Úloha VI.P ... vody Zeměplochy

5 bodů; průměr 2,32; řešilo 25 studentů

Všichni moc dobře víme, že je dobře zařízeno zásobování Zeměplochy vodou. A nikdo z nás nepotřebuje vědět jak. Co kdyby se ale stalo něco závažného a magie by přestala dobře fungovat? Za jak dlouho by se ocitla Zeměplocha bez vody? Pro jednoduchost můžete uvažovat pesimistickou situaci, kdy by nikdo vodu nijak nezadržoval. Dobře víte, že Zeměplocha má průměr $d = 10\,000\,\mathrm{km}$, *panuje na ní homogenní tíhové zrychlení* $g \doteq 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ *a je dokonale kruhová. Opravdový celkový objem a rozložení vody na Zeměploše ve skutečnosti nikdo stejně nezná, takže můžete uvažovat, že voda homogenně pokrývá Zeměplochu, která je rovná a voda má výšku* $H = 5\,\mathrm{m}$ *(to je hodně pesimistické, protože by pak všechno muselo stát pod vodou, nebo na kůlech nad vodou). Cílem úlohy je nalézt uspokojivě přibližný model, který dává dobrý odhad hledaného času – nečekáme přesné řešení.*

Karlovi přišlo zvláštní, jak ta voda ze Zeměplochy odtéká.

Nejprve analyzujme situaci a povězme si něco o chování takovéhoto systému. Na vodu bude působit homogenní tíhová síla, následkem které bude mít voda tendenci dostat se „níže“, tedy do konfigurace s menší potenciální energií. Voda se tedy bude rozlévat do šíře (vzhledem k nestlačitelnosti jediná možnost, jak sníží svou střední nadzeměplošnou výšku), kde ovšem přijde hrana Zeměplochy a následné vylití (do nicoty či na želvu).

Dále je nutno poznamenat, že v reálném případě veškerá voda nikdy neodteče, a to z různých důvodů. Zkuste vylít vodu na rovný stůl – troška jí vždy zůstane. Je tedy třeba si zvolit nějakou míru, pro kterou je pro nás veškerá voda efektivně pryč. I z pragmatických důvodů zvolme dolní hladinu na střední výšku $5\,\mathrm{cm}$ ($99\,\%$ vody je pryč, povrchové napětí ještě nehraje významnou roli). Vyřešení této úlohy není vůbec snadná záležitost.[1]

Situace je radiálně symetrická. Také ve vodní mase neočekáváme žádné větší dutiny (bubliny), proto pro popis soustavy budeme používat závislost $h(r,t)$ výšky hladiny h na vzdálenosti od středu Zeměplochy r a čase t.

Při tvorbě adekvátního modelu si nejprve uvědomme, že hladina je vždy všude téměř vodorovná – svažování lze očekávat řádově metry na tisíce kilometrů (pod desetitisícinu procenta). Z tohoto důvodu lze předpokládat, že proudnice jsou taktéž téměř vodorovné (a rychlosti ne příliš velké). Pozor, nemůžeme předpokládat, že hladina je vodorovná globálně (tedy že h nezávisí na r) – svažování hladiny je sice malé, ale na vzdálenostech tisíců kilometrů se projeví nezanedbatelně.

První, co tedy člověka napadne, je použít model laminárního proudění. Nicméně po výpočtech se ukazuje, že by rychlost proudění byla v řádech jednotek až desítek metrů za sekundu, což vzhledem k hodnotám výšek hladin (řádově centimetry až metry) neodpovídá laminárnímu modelu. Reynoldsovo číslo se dostává do řádu tisíců teprve pro výšky hladiny v řádu stovek μm, což jsou oblasti, kde již hraje roli povrchové napětí a další jevy, což by vedlo k dalšímu zkomplikování modelu. Navíc jsou tyto výšky hladin hluboko pod námi stanovenou hranicí „bezvodnatosti“.

Máme turbulentní systém. Protože nemáme možnosti dělat výpočetně příliš náročné simulace, [2] proto (vzhledem k vlastnostem našeho systému) sáhneme po empirickém „cheatu“. Vzhledem k pomalé změně hladin (po většinu času) budeme modelovat systém jako kvazistatický. Budeme předpokládat, že střední rychlost proudění vody v (v čase t ve vzdálenosti r od středu)

[1] Problém podobného ražení je protrhnutí přehrady. Existuje mnoho článků na toto téma, např. `http://www.damsafety.org/media/documents/RESEARCH/ResearchReports/PredictPeakOutflwBrchEmbkDms2010.pdf`.

[2] Bylo by třeba sáhnout buď po částicových modelech, nebo po Navier–Stokesovském modelování.

závisí pouze na tvaru hladiny v daný okamžik – nikoliv na její časové změně, předchozích rychlostech proudění etc. Takže ke změnám dochází dost pomalu na to, aby se rychlosti proudění vždy udržely v dobrém přiblížení v rovnovážných hodnotách.[3] Naším další cílem je tedy nalezení závislosti $v(r,t)$. Zde použijeme další přiblížení – totiž voda v segmentu se sklonem hladiny s poteče stejně jako řeka se sklonem s (a konstantní hloubkou). Pro takový systém platí empirická Gaucklerova–Manningova–Stricklerova formule[4]

$$v = n^{-1} R_{\mathrm{h}}^{\frac{2}{3}} s^{\frac{1}{2}} \,,$$

kde v je střední rychlost vody, n je drsnost dna, R_{h} je hydraulický poloměr a s je sklon hladiny (v našem případě, původně sklon dna).

Jelikož považujeme Zeměplochu za rovinu, uvažujme malou drsnost[5]

$$\{n\} \approx 0{,}01 \,,$$

kde se uvádí hodnota n v jednotkách SI.[6]

Velikost hydraulického poloměru v našem případě odpovídá hloubce[7] h a konečně sklon s odpovídá záporně vzaté derivaci výšky hladiny podle r, kterou budeme značit h_r.

Dohromady dostáváme tedy

$$v = n^{-1} h^{\frac{2}{3}} (-h_r)^{\frac{1}{2}} \,. \tag{1}$$

Nyní musíme ze vztahu pro v vypočítat, jak se bude měnit výška hladiny. Uvažujme mezikruží s vnitřním poloměrem r o malé šířce $\mathrm{d}r$, se středem ve středu Zeměplochy. Na tomto mezikruží se nachází voda o celkovém objemu $\mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}V = 2\pi r h(r)\,\mathrm{d}r .$$

Pro časovou změnu tohoto objemu $\mathrm{d}V_t$ platí

$$\mathrm{d}V_t = 2\pi r h_t(r)\,\mathrm{d}r \,, \tag{2}$$

kde h_t je derivace výšky hladiny podle času. Nicméně časová změna objemu musí být také rovna rozdílu (prů)toků přes vnitřní a vnější poloměr. Platí tedy

$$\mathrm{d}V_t = 2\pi r v(r) h(r) - 2\pi (r+\mathrm{d}r) v(r+\mathrm{d}r) h(r+\mathrm{d}r) \,,$$

což po vhodné úpravě dá

$$\mathrm{d}V_t = 2\pi r \left[v(r)h(r) - v(r+\mathrm{d}r)h(r+\mathrm{d}r)\right] - 2\pi v(r+\mathrm{d}r)h(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}r$$

a po vytknutí $\mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}V_t = -2\pi \mathrm{d}r \left[r\frac{v(r+\mathrm{d}r)h(r+\mathrm{d}r) - v(r)h(r)}{\mathrm{d}r} + v(r+\mathrm{d}r)h(r+\mathrm{d}r) \right] \,,$$

[3] Poměr horizontálních a vertikálních rychlosti bude řádově statisíce až miliony, proto tato aproximace je oprávněná.

[4] Podle `https://en.wikipedia.org/wiki/Manning_formula` nebo `http://www.fs.fed.us/rm/pubs/rmrs_gtr147.pdf`.

[5] Porovnejte s hodnotami např. `http://www.adv-geosci.net/5/133/2005/adgeo-5-133-2005.pdf` nebo `http://www.fs.fed.us/rm/pubs/rmrs_gtr147.pdf`.

[6] Nejedná se o bezrozměrné číslo, ale jednotka se (vzhledem k nezřetelnosti jejího fyzikálního významu) zpravidla vynechává.

[7] Z definice (viz třeba `https://cs.wikipedia.org/wiki/Hydraulický_poloměr`).

což se pro dr jdoucí k nule rovná

$$\mathrm{d}V_t = -2\pi\left[r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[v(r)h(r)\right] + v(r)h(r)\right]\,\mathrm{d}r\,.$$

Nyní už jen vynecháme argument a zderivujeme součin a dostáváme

$$\mathrm{d}V_t = -2\pi(rv_rh + rvh_r + vh)\,\mathrm{d}r\,. \tag{3}$$

Z (2) a (3) dostáváme rovnost

$$2\pi rh_t\,\mathrm{d}r = -2\pi(rv_rh + rvh_r + vh)\,\mathrm{d}r\,,$$

odkud

$$h_t = -v_rh - vh_r - r^{-1}vh\,. \tag{4}$$

Nyní se lze úplně zbavit rychlosti, a to pomocným výpočtem z (1). Dostaneme

$$v_r = -\frac{2}{3}n^{-1}h^{-\frac{1}{3}}(-h_r)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}n^{-1}h^{\frac{2}{3}}(-h_r)^{-\frac{1}{2}}h_{rr}\,, \tag{5}$$

kde h_{rr} je druhá derivace h podle r. Dosazením (1) a (5) do (4) získáme

$$h_t = -n^{-1}h^{\frac{2}{3}}(-h_r)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}hh_r^{-1}h_{rr} + \frac{5}{3}h_r + r^{-1}h\right)\,. \tag{6}$$

O řešení této rovnice analyticky se nemá cenu pokoušet, naštěstí explicitní vyjádření časové derivace nám umožňuje snadné numerické řešení – „simulaci“ po časových krocích.

Vzhledem k předpokladům o systému je simulace náchylná na zvětšovaní časového kroku (zejména na začátku, kde jsou velké gradienty sklonu hladiny). Jako vnější vstup pro simulaci je třeba zadání počátečního stavu ($h = h_0$), zvolení časového a radiálního kroku, a počtu iterací (pro simulaci, jejíž výsledky jsou níže, byly použity po řadě hodnoty 50 s, 50 km, 150 000). Dále je třeba zajistit „odtok“ vody za hranu Zeměplochy, který v sobě (6) nemá obsažen, a také algoritmus konání časových iterací a výpočtu radiálních derivací.[8] A konečně způsob implementace – zde poslouží téměř libovolný jazyk či dokonce tabulkový editor, papír a tužku nedoporučujeme.

Vývoj hladiny v závislosti na čase je vidět na obrázku 1.

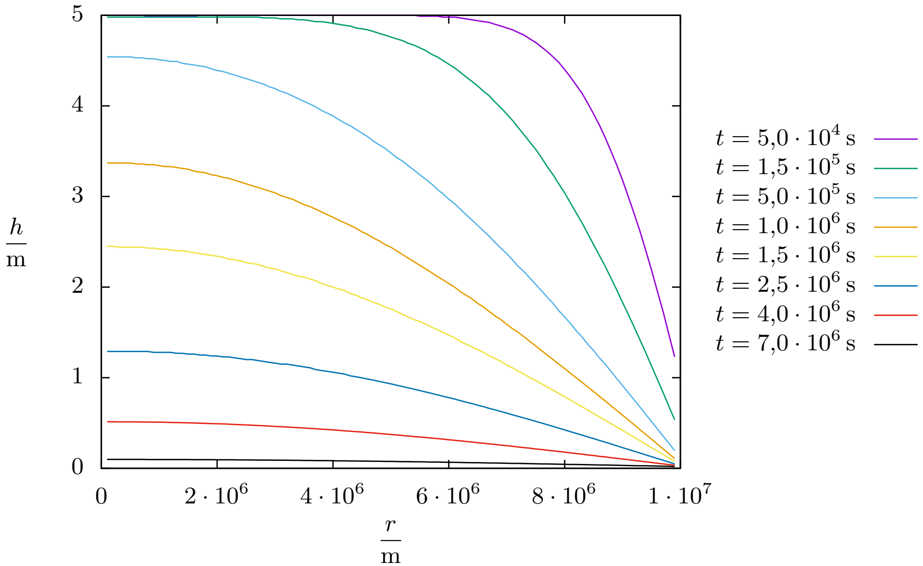
Podle očekávání voda nejprve odtéká z krajů, hladina ve středních částech se začne snižovat až po nějakém čase a poté se odtok vod stále zpomaluje a zpomaluje (viz časy v legendě obrázku 1). Co se týče vývoje celkového objemu vody, ten je znázorněn na obrázku 2.

Na první pohled nás napadne otázka, jak moc je tato závislost blízká exponenciále. Tuto otázku můžeme snadno zodpovědět, vyneseme-li hodnoty hladiny v logaritmické škále – exponenciála by se transformovala na přímku.

Ukazuje se, že od určité chvíle má závislost objemu na čase exponenciální charakter, viz obrázek 4.

V našem modelu došlo k poklesu objemu vody na 1 % v čase $t_{1\,\%} = 7{,}27\cdot 10^6\,\mathrm{s} = 84{,}1\,\mathrm{d}$. Odhadnout, o jak přesný výsledek se jedná, není jednoduché – zjišťování přesnosti aproximace

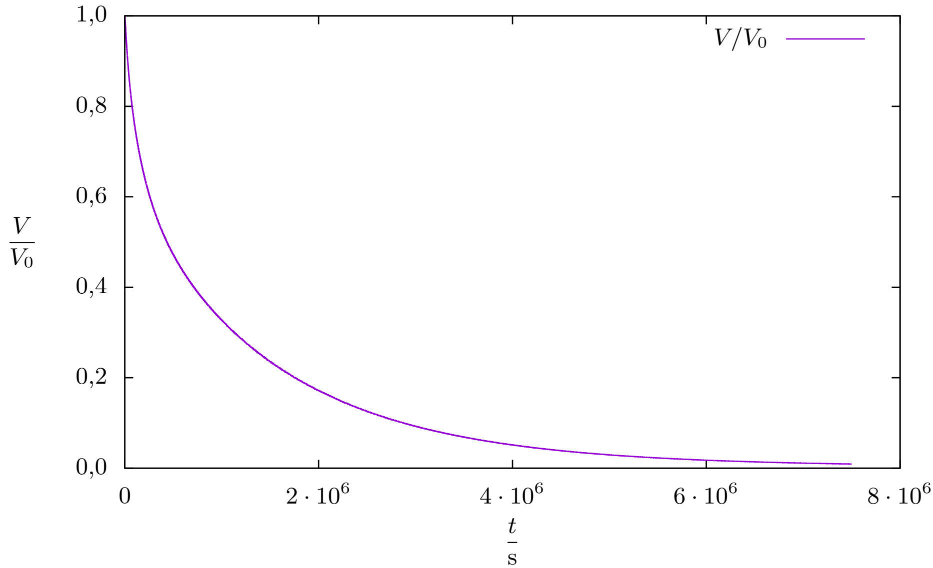
[8] Zde měl každý přístup svá úskalí (výpočetní čas, nestabilita řešení, neslučitelnost s okrajovou podmínkou etc.) – doporučujeme buď vyzkoušet, nebo se nechat hlouběji zasvětit do tajů numerického řešení diferenciálních rovnic či počítačové fyziky.



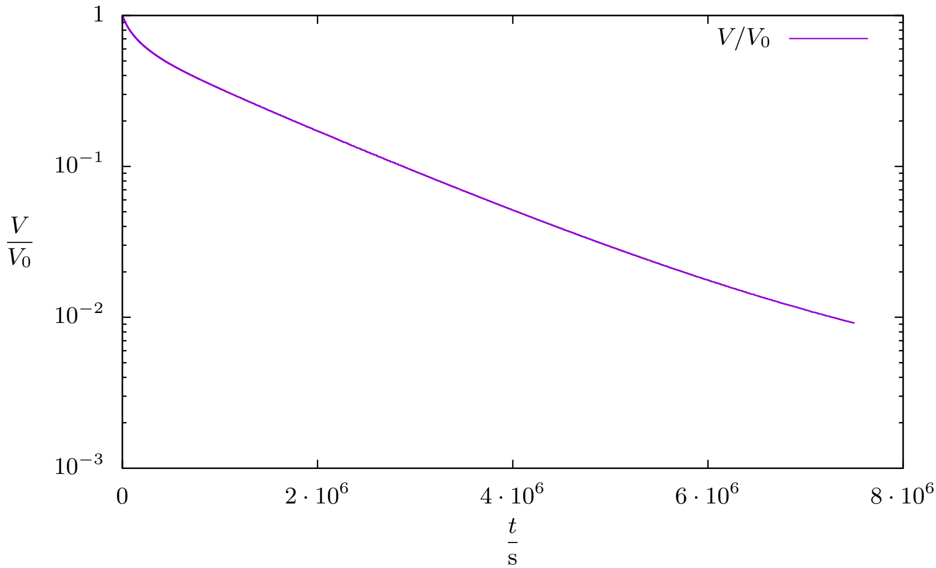
Obr. 1: Vývoj výšky hladiny v čase.

nahnutého dna je náročností srovnatelné s vyřešením celé úlohy. Její maximální chybu odhadujeme na půl řádu (konstanta 0,3 až 3), proto bychom skutečnou hodnotu očekávali v řádech několika málo měsíců.

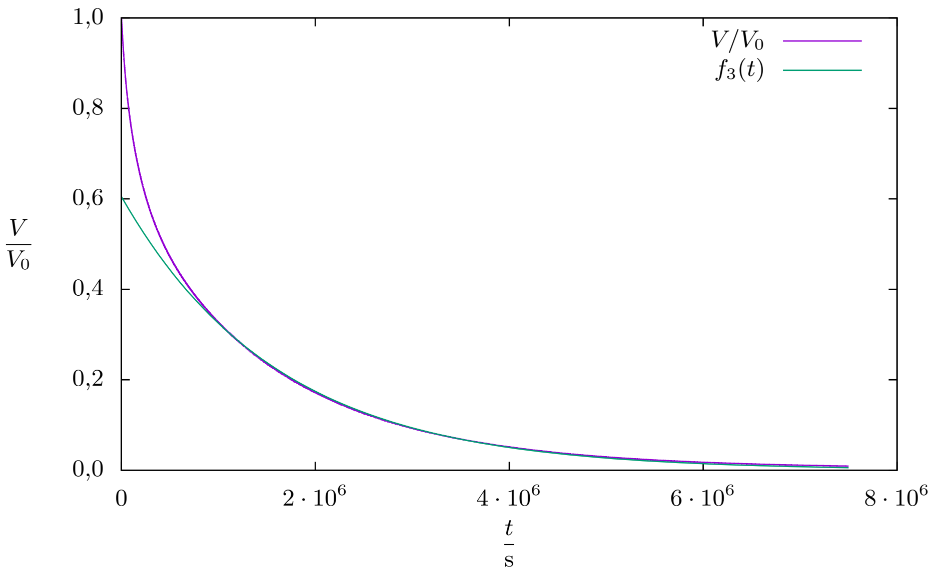
Lubomír Grund
grund@fykos.cz



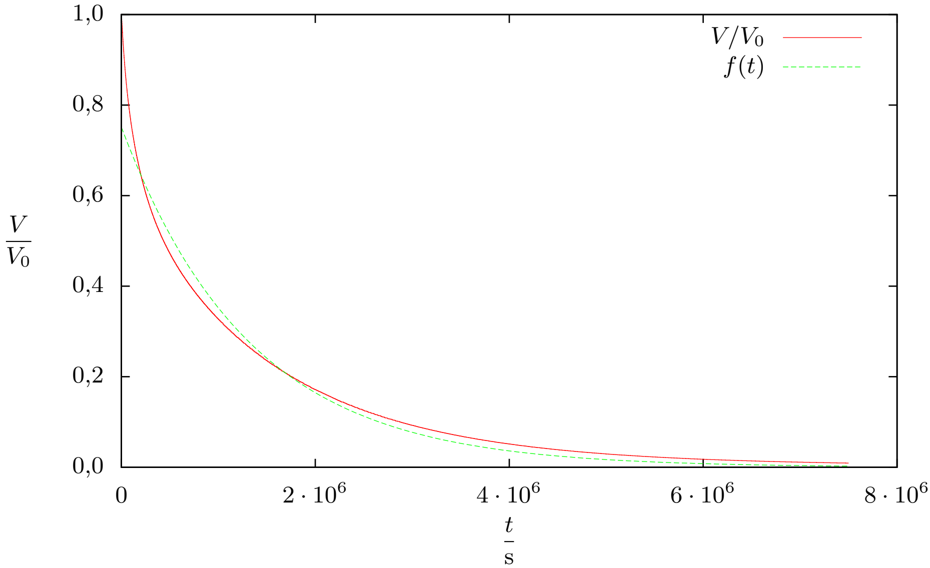
Obr. 2: Vývoj objemu vody v čase.



Obr. 3: Vývoj objemu vody v čase (v logaritmické škále).



Obr. 4: Vývoj objemu vody v čase proložený exponenciální funkcí $f_3(t) = a_3 \mathrm{e}^{-b_3 t}$, kde $a_3 = 0{,}605$ a $b_3 = 6{,}22 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}^{-1}$. Fit probíhal pouze pro časy od $t_{\mathrm{start}} = 8 \cdot 10^5\,\mathrm{s}$.



Obr. 5: Vývoj objemu vody v čase proložený exponenciální funkcí $f(t) = A\mathrm{e}^{-Bt}$, kde $A = 0{,}751$ a $B = 7{,}58 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}^{-1}$.