciu počtu častíc. Pretože chemický potenciál vypočítame aj ako

$$\mu(S, V, N) = -\frac{1}{T} \frac{\partial S(U, V, N)}{\partial N}$$

výsledok tiež závisí na tejto funkcii. Entropiu sme nakoniec vedeli dopočítať pomocou úvah o zdvojnásobení počtu častíc, čo sú ale dodatočné informácie. Ostala nám len neznáma konštanta  $s_0$ , ktorú nevieme určiť. To ale len vyjadruje nejednoznačnosť vo voľbe nuly energie (ako to poznáme napríklad z elektrického potenciálu). V praxi sa to rieši tak, že sa zvolí jeden stav systému s nulovým  $\mu$  a ostatné sa udávajú voči nemu.

### Termodynamický potenciál

Ak teda poznáme funkciu  $U(S, V, N)$ , vieme dopočítať všetko, aj chemický potenciál. Preto nazývame  $U$  aj *termodynamický potenciál*.

Názov *potenciál* zrejme súvisí s používaním slova potenciál v mechanike alebo elektrostatike. V týchto situáciách tiež vieme derivovaním potenciálu vypočítať sily.

Pomocou potenciálu vieme vypočítať všetko, ale pre reálne látky sa môže stať, že nevieme napísať funkciu  $U(S, V, N)$ . Vždy ale vieme takéto funkcie merať experimentálne. Pre vodu sa napríklad tabuľky termodynamického potenciálu volajú *parné tabuľky*.

Entropia tiež kóduje všetky informácie o systéme, ale nenazýva sa termodynamický potenciál, pretože nemá rozmer energie. Podobne ako pre energiu, vieme robiť rôzne Legendreove transformácie entropie. Tie sa potom nazývajú *Massieuove funkcie*.

Je vhodné upozorniť na to, že názov chemický potenciál nesúvisí úplne s termodynamickými potenciálmi, hoci chemický potenciál bude veľmi úzko spojený s jedným z termodynamických potenciálov, Gibbsovou energiou.

Máme teda vyjadrené všetky vlastnosti systému pomocou jednej funkcie. To je výborné, ale môže to mať háčik. Aby sme mali všetko vyjadrené pomocou termodynamického potenciálu, musíme používať prirodzené premenné, no tie môžu byť pre nás veľmi nepraktické. Vidieť to hlavne na vnútornej energii: popisovať systém podľa toho, koľko má entropie, je pre nás veľmi neprirodené. Experimentálne vieme typicky meniť teplotu a tlak, niekedy aj objem, ale priama kontrola entropie je náročná. Preto by sme chceli mať potenciál, ktorý by mal prirodzené premenné napríklad  $T, V, N$  či  $T, p, N$ .

Už sme ale videli, že len vyjadriť entropiu ako funkciu  $T, V, N$  zo vzťahu

$$T(S, V, N) = \frac{\partial U(S, V, N)}{\partial S}$$

a dosadiť do  $U$  nám nedá termodynamický potenciál, nefunguje to napríklad ani na ideálnom plyne. Dôvod, prečo to tak je, má pekné geometrické vysvetlenie:

Pozrime sa na úplne jednoduchý prípad, funkciu  $f(x)$ . My sa pokúšame vyjadriť informácie, ktoré má táto funkcia, pomocou derivácie  $f'(x)$ . Ak iba dosadíme za  $x(p)$  z rovnice  $p = f'(x)$ , máme závislosť *hodnoty funkcie  $f$  na jej zmene*. Teda namiesto dvojíc  $[x, f(x)]$  máme  $[f'(x), f(x)]$ .

Tu ale strácame informáciu: Ak si vezmeme inú funkciu, ktorej graf je posunutý doprava či doľava, tak máme rovnakú závislosť hodnoty funkcie od zmeny funkcie.

To nemusí vyzerat ako problém, je to predsa len posun. Ak sa ale pozrieme na viacozmerné funkcie, namiesto konštanty, o ktorú sa posúvame, máme funkciu ostatných premenných, o ktorú sa môžeme posunúť.

Toto je inak dôvod, prečo sme v treťom diele seriálu nedostali správnu závislosť  $S$  na počte častíc. Tým, že sme prešli ku jednotkám teplota a objem, dostali sme neurčitost v ľubovoľnej funkcii počtu častíc. Našťastie sme túto funkciu (až na konštantu) vedeli určiť z fyzikálnych úvah a vlastností entropie, čo ale bola informácia navyše. Vidíme teda, že kalorická rovnica  $U(T, N)$  a stavová rovnica  $T(p, V, N)$  *nemajú* všetky potrebné informácie o ideálnom plyne.

Riešenie, ktoré sa používa v termodynamike, sa nazýva *Legendreova transformácia*. Má aj peknú geometrickú interpretáciu, ale pre nás je dôležitejší zápis pomocou funkcií: Vezmime si napríklad  $U(S, N, V)$  a chceme vyjadriť teplotu  $T = \partial U(S, V, N)/\partial S$ . Pozrime sa na výraz

$$U - TS.$$

To je určite dobre definovaná veličina, lebo každý stav systému má presne definovanú vnútornú energiu, teplotu a entropiu. Pozrime sa teraz na jej malú zmenu pri malom posunutí systému

$$d(U - TS) = dU - SdT - TdS = TdS - pdV + \mu dN - SdT - TdS = -SdT - pdV + \mu dN.$$

To je veľmi zaujímavý vzťah: Ak totiž vyjadríme  $U - TS$  ako funkciu  $T$ ,  $V$  a  $N$ , dostaneme derivovaním ostatné veličiny:  $S$ ,  $p$  a  $\mu$ . Funkcia  $U - TS$  v týchto svojich prirodzených premenných opäť obsahuje všetky mysliteľné informácie o systéme. Nepriamo to môžeme dokázať tak, že z nej vieme späť vyrobiť  $U$  vo svojich prirodzených premenných. Na to stačí zderivovať  $U - TS$  podľa teploty, čo dá entropiu, potom pripočítať  $TS$ , takže máme  $U - TS + TS = U$  v premenných  $T, V, N$ , a nakoniec vyjadriť teplotu pomocou entropie.

Funkcia  $U - TS$  sa nazýva Helmholtzova voľná energia, väčšinou sa značí  $F$  (ako **F**ree, nie podľa Helmholtza) a pozrieme sa na ňu teraz podrobnejšie.

### Helmholtzova voľná energia

Prirodzené premenné Helmholtzovej voľnej energie sú  $T$ ,  $V$  a  $N$ . Parciálnymi deriváciami dostaneme postupne entropiu, tlak a chemický potenciál. Aby sme ju vyjadrili pre ideálny plyn, potrebujeme vyjadriť  $U - TS$  v prirodzených premenných. Keďže  $U(S, V, N)$  ešte ani nemáme vyjadrené, použijeme radšej pre nás známe vzťahy pre  $U(T, V, N)$  a pre  $S(T, V, N)$ :

$$F = U - TS = \frac{s}{2}nRT - nRT \ln \left( \frac{T^{\frac{s}{2}}V}{n} \right) + nRs_0 = F(T, V, N).$$

Môžeme napríklad overiť vzťah pre  $\partial F(T, V, N)/\partial V = -p$ :

$$-p = \frac{\partial F(T, V, N)}{\partial V} = -nRT \frac{\partial}{\partial V} \ln V = -\frac{nRT}{V},$$

čo je práve stavová rovnica! Všimnite si, ako sa nám vďaka logaritmu podarilo zbaviť derivovania takmer všetkých členov.

Vieme, že ak máme dva systémy s vnútornými energiami  $U_1$  a  $U_2$ , tak ich celková vnútorná energia je súčet týchto vnútorných energií. Rovnakú vlastnosť sme definovali aj pre entropiu.

Ak navyše majú oba systémy rovnakú teplotu, môžeme písať pre ich celkovú Helmholtzovu voľnú energiu

$$F = U - TS = U_1 + U_2 - T(S_1 + S_2) = U_1 - TS_1 + U_2 - TS_2 = F_1 + F_2 ,$$

takže aj voľná energia podsystémov sa sčítava. Takúto vlastnosť majú aj ostatné termodynamické potenciály, ako sa ľahko môžete presvedčiť.

### *Fyzikálna interpretácia $F$*

Ak vo fyzike existuje takýto pekný matematický postup, treba hľadať aj zaujímavú fyzikálnu interpretáciu:

Vezmime si nejaký systém v kontakte s rezervoárom. Vieme, že v rovnováhe bude teplota tohoto systému rovnaká ako teplota rezervoáru, teda  $T = T_r$ . Ďalej predpokladajme, že systém samotný nie je celý v rovnováhe, napríklad pozostáva z dvoch plynov oddelených prepážkou, ktorá sa môže hýbať. Necháme teda systém kvázistatcky vyvíjať tak, ako ho to samého ťahá, teda do rovnováhy. Pri maličkom kroku sa nejako zmení vnútorná energia systému a vnútorná energia rezervoáru:

$$dU_{\text{total}} = dU + dU_r .$$

Vnútorná energia rezervoáru sa ale môže meniť len tým, že doň pritečie teplo, teda

$$dU_r = \delta Q_r = T_r dS_r .$$

Keďže ale posúvame systém kvázistatcky a izotermicky, musí byť  $dS = -dS_r$ , a teda

$$dU_r = -T_r dS .$$

Teplota systému je ale rovná teplote rezervoáru, môžeme písať  $T$  namiesto  $T_r$ . Spolu teda

$$dU_{\text{total}} = dU - TdS = d(U - TS) = dF ,$$

pretože teplota systému sa nemení, takže s ňou môžeme vojsť dovnútra diferenciálu  $d$ .

Práve sme si ukázali, že práca, ktorú získame zo systému a rezervoáru, je rovná zmene Helmholtzovej voľnej energie! Ku tomuto záveru vieme dospieť aj tým, že sa pozrieme na  $dF$ :

$$dF = d(U - TS) = -SdT - pdV + \mu dN .$$

Ak držíme teplotu a počet častí konštantný, tak potom je zmena voľnej energie rovná práve  $-pdV = \delta W$ .

Navyše, ak systém s rezervoárom môžu prácu konať, teda  $dF < 0$  pre nejaký malý proces, tak ju aj konať budú: Je všeobecný zákon, že sa systém snaží dostať do minima energie. Ak by bolo pre nejaký malý proces  $dF > 0$ , tak pri opačnom procese bude  $dF < 0$  a systém s rezervoárom sa ďalej hýbe. Celý proces sa zastaví až v minime voľnej energie pre danú teplotu  $T_r$ , teda pre

$$dF = 0 .$$

To je druhá časť interpretácie voľnej energie: Pre systémy v kontakte s rezervoárom tepla sa minimalizuje. To je pre nás výhodné pri výpočtoch. Stačí si povedať, že teplota systému je rovná teplote rezervoáru, a môžeme na rezervoár zabudnúť.

*Ak je pre vás táto časť ťažko pochopiteľná, skúste si spočítať podúlohu c) seriálovej úlohy. Potom si o Helmholtzovej voľnej energii prečítajte ešte raz a predstavujte si pri tom proces z úlohy.*

Práve sme použili *princíp minimálnej energie*: Ak sa inak uzavretý systém môže pomaly vyvíjať, tak sa vyvíja do stavu s minimálnou energiou. To poznáte dobre z mechaniky. Platí totiž, že ak systém pri malom posune zmenší svoju energiu, tlačí ho do tohoto posunu sila – to je nejakom zmysle dokonca definícia sily vzťahom  $F = -dE(x)/dx$ .

Ako to, že platí princíp minimálnej energie a súčasne zákon zachovania energie? Spomeňte si na mechaniku: Necháme guľôčku kotúľať sa po hrboľatej zemi. Ak ju necháme úplne voľne, tak sa jej potenciálna energia zmení na kinetickú, takže sa nedostane hneď do rovnováhy. Postupne svoju energiu premení na iné formy a skončí v jamke. Podobne, ak uvoľníme termodynamický systém, tak sa bude hýbať rýchlo a nebude preň platiť rovnovážna termodynamika, teda ani vzťah na výpočet vnútornej energie. Po chvíli sa kvôli treniu ustáli, ale s inými termodynamickými parametrami.

Čistejší spôsob, ako nechať systém vyvíjať do rovnováhy, je robiť to kvázistaticky. Pri tom bude uvoľňovať prácu, ktorú my môžeme zbierať. Ak toto uvoľňovanie bude navyše vratné, bude sa i zachovávať entropia. To sme presne urobili v predchádzajúcom výpočte pre systém napojený na rezervoár. Navyše sme zistili, že táto pozbieraná práca je rovná práve zmene Helmholtzovej voľnej energie.

Ak systém uzavrieme úplne, teda z neho nebudeme vyberať prácu, bude sa správať podľa *princípu maximálnej entropie*. Pre takýto systém bude zachovaná celková vnútorná energia, ale vnútorné procesy (ktoré môžu byť nevratné) budú vždy zvyšovať entropiu. Preto sa proces zastaví až na najvyššej entropii.

Všimnite si, ako sa menia tieto princípy. Predstavme si systém, ktorý má napríklad viac rôznych termodynamických podsystemov.

- Pre úplne izolovaný systém sa maximalizuje entropia. V úplne izolovanom systéme sa zachováva celková vnútorná energia, objem a počet častíc.
- Zasiachneme teraz do systému tak, že jeho entropiu budeme brať konštantnú. To dosiahneme tým, že samovoľné toky vo vnútri systému urobíme vratne. Ak v predchádzajúcom prípade vystrelil piest, teraz ho pomaly posúvame a čerpáme energiu, ak tieklo teplo medzi dvoma rezervoármi, teraz ho prenášame pomocou Carnotovho stroja a zvyšnú prácu si nechávame. V takomto prípade sa vnútorná energia nezachová, ale minimalizuje.
- Teraz navyše pridáme podmienku konštantnej teploty, teda systém napojíme na rezervoár teploty. Entropia sa bude meniť, pretože bude tiecť z rezervoáru do systému. Minimum tu nadobudne voľná energia.
- S ďalšími potenciálmi to bude podobne. Ak prejdeme ku novej premennej  $X$ , tak pri konštantnom  $X$  sa minimalizuje nejaký iný potenciál.

## Ďalšie termodynamické potenciály

Rovnakým spôsobom ako pri Helmholtzovej voľnej energii môžeme definovať i ďalšie termodynamické potenciály. *Entalpia* je definovaná ako  $H = U + pV$ . Pre jej diferenciál platí

$$dH = TdS - pdV + \mu dN + d(pV) = TdS + Vdp + \mu dN$$

a pri konštantnom tlaku a počte častíc je jej zmena rovná nárastu tepla (podobne ako pre energiu je  $dU = \delta Q$  pri konštantnom objeme a počte častíc). Keďže fázové zmeny prebiehajú práve pri konštantnom tlaku, teplo potrebné na ich realizáciu je práve zmena entalpie.

Vymeniť môžeme viacero premenných, ako napríklad u *Gibbsovej energie*  $G = H - TS = U + pV - TS$ . Lahko spočítame

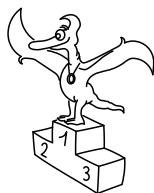
$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN.$$

Gibbsova voľná energia má veľké uplatnenie. Veľa procesov, napríklad v chémii, totiž prebieha pri konštantnej teplote a tlaku. To je kvôli tomu, že ich robíme v otvorených nádobách, kde musí byť atmosférický tlak a teplota. Pri týchto podmienkach, ak povolíme premenný počet častíc, je zmena Gibbsovej energie na jednu časticu rovná chemickému potenciálu.

Rovnako môžeme prejsť i ku termodynamickým potenciálom závisiacim na chemickom potenciáli: *Grandkanonický potenciál* je  $\Omega = F - \mu N$ . Ten má efekt vtedy, ak dovolíme premenný počet častíc. Príklad takéhoto systému je hemoglobín v pľúcach, ktorý si môže vymieňať molekuly kyslíku a oxidu uhličitého s molekulami vo vdýchnutom vzduchu.

Takto by sme mohli samozrejme pokračovať ďalej a vyrábať ďalšie potenciály. Vy si ešte niečo prepočítate v seriálovej úlohe. Termodynamické potenciály sú ale veľmi bohatá oblasť, takže nabudúce v nich budeme pokračovať. Okrem toho sa konečne pozrieme na niečo iné ako na dobre známy ideálny plyn.





## Pořadí řešitelů po IV. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
		4	4	3	4	5	5	8	6	<b>39</b>	<i>100</i>	<b>156</b>
1. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	4	-	3	4	5	5	8	5	<b>34</b>	<i>86</i>	<b>128</b>
2.-3. <i>Josef Minařík</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	4	2	4	4	3	6	3	<b>30</b>	<i>74</i>	<b>109</b>
2.-3. <i>Ladislav Trnka</i>	G, Havlíčkův Brod	0	2	3	4	2	4	7	4	<b>26</b>	<i>70</i>	<b>109</b>
4. <i>Lucie Kundratová</i>	G, nám. TGM, Zlín	4	2	3	2	4	3	6	1	<b>25</b>	<i>67</i>	<b>98</b>
5. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	2	4	1	4	1	2	6	3	<b>23</b>	<i>60</i>	<b>83</b>
6. <i>Vojtěch Laitl</i>	G, Ostrov	0	2	1	1	1	0	7	-	<b>12</b>	<i>57</i>	<b>82</b>
7. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	4	4	3	-	3	-	5	-	<b>19</b>	<i>71</i>	<b>75</b>
8. <i>Jakub Smolka</i>	Slezské G, Opava	2	2	3	-	-	-	6	-	<b>13</b>	<i>59</i>	<b>63</b>
9. <i>Ivan Hudák</i>	ESS, Lip. Mikuláš	4	4	3	4	1	3	4	1	<b>24</b>	<i>45</i>	<b>57</b>
10. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>63</i>	<b>50</b>
11. <i>Tereza Pavlišová</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	0	-	1	-	-	1	-	<b>2</b>	<i>48</i>	<b>46</b>
12. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	-	-	2	1	2	-	6	1	<b>12</b>	<i>54</i>	<b>38</b>
13. <i>Ondřej Bursa</i>	G, Brno-Řečkovice	4	2	-	1	-	-	-	-	<b>7</b>	<i>67</i>	<b>36</b>
14. <i>Anna Jandová</i>	G Legionářů, Příbram	-	-	2	1	-	-	4	-	<b>7</b>	<i>41</i>	<b>29</b>
15.-16. <i>Vratislav Blažek</i>	G, Benešov	-	-	-	1	-	-	-	-	<b>1</b>	<i>55</i>	<b>26</b>
15.-16. <i>David Otta</i>	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	2	1	-	-	-	-	<b>3</b>	<i>60</i>	<b>26</b>
17. <i>Klára Grohmannová</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>58</i>	<b>23</b>
18.-19. <i>Kristian Matušík</i>	G, Benešov	-	0	-	2	-	1	-	-	<b>3</b>	<i>37</i>	<b>21</b>
18.-19. <i>Dominik Stejskal</i>	G, Krnov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>49</i>	<b>21</b>
20. <i>Jakub Zemek</i>	G, Uherské Hradiště	4	-	-	-	-	-	-	-	<b>4</b>	<i>68</i>	<b>19</b>

## Kategorie druhých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
		4	4	3	4	5	5	8	6	<b>39</b>	<i>100</i>	<b>156</b>
1. <i>Vít Beran</i>	Masarykovo G, Plzeň	4	4	2	4	5	5	6	5	<b>35</b>	<i>90</i>	<b>141</b>
2. <i>Ondřej Knopp</i>	G, Třeboň	4	2	2	4	-	-	6	2	<b>20</b>	<i>84</i>	<b>123</b>
3. <i>Viktor Rosman</i>	G, Pelhřimov	4	2	2	4	3	4	6	5	<b>30</b>	<i>77</i>	<b>116</b>
4. <i>Alexandr Jankov</i>	Matičín G, Ostrava	4	4	4	3	3	3	7	4	<b>32</b>	<i>77</i>	<b>114</b>
5. <i>Jan Lindauer</i>	První české G, Karlovy Vary	4	4	3	3	2	3	6	5	<b>30</b>	<i>68</i>	<b>106</b>
6. <i>David Němec</i>	G, Tanvald	2	0	3	-	-	-	6	2	<b>13</b>	<i>75</i>	<b>97</b>
7. <i>Tomáš Dulava</i>	Matičín G, Ostrava	2	2	3	4	4	-	5	5	<b>25</b>	<i>74</i>	<b>96</b>
8. <i>Zuzana Richterová</i>	G, Pelhřimov	0	2	2	4	2	5	4	2	<b>21</b>	<i>54</i>	<b>85</b>
9. <i>Ladislav Nagy</i>	G a SOŠZZE, Vyškov	2	0	2	1	1	1	6	2	<b>15</b>	<i>54</i>	<b>84</b>
10.-11. <i>Martin Crhán</i>	G, Studentská, Havířov	2	0	2	3	2	2	5	4	<b>20</b>	<i>49</i>	<b>76</b>
10.-11. <i>Jan Šenk</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	4	-	3	1	2	1	-	6	<b>17</b>	<i>71</i>	<b>76</b>
12. <i>Dominik Starý</i>	G, Benešov	-	4	3	-	-	-	-	3	<b>10</b>	<i>84</i>	<b>74</b>
13. <i>Mikuláš Mikula</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	-	3	-	-	-	3	-	<b>8</b>	<i>67</i>	<b>59</b>
14. <i>Šimon Karch</i>	G Komenského, Havířov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>85</i>	<b>58</b>

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	4	5	5	8	6	39	100	156
15. <i>Martina Kopecká</i>	G J. Barranda, Beroun	–	–	3	–	–	3	7	–	13	76	51
16. <i>Matúš Kopunec</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	2	3	–	–	–	–	–	5	78	46
17. <i>Pavla Trembulaková</i>	G Jírovcova, České Budějovice	0	–	3	–	–	2	6	–	11	52	43
18. <i>Tomáš Failk</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	41
19.–20. <i>Ondřej Hajnýš</i>	G, Dvůr Králové n. L.	4	–	3	1	–	2	–	–	10	56	37
19.–20. <i>Václav Kubíček</i>	Arcibisk. G, Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	37
21. <i>Marek Kadlečík</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	2	1	–	–	2	–	5	52	34
22. <i>Denisa Chytilová</i>	G J. Škody, Přerov	4	2	–	–	–	–	–	–	6	68	32
23. <i>Matej Parada</i>	G Grösslingova, Bratislava	0	–	–	–	–	–	–	–	0	63	29
24.–25. <i>Filip Nácovský</i>	G, Dvůr Králové n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	25

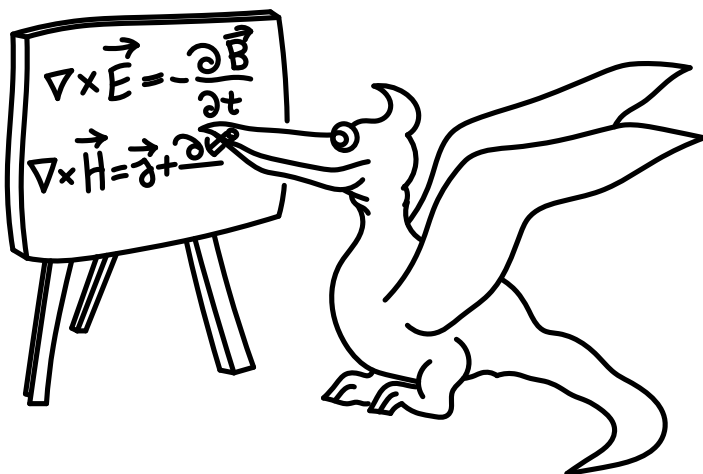
## Kategorie třetích ročníků

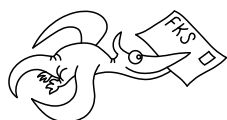
jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	3	4	5	5	8	6	35	100	140
1. <i>Matěj Mezera</i>	G, Havlíčkův Brod	2	2	4	4	7	5	7	5	36	96	134
2. <i>Jáchym Bártík</i>	G, Havlíčkův Brod	2	2	2	4	6	5	7	5	33	95	133
3. <i>Pavol Šimko</i>	G V. Nedožerského, SR	0	2	4	4	4	3	8	6	31	82	115
4. <i>Daniela Pittnerová</i>	G L. Svobodu, Humenné	2	2	3	3	3	3	8	5	29	81	113
5. <i>Jozef Lipták</i>	G Tajovského, B. Bystrica	2	2	3	4	6	5	6	6	34	85	111
6. <i>Štěpán Stenclák</i>	G, Třinec	1	2	2	4	4	–	6	5	24	80	108
7. <i>Petr Šimůnek</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	2	4	3	2	3	8	5	29	76	103
8. <i>Andrej Kancko</i>	G B. S. Timravy, Lučenec	0	2	2	4	1	1	5	3	18	68	86
9. <i>Kateřina Stodolová</i>	G Dašická, Pardubice	0	1	4	4	–	–	8	4	21	79	81
10. <i>Veronika Úlovcová</i>	Církevní G, Plzeň	0	0	3	4	–	3	4	2	16	62	72
11. <i>David Vokrouhlický</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	70
12. <i>Klára Ševčíková</i>	G, Uherské Hradiště	2	0	2	1	–	–	8	5	18	65	69
13. <i>Veronika Rajňáková</i>	G, Nové Zámky	1	1	3	–	3	–	–	2	10	73	68
14. <i>Lucie Hronová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	0	1	3	1	2	2	6	3	18	46	62
15. <i>Jakub Kožušník</i>	Wichterlovo G, Ostrava	1	1	3	2	2	–	5	–	14	57	60
16. <i>Marek Raja</i>	G, Nymburk	0	1	2	1	–	1	–	–	5	49	59
17.–19. <i>Alžběta Andrášková</i>	G, Olomouc-Hejčín	1	1	3	2	–	3	6	2	18	68	58
17.–19. <i>Jonáš Fuksa</i>	PORG, Praha	2	1	2	4	4	–	–	–	13	85	58
17.–19. <i>Matěj Rzehulka</i>	Wichterlovo G, Ostrava	2	2	3	2	2	3	8	5	27	68	58
20. <i>Branislav Belko</i>	G Milana Růfusa	0	1	2	1	1	1	6	4	16	47	57
21. <i>Matěj Vitouch</i>	G, Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	56
22. <i>Přemysl Štastný</i>	G, Žamberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	54
23. <i>Vít Horáček</i>	G L. Jaroše, Holešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	48
24. <i>Petra Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava	0	1	–	–	–	–	–	–	1	75	44

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	3	4	5	5	8	6	35	100	140
1. <i>Peter Kubaščík</i>	G, Kysucké Nové Mesto	2	1	3	4	2	4	6	5	27	76	106
2. <i>Šimon Knoška</i>	G A. Kmeťa, B. Štiavnica	2	2	4	3	6	3	8	5	33	80	105
3. <i>Petr Hrubý</i>	G, Polička	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	96
4. <i>Lukáš Supík</i>	G, Třinec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	93	93
5. <i>Tomáš Hrbek</i>	G J. Resslera, Chrudim	–	1	–	–	–	–	–	–	1	77	82
6. <i>Andrej Uhlíarik</i>	G A. Bernoláka, Námestovo	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	66
7. <i>Klára Stefanová</i>	G B. Němcové, HK	0	1	3	–	–	–	–	–	4	72	57
8. <i>Andrea Tóthova</i>	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	66	55

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	$\Sigma$
<i>Student</i>	MFF UK	2	2	3	4	5	5	8	6	35	100	140
9. Patrik Procházka	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	1	2	–	–	–	–	4	9	66	53
10. Jakub Pilarš	G J. Resslera, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	46
11. Štěpán Malec	SPŠ a VOŠ Kladno	–	0	3	2	2	–	4	3	14	57	39
12. Pavel Souček	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	31
13. Jakub Marták	G Golianova, Nitra	0	–	2	1	1	1	–	–	5	37	26
14. Jakub Jambrich	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	25
15. Jozef Mišt	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	2	–	2	–	–	–	–	3	7	62	21
16. Martin Gažo	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	94	16
17. Tomáš Drozdík	G Andreja Vrábľa, Levice	–	1	2	1	–	1	–	–	5	43	15
18. Anna Linhartová	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	10
19.–21. Daniel Adamkovič	G Šrobárova, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	8
19.–21. Juraj Májek	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	89	8
19.–21. Júlia Matulová	G K. Sladkovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	36	8
22. Kristína Mrázová	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	7
23. Marek Otýpka	G, Židlochovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6
24. Kryštof Kolář	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	5





**FYKOS**

**UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta**


**Ústav teoretické fyziky**

**V Holešovičkách 2**

**180 00 Praha 8**

www: <http://fykos.cz>

e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

FYKOS je také na Facebooku 

<http://www.facebook.com/Fykos>

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.