

Úvodem

Milí FYKOSáci,

nejspíš od šesté série a jejího úvodníčku čekáte něco jako vždy – je tu šestá série, je to poslední série, užíjte si její řešení.

Tentokrát ale začneme u zubaře. Nevím, jak vás, ale mě pobyt v jeho čekárně mírně řečeno sklíčuje, takže když se jednou hned vedle mě začal někdo bouřlivě smát, brala jsem to jako velmi ohavnou nesolidárnost. Tedy až do doby, než jsem zjistila, že to má tu jedinou omluvitelnou příčinu – četl Pratchetta.

Jak možná víte, sir Terry Pratchett bohužel minulý měsíc zemřel, a tak jsme se rozhodli tuto sérii věnovat jemu a jeho Úžasné Zeměploše a doufáme, že se vám bude líbit.

Organizátoři



Zadání VI. série



Termín uploadu: 19. 5. 2015 20.00

Termín odeslání: 18. 5. 2015

Úloha VI.1au

2 body

Želva A'Tuin, na jejímž krunýři stojí čtyři sloni nesoucí na svých hřbetech Zeměplochu, není žádný drobeček. Předpokládejme, že bychom byli znudění kulatostí naší Země a chtěli ji vyměnit za kruhovou placku se stejnou hmotností a hustotou a s tloušťkou $h = 1$ km nesenou vlastní želvo-slóní partou. V případě, že by naše želva cestou vesmírem vrazila špičkou ocasu do planety, za jak dlouho by si uvědomila bolestivý podnět, jestliže její ocas s centrální nervovou soustavou spojuje jediný dlouhý neuron a délka tohoto neuronu je přibližně stejná jako průměr naší planety? O kolik dříve/později by si bolest ve stejném případě uvědomila A'Tuin (délku neuronu považujte za ekvivalentní její délce, která činí 18 000 km)? Pro číselný odhad předpokládejme, že rychlost šíření vzruchu v nervové soustavě poněkud nadměrných tvorů je stejná jako u pozemských živočichů, u nichž činí $v \doteq 120 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Úloha VI.2 ... dýchej zhluboka

2 body

Mág Šedomil oslavil sté narozeniny již před drahnou dobou a začíná se pomalu obávat, že ho Smrt počítá svou dlouho odkládanou návštěvou. Rozhodne se proto, že se nechá zatlouct do kouzelné truhly, kam se k němu Smrt nedostane. Bohužel zapomněl řemeslníkům říci, aby přidali dýchací otvory. Vzduch v truhle zaujímá objem $V_0 = 4001$, objemový zlomek kyslíku je $\varphi_0 = 0,21$. Při každém nádechu a výdechu se zúžitkuje pouze $k = 20\%$ objemových kyslíku v dechovém objemu $V_a = 0,51$. Dechová frekvence mága po uzavření truhly postupně roste podle vztahu $f(t) = f_0\varphi_0/\varphi(t)$, kde $f_0 = 15 \text{ dech}\cdot\text{min}^{-1}$ je počáteční dechová frekvence a $\varphi(t)$ objemový zlomek kyslíku v čase t . Určete, za jak dlouho si pro Šedomila přijde Smrt, jestliže minimální obsah kyslíku ve vzduchu potřebný pro přežití je $\varphi_s = 0,06$.

Úloha VI.3 ... pracovní pohovor

4 body

Jedna z pracoven lorda Vetinariho má kruhový půdorys o poloměru R a je umístěna na ložiscích, díky nimž se může otáčet kolem své osy. Pro zajištění otáčení se používá motor, který může působit libovolným momentem síly. Při otáčení působí na podlahu místnosti třecí moment M_0 , nezávislý na rychlosti, který je shodný se statickým třecím momentem. Židle pro návštěvy je umístěna tak, že člověk na ní sedící pocítí účinky rotace pouze tehdy, přesáhne-li úhlové zrychlení hodnotu ε_0 . Určete, za jakou nejkratší dobu se může místnost otočit o 180° , aby návštěva nic nepoznala, a jaká práce je k tomuto otočení potřeba. Celková hmotnost místnosti, kterou můžete považovat za homogenní disk, je m .

Bonus Předpokládejte, že návštěvník pocítí vliv rotace tehdy, přesáhne-li úhlový ryv (změna zrychlení) hodnotu j_0 .

Úloha VI.4 ... těžkotonážní deska na želvě

5 bodů

Předtím, než byl dosažen a překročen okraj Zeměplochy a začaly být podnikány vědecké výpravy za potvrzením existence čtyř slonů, želvy a určení jejího pohlaví, si některé primitivní kmeny myslely, že síla, která je drží na Zeměploše, je dána superhustou deskou z koncentrovaného bylonebylia. Byla to opravdu velice primitivní představa, protože jak dnes již víme, například výprava, která potvrdila existenci želvy, neslavně dopadla tak, že se jejich člun utrlh a upadl. Tedy vlastně nedopadl. . .

Nicméně by nás zajímalo – jakou plošnou hustotu σ by bývala byla musela taková deska mít, aby na povrchu Zeměplochy blízko jejímu středu byl obyčejný předmět, při zanedbání magie, přitahován stejnou silou, jakou je gravitační síla na povrchu Zeměplochy? Uvažujte, že superhustá deska je opravdu velice tenká, a jak tvrdí pověsti, je umístěna $H = 8^4 \text{ m} = 4096 \text{ m}$ pod povrchem Zeměplochy. Deska má být dle bájí homogenní a hmotnosti jiných těles zanedbatelné.

Zanedbejte pohyby želvy a slonů. Za Zeměplochu si dosadte slovo Země, pokud jste nečetli dílo autora, pro kterého si přišel Smrt. Zeměplocha má pro účely této úlohy průměr přibližně přesně $d = 10\,000 \text{ km}$.

Úloha VI.5 ... hospodská rvačka

5 bodů

Při svém pobytu v Ankh-Morporku Dvoukvítek navštívil také hospodu. Nebyla by to dobrá hospoda, kdyby se tam nestrhla všeobecná rvačka, při které létají židle, flašky a další věci z jedné strany hospody na druhou. Dvoukvítek musí samozřejmě všechno pořádně zdokumentovat svým fotoaparátem. Teď zrovna fotí kuličku o poloměru R , která letí rychlostí v blízko rychlosti světla c . I v takových hospodách platí teorie relativity, ze které vyplývá, že Dvoukvítek by ve své klidové soustavě změřil kontrakci kuličky ve směru pohybu o faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Jaký poloměr kuličky ve směru pohybu zaznamená na fotografii se zanedbatelně krátkou expozicí? Fotoaparát zaujímá vůči kuličce obecnou polohu.

Úloha VI.P ... vody Zeměplochy

5 bodů

Všichni moc dobře víme, že je dobře zařízeno zásobování Zeměplochy vodou. A nikdo z nás nepotřebuje vědět jak. Co kdyby se ale stalo něco závažného a magie by přestala dobře fungovat? Za jak dlouho by se ocitla Zeměplocha bez vody? Pro jednoduchost můžete uvažovat pesimistickou situaci, kdy by nikdo vodu nijak nezadržoval. Dobře víte, že Zeměplocha má

průměr $d = 10\,000$ km, panuje na ní homogenní tíhové zrychlení $g \doteq 10\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a je dokonale kruhová. Opravdový celkový objem a rozložení vody na Zeměploše ve skutečnosti nikdo stejně nezná, takže můžete uvažovat, že voda homogenně pokrývá Zeměplochu, která je rovná a voda má výšku $H = 5$ m (to je hodně pesimistické, protože by pak všechno muselo stát pod vodou, nebo na kulech nad vodou). Cílem úlohy je nalézt uspokojivě přibližný model, který dává dobrý odhad hledaného času – nečekáme přesné řešení.

Úloha VI.E ... alchymistická

8 bodů

Na Zeměploše je regulérním povoláním alchymie. Proto jsme se rozhodli, že byste si to měli také zkusit. Představte si, že skládáte zkoušku, abyste mohli vstoupit do Cechu alchymistů.

Společně s brožurkou zadání série vám přišly tři zabalené vzorky kovů. Jedná se o tenké plátkové kovy – dávejte si pozor, abyste je nepoškodili a ideálně na ně přímo nesahejte. Vaším úkolem je zjistit, jaké (drahé?) kovy jsme vám zaslali. Kovy po vás nechceme zpátky – můžete tedy používat libovolné, i destruktivní postupy, ale uznáme pouze ty dostatečně vědecké. Vaším řešením tedy bude popis postupu a co nejpřesnější určení každého vzorku s tím, že je nutné, abyste uvedli u každého z nich jeho označení, které je na jeho přebalu. Nezapomínejte, že je cenné i určit, o které kovy se nejedná.

Poznámka Pokud by se někdo chtěl stát novým řešitelem a řešit tuto úlohu, nechtě co nejdříve napište na email alchymie@fykos.cz s tím, že zásilku může očekávat zhruba za týden až 10 dnů.

Úloha VI.S ... rozmixovací

6 bodů

Opište si funkci `iterace_stanMap` ze seriálu a pomocí následujících příkazů si vyberte deset velmi blízkých počátečních podmínek pro nějaké K .

```
K=...;
X01=...;
Y01=...;
Iter1 = iterace_stanMap(X01,Y01,1000,K);
...
X10=...;
Y10=...;
Iter10 = iterace_stanMap(X10,Y10,1000,K);
V Iter1 až Iter10 je tedy schováno tisíc iterací daných počátečních podmínek pomocí Standardní mapy. K tomu, abyste viděli, jak vypadá všech deset bodů po  $n$ -té iteraci, musíte napsat
n=...;
plot(Iterace1(n,1),Iterace1(n,2),"o",... ,Iterace10(n,1),Iterace10(n,2),"o")
xlabel ("x");
ylabel ("y");
axis([0,2*pi,-pi,pi],"square");
refresh;
```

"o" do příkazu `plot` píšeme, aby se body pro přehlednost vykreslily jako kroužky. Zbytek příkazů je pak zahrnut kvůli tomu, aby graf zahrnoval celý čtverec a měl ty správné popisky.

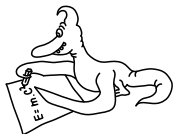
a) Nastavte nějaké silné kopání, K alespoň tak $-0,6$, a umístěte svých deset počátečních podmínek velmi blízko sebe někam doprostřed chaotické oblasti (tj. třeba „na špičku propisky“).

Jak se s iteracemi těchto deset počátečních podmínek oddaluje či přibližuje? Zdokumentuj-

te na grafech. Jak vypadá deset původně velmi blízkých počátečních podmínek po 1000 iteracích? Co z toho můžeme vyvodit o „míchavosti“ počátečních podmínek v dané oblasti?

- b) Vezměte opět nějaké poměrně silné kopání a umístěte svých deset počátečních podmínek poblíž svislé rovnováhy rotoru, tj. $x = 0$, $y = 0$. Jak se těchto deset počátečních podmínek oddaluje/přibližuje v čase? Co o jejich vzdálenosti lze říci po velkém počtu kopnutí?

Bonus Zkuste naprogramovat a vykreslit i chování nějaké jiné nakopávané mapy. (Pro inspiraci se můžete podívat do vzorového řešení minulé série.)



Řešení V. série

Úloha V.1 ... tuhost pana Plancka

2 body; průměr 1,46; řešilo 50 studentů

Možná jste už někdy slyšeli o takzvaných Planckových jednotkách, tj. jednotkách vyjádřených na základě fundamentálních fyzikálních konstant – rychlosti světla $c \doteq 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, gravitační konstanty $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ a redukované Planckovy konstanty $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. Takto bývá často zmiňován Planckův čas, Planckova délka a Planckova hmotnost. Co kdyby nás ale zajímala „Planckova tuhost pružiny“? Sestavte na základě rozměrové analýzy z c , G a \hbar vzorec jednotky odpovídající tuhosti pružiny $[k] = \text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$. Pro určení vzorce uvažujte, že neznámá a z rozměrové analýzy neurčitelná multiplikativní bezrozměrná konstanta je rovna 1.

Karel se učil kvantovku...

V zadání jsou k dispozici fundamentální konstanty v základních jednotkách SI, proto není potřeba jednotky dál převádět. Zapišme si Planckovu tuhost pomocí, zatím neznámých, mocnin α , β a γ těchto konstant

$$k_P = C c^\alpha G^\beta \hbar^\gamma,$$

kde C je v zadání zmíněná multiplikativní konstanta, kterou považujeme za $C = 1$. Přepišme si rovnici pomocí jednotek příslušných veličin

$$\text{kg}\cdot\text{s}^{-2} = \text{m}^\alpha \cdot \text{s}^{-\alpha} \cdot \text{m}^{3\beta} \cdot \text{kg}^{-\beta} \cdot \text{s}^{-2\beta} \cdot \text{kg}^\gamma \cdot \text{m}^{2\gamma} \cdot \text{s}^{-\gamma}.$$

Vzhledem k tomu, že se musí rovnat mocniny u každé jednotky na levé i pravé straně rovnice, získáváme tři rovnice o třech neznámých, které můžeme snadno vyřešit.

$$\begin{aligned} 1 &= -\beta + \gamma, \\ 0 &= \alpha + 3\beta + 2\gamma, \\ -2 &= -\alpha - 2\beta - \gamma. \end{aligned}$$

Sečtením všech tří rovnic eliminujeme neznámé α , β a vypočteme γ . Dosazením γ do první rovnice získáme β a dosazením například do druhé rovnice získáme α :

$$\begin{aligned} -1 &= 2\gamma, \\ \beta &= \gamma - 1, \\ \alpha &= -3\beta - 2\gamma; \end{aligned}$$

$$\gamma = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{3}{2}, \quad \alpha = \frac{11}{2}.$$

Hledané vyjádření tuhosti tedy je

$$k_{\text{P}} = \sqrt{\frac{c^{11}}{G^3 \hbar}}.$$

Po dosazení vyjde Planckova tuhost pružiny $k_{\text{P}} \doteq 7,54 \cdot 10^{78} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$.

K řešení úlohy lze také využít přímo soustavy Planckových jednotek. Obdobným způsobem jako výše lze získat Planckovu hmotnost m_{P} a čas t_{P} :

$$m_{\text{P}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \doteq 2,18 \cdot 10^{-8} \text{ kg},$$

$$t_{\text{P}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \doteq 5,39 \cdot 10^{-44} \text{ s}.$$

Aplikací rozměrové analýzy, tj. porovnáním mocnin jednotek hmotnosti a času u tuhosti, jednoduše získáme vzorec pro výpočet tuhosti pomocí Planckových jednotek. Číselný výsledek samozřejmě vyjde stejně.

$$k_{\text{P}} = \frac{m_{\text{P}}}{t_{\text{P}}^2} \doteq 7,54 \cdot 10^{78} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}.$$

K poslednímu vzorci lze také dojít úvahou: Planckova energie oscilátoru E_{P} souvisí s Planckovou délkou a Planckovou tuhostí vztahem $E_{\text{P}} = k_{\text{P}} l_{\text{P}}^2 / 2$. Protože budeme úlohu řešit rozměrovou analýzou a v zadání je hodnota bezrozměrné konstanty volena 1, budeme polovinu ve vzorci ignorovat. Vyjádříme z něj tuhost a energii vyjádříme pomocí známého Einsteinova vzorečku $E = mc^2$. Dále využijeme vztahu mezi rychlostí, vzdáleností a časem $c = l_{\text{P}} / t_{\text{P}}$. Těmito úpravami se dostáváme ke stejnému výsledku jako výše:

$$k_{\text{P}} = \frac{E_{\text{P}}}{l_{\text{P}}^2} = \frac{m_{\text{P}} c^2}{l_{\text{P}}^2} = \frac{m_{\text{P}}}{t_{\text{P}}^2} \doteq 7,54 \cdot 10^{78} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Na závěr poznamenejme, že Planckova soustava má využití především v kvantové teorii gravitace a v teorii strun, kde pomocí Planckových jednotek převedeme rovnice do bezrozměrného tvaru, který často výrazně zjednoduší algebraický zápis.

Komentáře k došlým řešením

Hodnocení bylo v případě této úlohy celkem přímočaré. Dva body jsme udíleli za správné řešení, jeden bod za částečně správné nebo vůbec neokomentované řešení.

Došlá řešení většinou používala některý z postupů uvedených ve vzoráku nebo metodu pokus-omyl. Někteří neupravili výsledek až do nějakého hezkého tvaru, tedy vzorce, kde by se každá veličina vyskytovala jen jednou a s příslušným exponentem.

Pro všechny úlohy platí, že je třeba jejich řešení slovně okomentovat, vysvětlit svůj postup, kde se vzaly použité vzorečky, co znamenají jednotlivé veličiny, zkrátka provést čtenáře svým řešením tak, aby na konci přesně věděl, odkud a jak jste došli k výsledku. Při psaní jednotek a veličin si dávejte pozor na typografii – obecně platí, že veličiny a proměnné se píšou kurzívou a jednotky a konstanty stojatým písmem.

Domínika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha V.4 . . . lijavec

4 body; průměr 2,85; řešilo 34 studentů

Podzimní počasí je občas stejně rozmařilé, jako to jarní, a tak nás nezřídká může na cestě zastihnout nečekaný liják. Někteří šťastlivci s sebou nosí deštník. Odhadněte, jak velkým tlakem dokáže hustý déšť na deštník působit a porovnejte tíhovou sílu deštníku s tlakovou silou deště. Parametry deštníku vhodně zvolte.

Mirek hledal důvody, proč nezavídat kolemjdoucím jejich záštitu proti dešti.

Najprv si vysvetlíme, ako môže dážď tlačiť na dáždnik, a následne pristúpime k odhadom potrebných veličín. Dopad dažďovej kvapky na dáždnik je klasická zrážka. Ale nevešajme hlavu, nebudeme musieť komplikovane rátať zrážku dvoch telies. Predpokladáme, že v našom prípade držíme dáždnik viac-menej pevne v rukách a stojíme pevne na zemi, teda ide iba o odraz telesa od rovinného povrchu.

Pri riešení zrážok nám často nezáleží na priebehu zrážky, ale iba na stave pred zrážkou a po zrážke. Preto si často vystačíme iba so zákonmi zachovania. Za každých okolností platí *zákon zachovania hybnosti* (ďalej ZZH). Na moment si predstavme, že kvapka je tuhé teleso a dopadá smerom nadol na naklonený rovinný povrch. V prípade takejto zrážky dvoch telies existujú dva extrémne prípady: *dokonale pružná zrážka* a *dokonale nepružná zrážka*.

Pri dokonale pružnej zrážke (predstavte si, že na zem hodíte gumenú skákajúcu loptu) nie je žiadne trenie, žiadna tepelná či iná nevratná strata energie, slovom zachováva sa celková mechanická energia (*zákon zachovania mechanickej energie*, ďalej ZZME). Klamal som, trochu si jednu zrážku zrátame. Pred zrážkou máme jedno teleso hmotnosti m (tuhá kvapka) s rýchlosťou \mathbf{v}_0 a druhé teleso hmotnosti M (Zem) s nulovou rýchlosťou. Po zrážke má kvapka rýchlosť \mathbf{v} a Zem rýchlosť \mathbf{w} . Zo zákonov zachovania dostávame

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}_0 &= m\mathbf{v} + M\mathbf{w}, \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mw^2. \end{aligned}$$

Pre rýchlosť \mathbf{w} zo ZZH dostaneme

$$\mathbf{w} = \frac{m}{M}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}),$$

ktorá v prípade $M \rightarrow +\infty$ je rovná nule.¹ Čiastočným dosadením do ZZME dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}|w.$$

V prípade $M \rightarrow +\infty$ je rýchlosť w nulová, a preto dostávame jednoduchý výsledok

$$v_0 = v.$$

Teda v prípade dokonale pružného odrazu od povrchu sa nezmení veľkosť rýchlosti telesa, iba jej smer. Pri dopade na naklonenú rovinu sa odrazí rovnakou rýchlosťou, ale ktorým smerom? Ak nepôsobí trenie, pôsobí rovina na teleso iba normálovou (kolmou na rovinu) silou. Zložka rýchlosti rovnobežná s rovinou preto ostáva konštantná. Jednoducho teda zistíme, že na to,

¹Pre úplnosť treba ešte dodať, že vektor $(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v})$ je konečný. Rýchlosť na začiatku \mathbf{v}_0 je konečná a rýchlosť \mathbf{v} nemôže byť nekonečná, lebo by bol porušený zákon zachovania energie (pred zrážkou je energia sústavy konečná, po zrážke musí byť tiež rovnaká, konečná). Zo ZZME môžeme dokonca priamo povedať, že $v \leq v_0$.

aby bola zachovaná veľkosť rýchlosti, sa teleso musí odraziť pod rovnakým uhlom, pod akým dopadlo (rovnako ako v prípade odrazu svetla na rovinnom zrkadle).

Podme sa pozrieť na druhý extrém, dokonale nepružnú zrážku (predstavte si, že na zem hodíte lepiúvú slizkú loptu). Vtedy nastáva nevratná strata energie a telesá sa po zrážke pohybujú spoločne, rovnakou rýchlosťou. V takom prípade platí len ZZH². Riešiť túto zrážku je však jednoduché. Po zrážke sa telesá musia pohybovať spolu, preto má po zrážke kvapka nulovú rýchlosť a je „prilepená“ k povrchu.

Skutočné zrážky sú však vždy niekde medzi týmito dvoma extrémami. Nazývajú sa *nedokonale pružné zrážky*. Vtedy zároveň existuje nejaké trenie (pre ktoré neplatí ZZME), ale zároveň trenie nespôsobí pričapenie telesa na povrch.

Ako však z toho získame tlakovú silu? Sila je spojená so zmenou hybnosti. Keďže ZZH platí stále, stačí zistiť, ako sa zmenila hybnosť kvapky, a zo ZZH poznáme, akú hybnosť preniesla na dáždňik + človeka + Zem. Pri dokonale pružnom odraze od roviny pod uhlom α je zmena hybnosti $\Delta\mathbf{p}$

$$\Delta\mathbf{p} = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = m[(0, v_0 \sin 2\alpha, v_0 \cos 2\alpha) - (0, 0, -v_0)] = mv_0(0, \sin 2\alpha, 1 + \cos 2\alpha).$$

V prípade dáždňika je uhol α odhadom v rozsahu $\langle 0^\circ, 45^\circ \rangle$ ³

Pri dokonale nepružnom odraze je zmena hybnosti

$$\Delta\mathbf{p} = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = m[(0, 0, 0) - (0, 0, -v_0)] = mv_0(0, 0, 1).$$

Potom sila pôsobiaca na dáždňik je

$$\mathbf{F} = -\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t},$$

kde je znamienko mínus, lebo celková zmena hybnosti je nulová a zaujíma nás zmena hybnosti sústavy dáždňika, človeka a Zeme; Δt je čas, za ktorý na dáždňik dopadli kvapky hmotnosti m . Takisto sa zameriame iba na silu pôsobiacu v smere nadol⁴. Dostávame teda pre veľkosť zvislej zložky

$$|F_z| = \frac{mv_0 k}{\Delta t},$$

kde sme zaviedli konštantný faktor k . V prípade dokonale pružného odrazu pre $\alpha = 0^\circ$ je $k = 2$, pre $\alpha = 45^\circ$ je $k = 1$, pre dokonale nepružný odraz je pre všetky uhly $k = 1$.

Teraz nasleduje malá diskusia ku správnej hodnote faktora k . V prípade skutočných odrazov (nedokonale pružných) sa bude k pohybovať medzi extrémnymi hodnotami 1 a 2. Rovnako väčší počet kvapiek dopadá vo väčšej vzdialenosti od osi dáždňika, čo rovnako ovplyvní strednú hodnotu k .

Tu však ešte treba dodať, že zatiaľ sme všetko ráтали pre tuhú kvapku. Dynamika zrážky môže byť komplikovaná (rôzne sily povrchového napätia na povrchu kvapky; deformačné, tlakové sily pôsobiace vo vnútri kvapky. . .) Po zrážke sa kvapka môže rozpadnúť na viacero drobných kvapiek, ktoré môžu ešte rotovať. Nejaká časť kvapky môže zostať „prilepená“ na povrchu dáždňika (a keďže pri daždi sú dáždňiky zvyčajne mokré, tak aj nejaká ostane). Môžeme

²ZZME neplatí. Platí však všeobecnejší princíp, zákon zachovania energie. ZZME nezahŕňal napríklad tepelnú energiu a iné.

³Samozrejme, existujú aj dáždňiky s väčším rozsahom až ku 90° , ale nám ide iba o odhad.

⁴To, že niekedy sa nejaká kvapka odrazila do boku a strčila do dáždňika nabok, nás netrápi. V časovom priemere sa pri veľkom počte kvapiek bočné sily vykompenzujú.

teda povedať, že skutočnosť je niekde medzi tým a hodnota faktora k je medzi 1 a 2. To nám na odhad stačí.

Teraz potrebujeme odhadnúť, akou rýchlosťou padajú kvapky v_0 a aký je hmotnostný prítok kvapiek na dáždnik $m/\Delta t$.

Kvapky vznikajú v mrakoch na kondenzačných jadrách, postupne sa spájajú do väčších a vplyvom tiaže padajú v podobe zrážok. Pri páde na nich pôsobí odporová sila vzduchu a pomerne skoro dosiahnu rovnovážnu rýchlosť (vtedy sú tiažová a odporová sila rovnako veľké a pôsobia v opačnom smere). Veľkosť kvapiek je zhora obmedzená kombináciou povrchového napätia a aerodynamiky. Kvapky sa postupne spájajú a zväčšujú, ale od určitej veľkosti sú väčšie kvapky vplyvom turbulentného prúdenia vzduchu rozdelené na menšie (povrchové napätie ich nestačí držať pokope). Polomer kondenzačných jadier je približne $0,1 \mu\text{m}$, polomer kvapiek v oblakoch je približne $10 \mu\text{m}$ a polomer dažďových kvapiek je približne $r = 1 \text{ mm}$.

Aká je teda terminálna rýchlosť kvapiek? Budeme predpokladať guľaté kvapky. Vypočítame to z rovnosti odporovej a tiažovej sily

$$F_{\text{od}} = G,$$

$$\frac{1}{2} \rho_{\text{vz}} v_0^2 C S = m g,$$

kde $\rho_{\text{vz}} = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je hustota vzduchu, $C = 0,47$ odporový koeficient gule, $S = \pi r^2$ plošný prierez kvapky, $m = 4\rho\pi r^3/3$ hmotnosť kvapky (kde $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je hustota vody) a $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ tiažové zrýchlenie. Po dosadení dostávame priamo vzťah pre terminálnu rýchlosť kvapiek

$$v_0 = \sqrt{\frac{8}{3C} \frac{\rho}{\rho_{\text{vz}}} r g}.$$

Pre kvapky v oblakoch vychádza približne $0,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dynamika v oblakoch je komplikovanejšia. V oblakoch prúdia vzdušné prúdy, ktoré sú rýchlejšie ako táto terminálna rýchlosť.

Pre dažďové kvapky $r = 1 \text{ mm}$ to vychádza približne $6,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, pre $r = 2 \text{ mm}$ približne $9,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Aký je hmotnostný prítok kvapiek na dáždnik $m/\Delta t$? To vieme určiť z hustoty vody, úhrnu zrážok na plochu počas dažďa a plochy dáždnika. Plocha dáždnika, na ktorú dážď dopadá, je približne $S_d = \pi R^2$, kde R je polomer dáždnika. Po malom prieskume rozmerov dáždnikov na internetovom obchode dôjdeme k odhadu polomeru R $40 \text{ cm} - 50 \text{ cm}$. Hodinový úhrn zrážok U pri daždi je bežne $1 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{h}^{-1}$ až $5 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{h}^{-1}$; pri poriadnom lejaku, či nárazovo je aj niekoľkonásobne väčší. Ale dážď môže byť ešte krutejší. Rekord v úhrne zrážok za 1 minútu namerali 26. novembra 1970 na karibskom ostrove Guadeloupe, a síce $U_{\text{max}} = 2280 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{h}^{-1}$. Hmotnostný prítok už potom ľahko vyjadríme ako

$$\frac{m}{\Delta t} = \rho S_d U.$$

Pre dážď $U = 5 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{h}^{-1}$ dostávame $0,9 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$, pre karibské „mrhlenie“ $0,4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Nakoniec nastáva porovnanie jednotlivých síl. Na odhad tiažovej sily potrebujeme hmotnosť dáždnika. Po predchádzajúcom malom prieskume vieme, že hmotnosť dáždnika m_d je približne $0,30 \text{ kg}$ až $0,35 \text{ kg}$, teda tiažová sila pôsobiaca na dáždnik je

$$G_d = m_d g \approx 3 \text{ N}.$$

Pre tlakovú silu pri daždi ($k \approx 1,5$; $v_0 = 6,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $m/\Delta t = 0,9 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$) dostávame

$$|F_z| = v_0 k \frac{m}{\Delta t} \approx 10 \text{ mN} = 0,003 G_d .$$

Pre tlakovú silu pri karibskom „mrholení“ ($k \approx 1,5$; $v_0 = 9,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $m/\Delta t = 0,4 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$) dostávame

$$|F_z| = v_0 k \frac{m}{\Delta t} \approx 6 \text{ N} = 2 G_d .$$

Aký je odhad tiažovej sily dažďovej vody, ktorá sa zachytila na dáždniku a spôsobuje záťaž? Hmotnosť vody na dáždniku po lejaku odhadneme ako $m_{\text{voda}} = 50 \text{ g}$ ⁵. Teda tiažová sila dažďovej vody je

$$G_{\text{vod}} = m_{\text{voda}} g \approx 0,5 \text{ N} = 0,15 G_d .$$

Tlaková sila pri daždi vyzerá pomerne malá. Dôvod je ten, že zatiaľ je všetko uvažované v pokojnej bezveternej atmosfére. Terminálna rýchlosť kvapiek je rýchlosť kvapiek voči vzduchu. Búrky, či lejaky sú spojené so silným vetrom. Vietor v nárazoch môže mať $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ až $35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, rekordný vietor bol zas nameraný 3. mája 1999 počas tornáda v Oklahome: $134 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Aká je samotná odporová sila vzduchu pri vetre? Pri odporovom koeficiente polgule $C_{\text{pol}} = 0,42$, priereze dáždnika $S_d = \pi R^2$ dostávame pre silný vietor $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ hodnotu

$$F = \frac{1}{2} \rho_v z v^2 C_{\text{pol}} S_d \approx 21 \text{ N} = 7 G_d ,$$

pre nárazy $35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ máme

$$F \approx 257 \text{ N} = 86 G_d$$

a pre oklahomské tornádo v priamom zábere

$$F \approx 3,8 \text{ kN} = 1\,300 G_d .$$

Môžeme z toho usúdiť, že tlaková sila mierneho dažďa je zanedbateľne malá voči tiaži dáždnika, ale pri silnejšom daždi môže dosiahnuť aj porovnateľnú hodnotu. Stále však významnejšiu rolu hraje sila vetra.

Jakub Kocák
jakub@fykos.cz

Úloha V.E ... sladíme

8 bodů; průměr 4,65; řešilo 23 studentů

Změřte závislost teploty tuhnutí vodného roztoku sacharózy na koncentraci za atmosférického tlaku.

Pikoš v zimě sladil chodník.

⁵Môžeme to odhadnúť jednoducho. Ak rozlejeme na rovný povrch vody, tak vďaka povrchovému napätiu má vrstva vody nejakú výšku. Maximálna výška vodnej kaluže je $h_{\text{max}} = 2\sqrt{\sigma/(\rho g)} \approx 5 \text{ mm}$, kde σ je povrchové napätie. Ak aproximujeme dáždnik guľovým vrchlíkom, tak jeho plocha vychádza $S_{\text{vr}} = 2\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1)R^2 \approx 0,92 \text{ m}^2$. Ak by bol dáždnik pokrytý súvislou vrstvou vody, dostaneme hmotnosť $m_{\text{max}} = h_{\text{max}} S_{\text{vr}} \rho \approx 5 \text{ kg}$. Odhadom však je pokryté približne jedno percento $p = 0,01$, preto dostaneme $m_{\text{voda}} = p m_{\text{max}} \approx 50 \text{ g}$.

Teorie

Pro vyjádření koncentrace roztoku budeme používat hmotností zlomek w_c , který je roven poměru hmotnosti m_c rozpuštěného cukru ku hmotnosti celého roztoku $m_{\odot} = m_c + m_v$, kde m_v je hmotnost vody, tedy

$$w_c = \frac{m_c}{m_{\odot}} = \frac{m_c}{m_c + m_v}. \quad (1)$$

Koncentraci můžeme vyjádřit také pomocí molárního zlomku x_c , tedy poměru látkového množství cukru n_c ku látkovému množství celého roztoku $n_{\odot} = n_c + n_v$, kde n_v je látkové množství vody v roztoku. Látkové množství je rovno poměru hmotnosti a molární hmotnosti, platí tedy

$$x_c = \frac{n_c}{n_{\odot}} = \frac{n_c}{n_c + n_v} = \frac{\frac{m_c}{M_c}}{\frac{m_c}{M_c} + \frac{m_v}{M_v}}, \quad (2)$$

kde $M_c \doteq 342,3 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ je molární hmotnost cukru (sacharózy) a $M_v \doteq 18,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ je molární hmotnost vody.

Ochlazujeme-li čistou vodu z teploty, při které je kapalná (např. $80 \text{ }^{\circ}\text{C}$), na teplotu, při které je tuhá (např. $-20 \text{ }^{\circ}\text{C}$), při určité teplotě dojde k fázové přeměně, tedy k tuhnutí vody na led. Teplota při této fázové přeměně je konstantní, přičemž ale k dokončení fázové přeměny (tedy ztuhnutí vody) je třeba ze vzorku stále odebírat teplo (tzv. latentní teplo, v tomto případě skupenské teplo tuhnutí).

Vložíme-li vodu do prostředí, ve kterém udržujeme teplotu pod teplotou tuhnutí vody, teplota vody se bude snižovat až k teplotě tuhnutí, na ní se na nějakou dobu zastaví a teprve poté se bude ochlazovat dále (viz obrázek 3a a také naměřená závislost na obrázku 4). Z naměřené závislosti teploty na čase je pak možné určit teplotu tuhnutí (resp. tání) vody.

Chování směsi dvou látek při různých teplotách a koncentracích vyjadřuje tzv. binární fázový diagram. Máme-li směs dvou látek dané koncentrace, dokážeme z něj vyčíst, jak se bude s měnící se teplotou chovat. V mnoha případech nás zajímá rovnovážný fázový diagram, tedy fázový diagram (pro sacharózu viz obrázek 1a), který zobrazuje rovnovážné stavy.

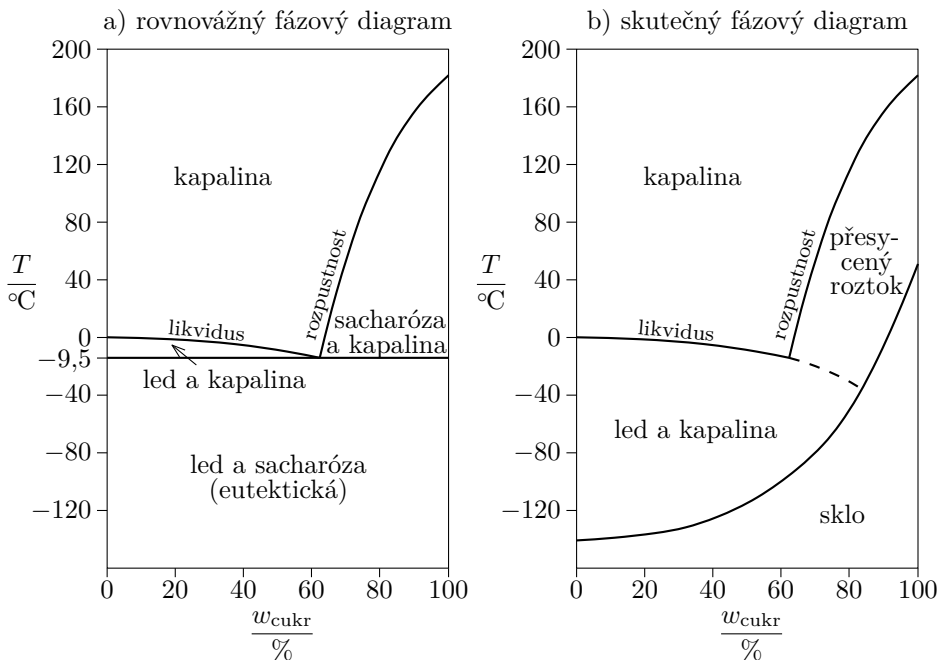
V případě sacharózy však rovnovážné stavy nejsou snadno dosažitelné, vzhledem k složitosti molekuly sacharózy a také kvůli vysoké viskozitě roztoků je jen malá pravděpodobnost, že dojde k nukleaci a růstu krystalu a vzniku rovnovážného stavu⁶. Skutečný fázový diagram je na obrázku 1b.

Popíšme nyní chování roztoku sacharózy o hmotnostním zlomku w_0 (nižší než je mez rozpustnosti) o pokojové teplotě, který začneme ochlazovat (dále budeme popisovat obrázek 2). Ve fázovém diagramu sestrojíme čáru $w_c = w_0$. Vidíme, že tato čára protíná křivku likvidu při teplotě T_l . Toto je teplota, při které v roztoku začínají růst krystaly vody (tj. začíná se vylučovat led). Jelikož se vylučuje z roztoku led, snižuje se koncentrace vody v roztoku, a tedy koncentrace sacharózy roste. Závislost koncentrace sacharózy na teplotě pak udává křivka likvidu – při teplotě $T_1 < T_l$ je hmotnostní zlomek sacharózy $w_1 > w_0$.

Pokud nyní náš experiment s ochlazováním vody v prostředí s nízkou teplotou opakujeme s roztokem o hmotnostním zlomku w_0 , při teplotě T_l dojde k výrazné změně rychlosti ochlazování (viz obrázek 3 a naměřená závislost na obrázku 6). Z naměřené závislosti teploty na čase pak můžeme pro danou koncentraci určit teplotu, při které začíná v roztoku krystalizovat voda.

Pro to, aby začala voda krystalizovat na led, je třeba, aby byla přítomna tzv. nukleační centra, tedy jakési zárodky krystalů. Ta mohou vzniknout náhodným setkáním více částic dané

⁶<http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/biocrystal/water-sucrose.php>



Obr. 1: Rovnovážný a skutečný binární fázový diagram voda–sacharóza.

Zdroj: <http://www.doitpoms.ac.uk>

látky (tj. v našem případě vody), což je ovšem brzděno snahou systému o vyrovnání koncentrace v celém objemu. V případě, že látku ochlazujeme příliš rychle, může dojít k podchlazení, tj. k ochlazení látky na teplotu nižší než je teplota tuhnutí, přesto však látka může zůstat kapalná. Například vodu je možné za normálního tlaku podchladiť⁷ až na $-42\text{ }^\circ\text{C}$. Pokud bychom vodu nebo roztok ochlazovali velmi rychle na nízkou teplotu (pro vodu⁸ je tato rychlost řádově $10^6\text{ }^\circ\text{C}\cdot\text{s}^{-1}$ a teplota asi $-135\text{ }^\circ\text{C}$) nedošlo by vůbec ke krystalizaci, látka by ztuhla jako amorfni, vytvořilo by se tedy sklo.

V případě, kdy dojde k podchlazení, je pak možné, že se teplota látky na krátkou dobu opět zvýší (viz třetí sloupec na obrázku 3 a naměřená závislost na obrázku 7). V tom případě může být obtížné zjistit teplotu, při které by při velmi pomalém ochlazování ke krystalizaci začalo docházet. V případě, že odebíráme teplo stálým výkonem, je možné např. ke křivkám ochlazování vytvořit tečny (viz obrázek 3) a hledat jejich průsečík.

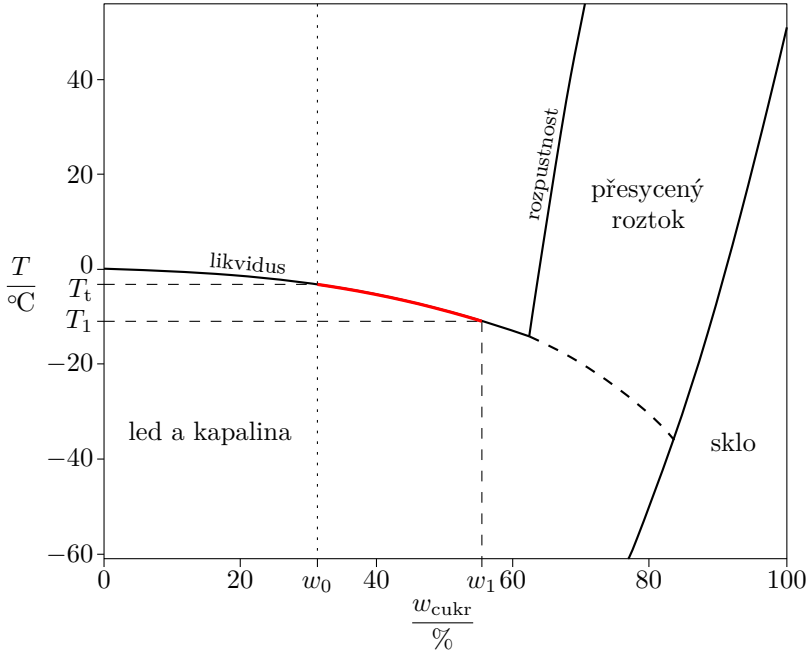
Model

Pokusme se nyní najít závislost teploty tuhnutí na koncentraci roztoku⁹ V rovnovážném stavu mezi ledem a tekutým roztokem pro chemické potenciály vztažené na 1 mol (v tomto případě

⁷[https://cs.wikipedia.org/wiki/Podchlazení_\(termodynamika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Podchlazení_(termodynamika))

⁸<http://www.benbest.com/cryonics/lessons.html#glass>

⁹Více na <https://tinyurl.com/freezingpoint-depression> a v Mortimer R. *Physical Chemistry*.



Obr. 2: Část fázového diagramu s vyznačenou změnou koncentrace kapaliny při změně teploty.

měrnou Gibbsovu energii) μ_1 , resp. μ_{\odot} platí

$$\mu_1 = \mu_{\odot}. \quad (3)$$

Pro chemický potenciál ideálního vodného roztoku při teplotě T platí

$$\mu_{\odot} = \mu_v + RT \ln(a_v), \quad (4)$$

kde μ_v je chemický potenciál čistého rozpouštědla (vody), a_v je aktivita roztoku a R je molární plynová konstanta. Pro aktivitu platí $a_v = x_v \gamma_v$, kde x_v je molární zlomek vody a γ_v je aktivní koeficient. Speciálně pro ideální roztok platí $\gamma_v = 1$. Dosazením (4) do (3) dostaneme podmínku pro rovnovážné stavy

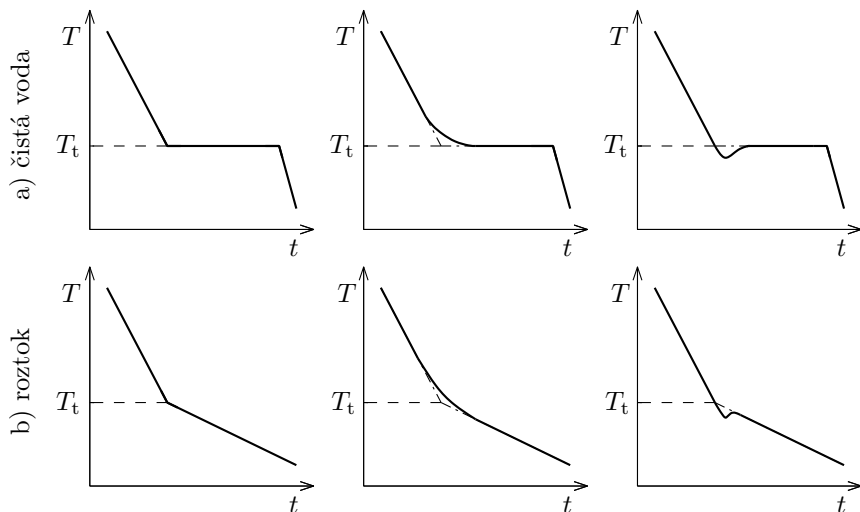
$$\ln(x_v) = \frac{\mu_1 - \mu_v}{RT}.$$

Obě strany rovnice zderivujeme podle teploty (za konstantního tlaku p), čímž dostaneme

$$\frac{d \ln(x_v)}{dT} = -\frac{\mu_1 - \mu_v}{RT^2} + \frac{1}{RT} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T} \right)_p - \frac{1}{RT} \left(\frac{\partial \mu_v}{\partial T} \right)_p, \quad (5)$$

kde index p za derivací značí, že se jedná o derivaci za konstantního tlaku p . Chemický potenciál μ můžeme vyjádřit pomocí molární entalpie H a molární entropie S jako $\mu = H - TS$, přičemž $S = (\partial \mu / \partial T)_p$. Využitím těchto vztahů můžeme rovnici (5) upravit na

$$\frac{d \ln(x_v)}{dT} = -\frac{H_1 - H_v}{RT^2} = \frac{\Delta H}{RT^2}, \quad (6)$$



Obr. 3: Možné křivky ochlazování pro čistou látku a pro roztok v případě konstantního výkonu ochlazování. Vyznačeny jsou optimální způsoby odečtu teploty fázového přechodu.

kde ΔH je rozdíl molární entalpie tuhé a kapalné fáze vody při rovnovážné teplotě (teplotě tuhnutí), tedy měrné molární skupenské teplo tuhnutí rozpouštědla (vody), které má jednotku $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$. Rovnici (6) zintegrujeme podle teploty od teploty tuhnutí T_0 čistého rozpouštědla do (hledané) teploty tuhnutí roztoku T_t , tedy

$$\int_{T_0}^{T_t} \frac{d \ln(x_v)}{dT} dT = \int_{T_0}^{T_t} \frac{\Delta H}{RT^2} dT. \quad (7)$$

Integrál na levé straně je roven

$$\int_{T_0}^{T_t} \frac{d \ln(x_v)}{dT} dT = [\ln(x_v)]_{T=T_0}^{T=T_t} = \ln(x_v)|_{T=T_t},$$

kde jsme využili skutečnosti, že má-li být teplota tuhnutí rovna T_0 , musí být molární zlomek vody roven 1 (tj. čistá voda), tudíž $\ln(x_v)|_{T=T_0} = \ln(1) = 0$. Pro přehlednost budeme dále x_v označovat molární zlomek roztoku s teplotou tuhnutí T_t , tedy budeme psát $\ln(x_v)|_{T=T_t} = \ln(x_v)$. Předpokládáme-li, že ΔH nezávisí na teplotě, integrál na pravé straně dokážeme snadno vypočítat, čímž dostaneme

$$\ln(x_v) = \frac{\Delta H}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_t} \right),$$

odkud již můžeme vyjádřit závislost teploty tuhnutí na molárním zlomku vody jako

$$T_t = \frac{\Delta H T_0}{\Delta H - R T_0 \ln(x_v)}. \quad (8)$$

Všimněme si, že tato teplota nezávisí na vlastnostech rozpuštěné látky, pouze na teplotě T_0 tuhnutí čistého rozpouštědla, jeho měrném skupenském teple tuhnutí ΔH a na molárním zlomku.

Pokud bychom předpokládali, že molární zlomek vody je blízký 1 (tj. koncentrace cukru je malá) a teplota tuhnutí roztoku se od teploty tuhnutí čistého rozpouštědla liší jen málo, pak bychom úpravou (8) dostali tzv. Blagdenův zákon, tj. že změna teploty tuhnutí roztoku oproti teplotě tuhnutí čistého rozpouštědla je přímo úměrná molárnímu zlomku rozpuštěné látky.¹⁰

Koncentraci při měření budeme vyjadřovat hmotnostním zlomkem cukru w_c , proto v rovnici (8) potřebujeme nahradit molární zlomek vody w_v . Využijeme toho, že molární zlomek vody je roven $x_v = 1 - x_c$, kde x_c je molární zlomek cukru. Z rovnic (1) a (2) pak vyjádříme

$$x_v = \frac{M_c}{M_c + M_v \frac{w_c}{1-w_c}}, \quad (9)$$

a tedy po dosazení (9) do (8) již známe teoretickou závislost teploty tuhnutí na hmotnostním zlomku cukru. Všimněme si, že tato závislost závisí i na molární hmotnosti cukru. Pokud bychom místo cukru používali kuchyňskou sůl, která má molární hmotnost nižší – asi $58,4 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ při stejném hmotnostním zlomku (tedy stejné hmotnosti látky v daném množství vody) by teplota tuhnutí byla nižší. Například pro hmotnostní zlomek 0,2 vychází pro cukr teplota tuhnutí asi $-1,3 \text{ }^\circ\text{C}$, zatímco pro sůl asi $-7,5 \text{ }^\circ\text{C}$, z čehož je zřejmé, že chodník je lepší v zimě solit nežli sladit.

Měření

Z výše uvedeného vidíme, že v případě roztoku neexistuje jedna pevná teplota, při které roztok tuhne, ale jedná se o teplotní interval. Budeme tedy měřit teplotu, při které roztok začíná tuhnout (začíná krystalizovat voda), tedy teplotu, při které pozorujeme výraznou změnu v rychlosti ochlazování. Naměřená závislost tedy bude křivkou likvidu ve fázovém diagramu (obrázek 1).

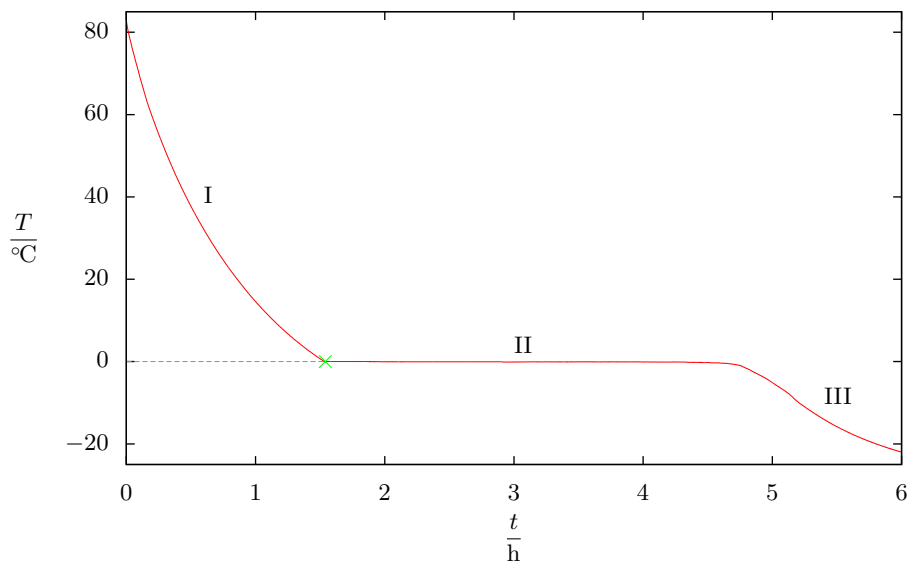
Při měření byl nejprve v nerezové nádobě válcového tvaru připraven roztok přidáním kostkového cukru o hmotnosti m_c do vody o hmotnosti m_v a jeho rozpuštěním. Poté byl roztok vložen do mrazáku, ve kterém se teplota pohybovala mezi $-25 \text{ }^\circ\text{C}$ a $-30 \text{ }^\circ\text{C}$.

Teplota roztoku během ochlazování byla v sekundových intervalech měřena pomocí teploměru Dallas DS18B20 v pouzdře TO92, které bylo celé ponořeno do roztoku tak, aby se nedotýkalo stěn nádoby.

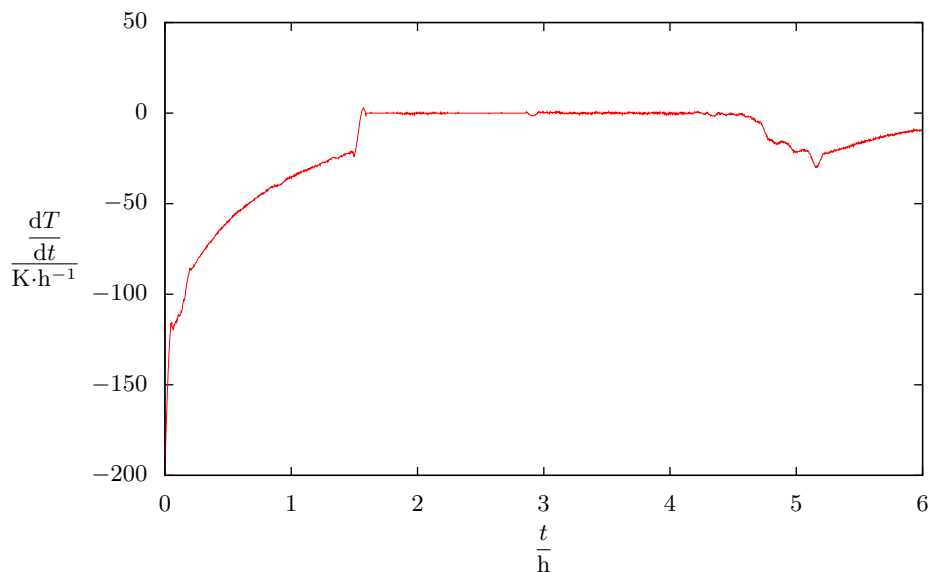
Nejprve byla změřena křivka chladnutí pro čistou vodu, viz obrázek 4. Vidíme, že teplota tuhnutí je dle očekávání $0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Měrná tepelná kapacita, tedy teplo nutné k ohřátí jednotkové hmotnosti dané látky o 1 K, je pro vodu $c_v = 4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a pro led $c_l = 2090 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Měrná tepelná kapacita ledu je poloviční, v případě, že bychom teplo odebírali látce stále stejným výkonem, měla by směrnice naměřené křivky před tuhnutím být dvojnásobná než po tuhnutí. Směrnici křivky získáme numerickým zderivováním naměřené křivky, viz obrázek 5. Vidíme, že rychlost ochlazování po zmrznutí dvojnásobná není, což může být způsobeno například tím, že fázová přeměna nebyla dokončena v celém objemu v jeden okamžik. Rychlost ochlazování je navíc závislá na okolní teplotě, která se v případě mrazáku měnila (na některých naměřených křivkách bylo zejména při nižších teplotách patrné, že při zapnutí kompresoru se teplota snižovala, po vypnutí se opět začala mírně zvyšovat).

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Freezing-point_depression#Calculation



Obr. 4: Naměřená křivka chladnutí vody. I – ochlazování vody, II – tuhnutí při teplotě tuhnutí, III – ochlazování ledu.



Obr. 5: Přibližně vypočítaná derivace křivky chladnutí vody na obrázku 4.

Z derivace na obrázku 5 můžeme ze znalosti měrné tepelné kapacity vody též odhadnout i měrné skupenské teplo tuhnutí vody, předpokládáme-li, že tepelný tok ze vzorku závisí pouze na jeho teplotě. Těsně předtím, než začne vzorek tuhnout (tedy již při teplotě 0°C), je vzorek ochlazován rychlostí asi $21,2\text{K}\cdot\text{h}^{-1}$, je tedy odebíráno teplo rychlostí $c_v \cdot 21,2\text{K}\cdot\text{h}^{-1} = 88\,600\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{h}^{-1}$. Voda tuhla asi 3,2h, tudíž odevzdala teplo $88\,600\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{h}^{-1} \cdot 3,2\text{h} = 280\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. Skutečná hodnota měrného skupenského tepla tuhnutí je $333,7\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$, náš odhad je tedy řádově správný.

Při měření s roztoky zejména vyšších koncentrací ($w_c > 30\%$) docházelo vždy k podchlazení (viz naměřená závislost na obrázku 7). Vzhledem k tomu, že výkon, kterým bylo odebíráno teplo, závisel na teplotě i čase, nebylo možné k určení teploty, při které začíná roztok tuhnout, použít postup z obrázku 3. Proto byla tato teplota odhadnuta dle obrázku 7. Z obrázku 3 je pak zřejmé, že skutečná teplota, při které roztok začíná tuhnout, je vyšší než ta, kterou jsme tímto postupem odečetli.

Při koncentracích 63,8% a 66,1% (roztoky o takto vysoké koncentraci bylo nutné připravit při zahřívání, neboť dle fázového diagramu na obrázku 1 je rozpustnost při pokojové teplotě nižší) se již nepodařilo roztok zmrazit. Při ochlazení na teplotu okolo -25°C měl roztok velkou viskozitu (odhadem vyšší než tekutý med při pokojové teplotě), dle fázového diagramu (obrázek 1b) by mělo jít o přesycené roztoky.

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1. Naměřenou závislost teploty, kdy vodný roztok sacharózy začíná tuhnout, na jeho koncentraci pak uvádíme na obrázku 8, a to včetně teoreticky vypočítaných hodnot dle rovnice (8).

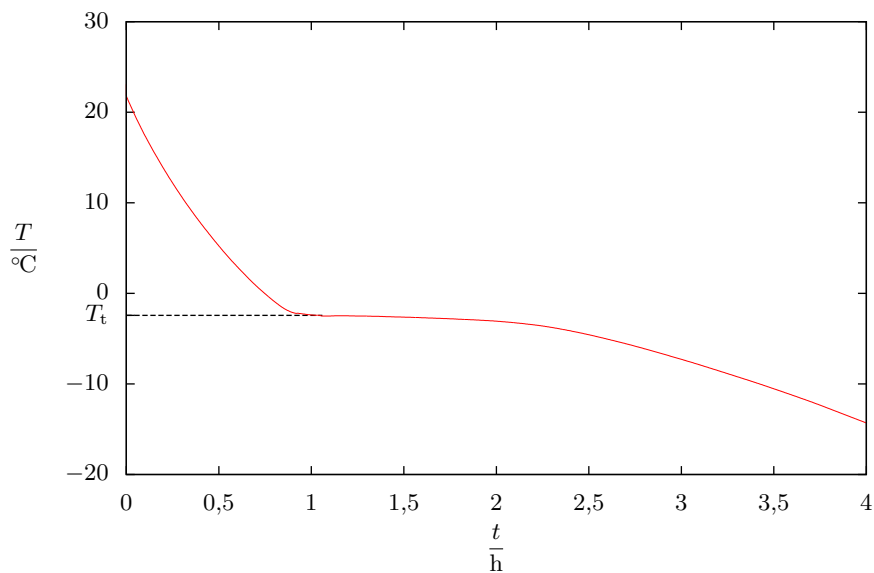
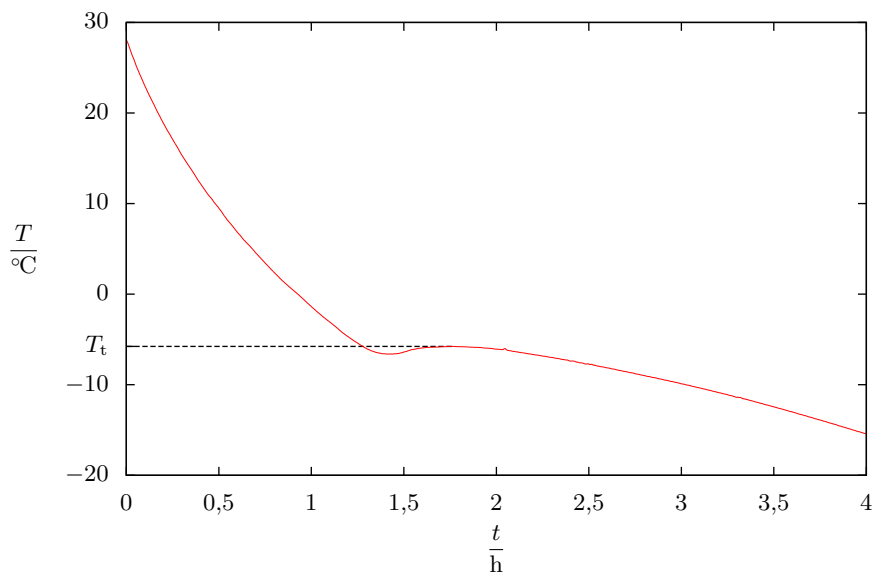
Nejistoty měření

Cukr i voda byly váženy váhou s rozlišením 0,01 g. Nejistotu měření hmotnosti cukru odhadneme na $\Delta m_c = 0,1\text{g}$. Nejistota měření hmotnosti vody však bude větší, jelikož část vody se může odpařit a v případě nešikovnosti se jí opět část může ztratit při míchání, odhadneme ji tedy na $\Delta m_v = 5\text{g}$. Nejistotu Δw_c měření hmotnostního zlomku cukru pak určíme ze zákona šíření nejistot jako

$$\begin{aligned} \Delta w_c &= \sqrt{\left(\Delta m_v \frac{\partial w_c}{\partial m_v}\right)^2 + \left(\Delta m_c \frac{\partial w_c}{\partial m_c}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left[\Delta m_v \frac{-m_c}{(m_c + m_v)^2}\right]^2 + \left[\Delta m_c \frac{m_v}{(m_c + m_v)^2}\right]^2} = \\ &= \frac{\sqrt{\Delta m_v^2 m_c^2 + \Delta m_c^2 m_v^2}}{(m_c + m_v)^2}. \end{aligned}$$

Co se týče měření teploty, použité detektory teploty mají rozlišení $0,0625^\circ\text{C}$ a výrobce udává přesnost lepší než $0,5^\circ\text{C}$. Vzhledem k tomu, že v mnoha případech docházelo k podchlazení, a tedy na naměřeném grafu nebyl jednoznačný bod pro odečtení, nejistotu měření teploty budeme uvažovat vyšší, odhadem $0,7^\circ\text{C}$ pro $w < 30\%$ a $1,0^\circ\text{C}$ pro $w > 30\%$.

Vypočítané nejistoty pro jednotlivá měření jsou v tabulce 1 a též vyneseny jako chybové úsečky na obrázku 8.

Obr. 6: Naměřené křivky chladnutí pro nižší koncentraci roztoku ($w_c \doteq 24\%$).Obr. 7: Naměřená křivka chladnutí roztoku pro vyšší koncentraci roztoku ($w_c \doteq 41\%$), kdy došlo k podchlazení.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty.

$\frac{m_v}{g}$	$\frac{m_c}{g}$	$\frac{w_c}{\%}$	$\frac{T_t}{^\circ\text{C}}$
137 ± 5	0,0	0,0	0,0 ± 0,7
100 ± 5	4,5 ± 0,1	4,3 ± 0,2	-0,4 ± 0,7
129 ± 5	8,2 ± 0,1	5,9 ± 0,2	-0,5 ± 0,7
94 ± 5	8,7 ± 0,1	8,5 ± 0,4	-0,5 ± 0,7
110 ± 5	10,8 ± 0,1	9,0 ± 0,4	-0,9 ± 0,7
143 ± 5	16,8 ± 0,1	10,5 ± 0,3	-0,6 ± 0,7
135 ± 5	21,3 ± 0,1	13,7 ± 0,4	-1,0 ± 0,7
164 ± 5	33,1 ± 0,1	16,8 ± 0,4	-1,7 ± 0,7
114 ± 5	30,2 ± 0,1	20,9 ± 0,7	-1,6 ± 0,7
134 ± 5	42,9 ± 0,1	24,2 ± 0,7	-2,5 ± 0,7
143 ± 5	53,8 ± 0,1	27,3 ± 0,7	-3,0 ± 0,7
106 ± 5	43,2 ± 0,1	28,9 ± 1,0	-2,9 ± 0,7
111 ± 5	52,0 ± 0,1	31,9 ± 1,0	-3,6 ± 1,0
87 ± 5	42,9 ± 0,1	33,1 ± 1,3	-4,0 ± 1,0
109 ± 5	64,7 ± 0,1	37,2 ± 1,1	-5,0 ± 1,0
108 ± 5	66,1 ± 0,1	38,0 ± 1,1	-4,4 ± 1,0
110 ± 5	76,6 ± 0,1	41,0 ± 1,1	-5,8 ± 1,0
104 ± 5	82,0 ± 0,1	44,0 ± 1,2	-6,6 ± 1,0
95 ± 5	82,5 ± 0,1	46,5 ± 1,3	-8,1 ± 1,0
111 ± 5	108,1 ± 0,1	49,3 ± 1,1	-8,6 ± 1,0
83 ± 5	83,2 ± 0,1	50,2 ± 1,5	-9,2 ± 1,0
124 ± 5	131,4 ± 0,1	51,4 ± 1,0	-11,0 ± 1,0
71 ± 5	91,3 ± 0,1	56,1 ± 1,7	-12,8 ± 1,0
92 ± 5	142,7 ± 0,1	60,9 ± 1,3	-19,2 ± 1,0
96 ± 5	169,5 ± 0,1	63,8 ± 1,2	nezmrzlo
82 ± 5	160,0 ± 0,1	66,1 ± 1,4	nezmrzlo

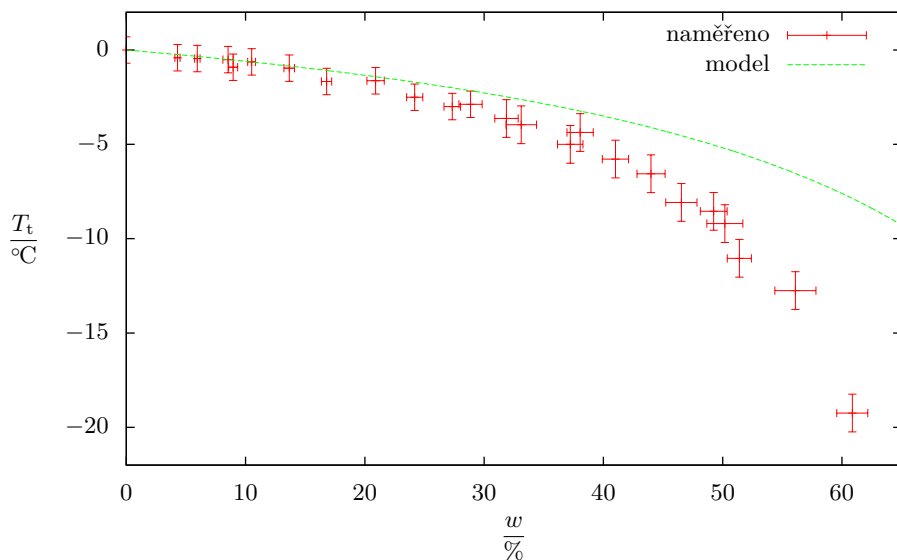
Diskuse

Na obrázku 8 můžeme srovnat naměřenou a teoreticky vypočítanou závislost. Vidíme, že pro koncentrace nad asi 20 % se naměřené hodnoty od teoreticky vypočítaných hodnot začínají rozcházet.

Teoretický model počítal s ideálním roztokem (rovnice (4)) a výsledek teoretického výpočtu bývá po několika dalších aproximacích používán pouze pro malé koncentrace (Blagdenův zákon). Pro přesnější výpočet zejména při vyšších koncentracích by bylo třeba použít jinou rovnici¹¹

Jednou z možných příčin nesouhlasu naměřených hodnot s teoretickým modelem je také postup odečítání teploty tuhnutí v případech, kdy došlo k podchlazení (obrázek 7). Dále je možné, že připravené roztoky z vody z vodovodu a kostkového cukru obsahovaly další nečistoty, které teplotu tuhnutí snížily.

¹¹X. Ge, X. Wang. Estimation of Freezing Point Depression, Boiling Point Elevation and Vaporization enthalpies of electrolyte solutions. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 2009.



Obr. 8: Naměřená závislost teploty, kdy vodný roztok sacharózy začíná tuhnout, na jeho koncentraci a teoreticky vypočítané teploty tuhnutí dle rovnice (8).

Závěr

Naměřili jsme závislost teploty, při které vodný roztok sacharózy začíná tuhnout, na koncentraci (viz obrázek 8), a to až do koncentrace asi 60%. Nakonec něco málo statistiky – pro naměření této úlohy bylo použito 366 kostek cukru.

Komentáře k došlým řešením

Mnoho řešitelů provedlo příliš málo měření (nejčastěji pro čtyři koncentrace), ze kterých pak vyzvovala různé závěry, například to, že závislost je lineární. Zejména v případech, kdy byly použity jen nízké koncentrace, nelze tento závěr z pouhého měření vyslovit, neboť změna teploty tuhnutí je srovnatelná s nejistotou měření. Jen málo řešitelů provedlo měření i pro nulovou koncentraci, která do závislosti jistě také patří a pomocí které si mohli snadno ověřit případnou chybu při měření teploty – v rámci přesnosti, které jsme schopni s domácími pomůckami dosáhnout, bude jistě teplota tuhnutí vody (i té z vodovodu) 0 °C.

Většina došlých řešení byla bohužel velice stručná a neobsahovala vše podstatné. Jediný, kdo podle nás do řešení uvedl vše, co by řešení experimentální úlohy mělo obsahovat, byl Přemysl Šťastný, proto také jako jediný dostal za experimentální úlohu plný počet bodů. Všem ostatním doporučujeme, aby si přečetli náš návod, jak na vypracování experimentální úlohy, na našem

webu,¹² jistě vám při řešení dalších experimentálních úloh pomůže.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha V.S ... mapovací

6 bodů; průměr 3,63; řešilo 8 studentů

1. Ukažte, že pro libovolné hodnoty parametrů \tilde{K} a T můžete Standardní mapu ze seriálu vyjádřit jako

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + y_{n-1}, \\y_n &= y_{n-1} + K \sin x_n,\end{aligned}$$

kde x, y jsou nějak přeškálovaná $\dot{\varphi}, \varphi$. Určete fyzikální rozměr K, x, y .

2. Podívejte se znova na model nakopávaného rotoru ze seriálu a vezměte tentokrát předávaný impuls $I(\varphi) = I_0$, po periodě T pak $I(\varphi) = -I_0$, po další zase I_0 a takto dokola kopejte rotor tam a zpátky.

a) Napište mapu $\varphi_n, \dot{\varphi}_n$ na základě hodnot $\varphi_{n-1}, \dot{\varphi}_{n-1}$ před dvojkopem $\pm I_0$.

b) Bude zkonstruovaná mapa chaotická? Proč ne?

c) Vyřešte $\varphi_n, \dot{\varphi}_n$ na základě nějakých počátečních podmínek $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ pro libovolné n .

Bonus Zkuste podle ingrediencí ze seriálu navrhnout kopání, které bude dávat chaotickou dynamiku. Dávejte ale pozor na to, že φ je 2π -periodické a že by se vám $\dot{\varphi}$ nemělo vyšroubovat kopáním donekonečna.

1. Víme, že $\sin(\varphi_n)$ je nelineární funkce, tj. pokud bychom nějak přeškálovali $\varphi \rightarrow C\varphi$, určitě obecně $\sin(C\varphi) \neq C \sin(\varphi)$ ani nic podobného. Při přeškálování φ tedy máme svázané ruce a musíme zvolit $x = \varphi$. Máme tedy mezivýsledek

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + T\dot{\varphi}_{n-1}, \\ \dot{\varphi}_n &= \dot{\varphi}_{n-1} - \tilde{K} \sin(x_n).\end{aligned}$$

Z toho už je jasné, že musíme zvolit $y = T\dot{\varphi}$. Když pak navíc druhou rovnici vynásobíme T dostáváme už pak bez dalších úprav $K = -\tilde{K}T$. Fyzikální rozměr x_n je tedy stejný jako φ , radiány (nebo nic, radiány nejsou opravdová fyzikální jednotka, jenom nám naznačují, že se jedná o úhlovou veličinu). Derivace $\dot{\varphi}$ má rozměr radiány za čas, takže po vynásobení časovou periodou T má y opět rozměr radiány (nebo nic). Podle seriálu snadno zjistíte, že $[\tilde{K}] = \text{s}^{-1}$, a tedy $[\tilde{K}T] = [K] = 1$.

2. Po jednu periodu T se rotor volně otáčí a pak se náhle změnila jeho úhlová rychlost o $+I_0/mR$. Protože jako φ_{n+1} značíme stav rotoru až po „dvojkopu“, a po prvním kopu jsme teprve v polovině tohoto procesu, budeme tento stav značit jako $\varphi_{n+1/2}$. Máme tedy

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1/2} &= \varphi_n + T\dot{\varphi}_n, \\ \dot{\varphi}_{n+1/2} &= \dot{\varphi}_n + \frac{I_0}{mR}.\end{aligned}$$

¹²<http://fykos.cz/sex/jak-na-to>

Po další periodě T se opět rotor volně otočil a jeho rychlost byla naopak zpátky pokopnuta o $-I_0/mR$, máme tedy

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_{n+1/2} + T\dot{\varphi}_{n+1/2}, \\ \dot{\varphi}_{n+1} &= \dot{\varphi}_{n+1/2} - \frac{I_0}{mR}.\end{aligned}$$

Pokud předchozí dvě mapy zkombinujeme, dostáváme

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + 2T \left(\dot{\varphi}_n + \frac{I_0}{2mR} \right), \\ \dot{\varphi}_{n+1} &= \dot{\varphi}_n.\end{aligned}$$

Tj. rychlost je po $\pm I_0$ kopnutí zase stejná (což se dalo čekat) a mohli bychom říct, že rotor rotuje volně s efektivní rychlostí $\dot{\varphi}_0 + I_0/(2mR)$, kde $\dot{\varphi}_0$ je počáteční rychlost. Můžeme tedy po čase $2nT$ napsat

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \varphi_0 + 2nT \left(\dot{\varphi}_0 + \frac{I_0}{2mR} \right), \\ \dot{\varphi}_n &= \dot{\varphi}_0.\end{aligned}$$

Co se týče bonusové otázky, mohli jste navrhnout jakoukoli mapu ve tvaru

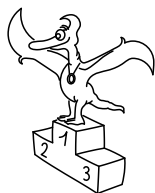
$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + T\dot{\varphi}_n, \\ \dot{\varphi}_{n+1} &= \dot{\varphi}_n + \kappa f(\varphi),\end{aligned}$$

kde $f(\varphi)$ musela být podle ingrediencí ze seriálu nelineární funkce. Těžší je navrhnout funkci, která je navíc periodická ve φ , aby to dávalo nějaký fyzikální smysl, a zároveň kopala „dopředu i dozadu“, tj. aby nepoháněla otáčení rotoru do nekonečně vysokých rychlostí. Můžete si představit, že zapínáte sílu podobně jako v seriálu, ale ta není ve všech bodech prostoru stejná, obecně pak dostanete

$$f(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)]$$

kde a_k, b_k jsou nějaké (i nulové) koeficienty. Pokud například vezmete sílu, která se mění ve vswislém směru, dostanete $f(\varphi)$ ve tvaru $\sin(\varphi) + c\sin(2\varphi)$. Obecně jsou všechny tyto mapy chaotické, jak to ale ověřit se dozvíte v příštím dílu seriálu.

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz



Pořadí řešitelů po V. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	197
1. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	4	4	1	4	1	1	6	–	21	70	109
2. Ondřej Knopp	G, Třeboň	4	4	3	4	–	–	–	3	18	78	97
3. Jan Preiss	G, Lovosice	2	4	4	4	1	2	–	–	17	61	96
4. David Němec	G, Tanvald	4	4	1	4	–	–	7	–	20	62	93
5. Filip Čermák	G Golianova, Nitra	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	88
6. Šimon Karch	G, Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	85
7. Denisa Chytilová	G J. Škody, Přerov	2	4	–	2	–	–	–	–	8	62	80
8. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	4	4	1	1	–	–	5	–	15	64	79
9. Jakub Suchánek	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	66	56
10.–11. Ondřej Chloupek	G, Mostecká, Chomutov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	52
10.–11. Ladislav Nagy	G a SOŠZZE Vyškov	4	4	0	1	–	0	–	–	9	39	52
12.–13. Jan Došek	G, Brandýs n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	47
12.–13. Dominik Starý	G, Benešov	4	–	–	–	–	–	–	–	4	71	47
14. Filip Náčovský	G, Dvůr Králové n. L.	2	4	–	1	–	–	–	–	7	42	42
15. Jaroslav Paidar	SPŠ, Masarykova, Liberec	–	0	3	–	–	–	–	–	3	52	33
16. Pavla Trembulaková	G, Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	1	4	–	5	44	31

Kategorie druhých ročníků

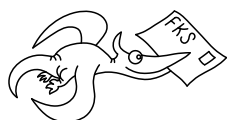
jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	197
1. Jáchym Bártík	G Havlíčkův Brod	4	4	4	3	–	3	5	6	29	74	137
2. David Vokrouhlický	G Jana Keplera, Praha	2	4	4	3	5	3	6	6	33	69	136
3. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	4	4	3	4	4	3	6	–	28	75	131
4. Přemysl Štastný	G, Žamberk	2	4	1	4	–	2	8	2	23	72	128
5. Daniël Pajer	G Jana Keplera, Praha	2	4	4	1	5	1	5	3	25	64	110
6. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	4	4	1	4	5	1	–	–	19	69	104
7. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	4	4	1	4	1	–	7	–	21	71	100
8. Štěpán Stenclák	G, Trinec	2	0	3	–	–	–	–	–	5	72	88
9. Adam Poloček	G, Havlíčkova, Český Těšín	0	4	1	4	0	2	5	–	16	52	80
10. Peter Kubaščík	G Kysucké Nové Mesto	4	4	1	4	1	–	–	–	14	65	73
11. Aleš Krčil	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	2	0	1	1	1	0	3	–	8	43	72
12. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	2	4	–	–	1	–	–	–	7	59	68
13. Jakub Kožušník	Wichterlovo G, Ostrava	2	4	1	4	1	3	5	–	20	49	67
14. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	0	0	2	2	1	1	–	10	44	66
15.–16. Kateřina Stodolová	G, Dašická, Pardubice	4	4	–	–	–	–	–	–	8	79	64
15.–16. Veronika Úlovcová	Čirkevní G, Plzeň	4	0	2	1	1	2	5	–	15	50	64

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	5	5	8	6	36	100	177
1. Tomáš Hrbek	G J. Ressela, Chrudim	1	2	2	3	1	3	5	3	20	71	126
2. Andrej Uhliarik	G Námestovo	2	2	3	4	1	2	3	-	17	57	88
3. Tomáš Fárnik	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	73
4. Pavel Souček	G, Nymburk	1	2	3	4	-	2	-	-	12	56	70
5. Kristína Mrázová	G, Český Krumlov	1	1	0	4	1	0	3	-	10	49	49
6.-7. Jakub Pilař	G J. Ressela, Chrudim	2	2	3	-	-	2	-	-	9	48	47
6.-7. Jiří Tuháček	Masarykovo G, Plzeň	1	2	1	-	-	3	4	-	11	62	47
8. Klára Stefanová	G B. Němcové, HK	1	2	-	-	-	-	-	-	3	61	46
9. Šimon Knoška	G A. Kmefa, B. Štiavnica	2	2	-	4	-	-	-	-	8	63	37
10. Peter Lučanský	G Bardejov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	49	36
11. Jakub Marták	G Golanova, Nitra	0	0	-	1	1	1	-	-	3	30	34
12. Marian Poljak	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	30
13. Kateřina Hladká	G, Karviná	-	-	-	-	-	-	-	-	-	49	28
14. Jozef Mišt	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	-	2	-	-	-	-	-	-	2	67	26
15. Tomáš Drozdík	G Andreja Vrábla, Levice	-	0	1	-	-	-	-	-	1	50	25
16. Anna Línhartová	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	2	-	-	1	-	2	-	-	5	55	24
17. Martin Vitoušek	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	23
18. Jakub Jambřích	G J. A. Raymana, Prešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	22
19. Tianyuan Lu	IMSA, Aurora, USA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	65	20
20. Sára Rosecká	G, Botičská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	28	18
21. Kryštof Kolář	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	2	0	2	5	-	-	-	11	74	17

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	5	5	8	6	36	100	177
1. Jakub Sláma	G Opatov, Praha	2	2	1	4	2	4	4	0	19	75	132
2. Domínika Jochcová	Wichterlovo G, Ostrava	1	1	3	2	5	3	5	-	20	75	124
3. Jozef Bucko	G PdC, Piešťany	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79	85
4. Filip Ayazi	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	83
5. Kateřina Smítalová	G, Dašická, Pardubice	2	2	1	4	-	-	-	-	9	66	69
6. Petr Doležal	G Z. Wintra, Rakovník	-	-	-	-	-	-	6	-	6	74	64
7. Luboš Krnáč	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	2	2	-	-	-	-	-	-	4	75	54
8. Kryštof Šulc	VOŠ, SOŠ a G, Evropská, Praha	-	-	2	-	1	-	-	-	3	61	41
9. Mojmír Poprocký	G Matyáše Lercha, Brno	2	2	-	-	-	-	-	-	4	77	37
10. Pavel Blažek	G a ZUŠ, Šlapanice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	31
11. Marek Biely	G, Považská Bystrica	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	30
12. Samuel Kočiščák	G Poštová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	81	29
13. Tomáš Kremel	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	22
14. Andreea-Alexandra Varasteanu	CNI Tudor Vianu, Romania	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25	20
15. Jakub Dolejší	G B. Němcové, HK	-	-	-	-	-	-	-	-	-	54	19
16. Michal Moravec	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	49	17
17. Michal Kalousek	G, Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	16
18. Jakub Dvořák	G, Botičská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	56	15
19. Jakub Hornáček	G V. Mihalika, Sered	-	-	-	-	-	-	-	-	-	82	14
20.-21. Petr Smíštel	G, Bučovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	13
20.-21. Miloslav Staněk	G a ZUŠ, Šlapanice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	81	13



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta


Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 

<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.