

Úloha VI.P ... světlo přesně podle norem 5 bodů; průměr 2,83; řešilo 24 studentů

Navrhněte rozmístění světel nad stolem tak, abyste dodrželi normy pro osvětlení. K dispozici máte dostatečné množství kompaktních zářivek (lidově úsporných žárovek) se světelným tokem $P = 1400$ lm. Normy říkají, že pro běžné pracovní úkony má být osvětlení pracovní plochy $E = 300$ lx. Zářivky můžete umístit do libovolných pozic na strop ve výšce $H = 2$ m nad pracovní plochu. Pro jednoduchost uvažujte čtvercovou pracovní plochu o straně $a = 1$ m a zářivku považujte za bodový izotropní zdroj záření. Odraz a rozptyl světla zanedbejte.

Karel se zamýšlel nad normami EU.

Připomeňme, že světelný tok odpovídá celkové světelné energii, která opustí zdroj za jednotku času. Jednotkou světelného toku však není watt (J/s), nýbrž lumen.¹ Osvětlení je pak světelný tok vztažený na plochu kolmou ke směru záření. Není-li plocha kolmá, uplatní se jen část toku odpovídající průmětu na normálu plochy, což můžeme pohodlně vektorově zapsat jako

$$E = \frac{P}{4\pi|\mathbf{R}|^2} \cos \alpha = \frac{P}{4\pi|\mathbf{R}|^2} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$$

kde \mathbf{R} je relativní poloha zdroje vůči osvětlovanému místu, \mathbf{n} je normála osvětlované plošky ($|\mathbf{n}| = 1$) a α je úhel mezi těmito dvěma vektory. Poznamenejme, že výše uvedený vzorec předpokládá zdroj, jenž svítí do všech směrů stejně.

Jedna kompaktní zářivka (dále KZ) osvětlí tedy bod \mathbf{r} na stole následovně

$$E_i(\mathbf{r}) = \frac{P}{4\pi|\mathbf{R}_i|^3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_i.$$

Počátek souřadné soustavy jsme zvolili ve středu stolu, takže normála povrchu stolu $\mathbf{n} = (0, 0, 1)^T$ a $\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}$, kde \mathbf{r}_i je poloha i -té KZ. Vzhledem k charakteru osvětlení můžeme příspěvky k osvětlení od jednotlivých KZ počítat, celkem tedy

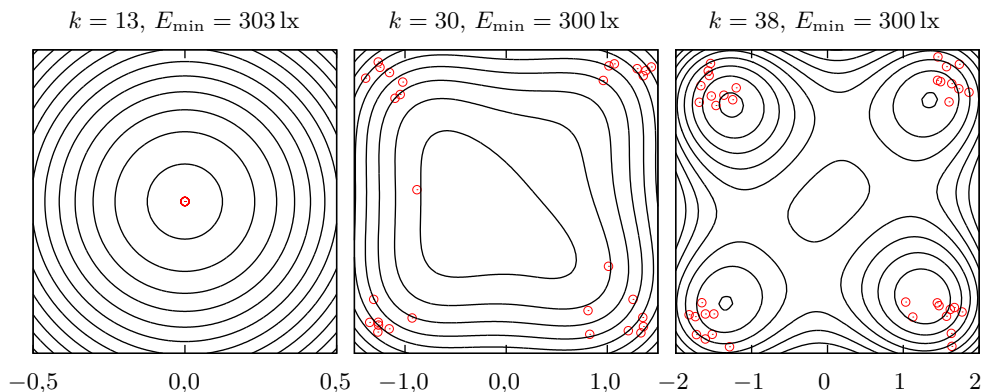
$$E(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^k E_i(\mathbf{r}),$$

kde počítáme s použitím k KZ.

Nyní přejdeme k číselným hodnotám. Nejprve se pokusme odhadnout, kolik budeme minimálně potřebovat KZ. Dosadíme-li hodnoty pro osvětlení přesně pod jednou KZ, vyjde $E \approx 28$ lx, což normu řádově nespĺňuje. Vyjdeme z jednoduchého rozmístění všech žárovek nad středem stolu (bodový zdroj :-). Pod jedenácti KZ je již $E \approx 306$ lx, ale to bychom nespĺnili normu na rozích stolu ($E \approx 257$ lx). Abychom s tímto rozmístěním normu spĺnili na celé ploše stolu, stačí, když ji zkontrolujeme na (libovolném) rohu, jelikož ten je od středu nejhůře osvětlen (kvůli vzdálenosti i úhlu dopadu). Tím dojdeme k počtu $k = 13$, s nímž i roh osvětlený $E \approx 303$ lx spĺňuje normu.

Z výše uvedených čísel se nabízí otázka, zda bychom vhodnějším rozmístěním jedenácti nebo dvanácti žárovek nedosáhli i dostatečného osvětlení rohů. Jelikož prostor netriviálních rozmístění je obtížně analyzovatelný ($\langle -a/2, a/2 \rangle^{22}$, respektive $\langle -a/2, a/2 \rangle^{24}$), předpokládejme vzhledem k symetrii úlohy řešení, které je invariantní vůči rotaci o 90° . Další zjednodušení budíž využití pouze úhlopříčky. Umístěme $\lfloor k/4 \rfloor$ KZ na každou úhlopříčku ve vzdálenosti $-t$ a t od

¹Pro monochromatický zdroj o frekvenci 540 THz jsou svázány poměrem 683 lm/W.



Obr. 1: Osvětlení stolů velikosti $a = 1 \text{ m}$ („nežihané“ triviální řešení), $a = 3 \text{ m}$ a $a = 4 \text{ m}$ z výšky $h = 2 \text{ m}$.

středu čtverce a $(k \bmod 4)$ KZ do středu. Prostor řešení je pak už jen jednodimenzionální a maximalizací osvětlení rohů dostáváme optimum $t = 0 \text{ m}$, takže triviální řešení s $k = 13$ je v této situaci optimální z hlediska k .

Závěrem poznamenejme, že kdyby byl poměr h/a menší, triviální řešení by již nebylo optimální (co do počtu KZ pro splnění normy) a bylo by nutné použít nějakou metodu vícedimenzionální (globální) optimalizace, např. simulované žíhání². Příklad takových výsledků je na obrázku 1, kde je dobře vidět, že zcela obecná optimalizační metoda si poradila (využili jsme implementaci simulovaného žíhání v programu GNU Octave³), ale s využitím dalších omezení (např. ona symetrie) bychom dosáhli i lepších výsledků.

Komentáře k došlým řešením

Častou chybou bylo, že řešitelé zapomínali zohlednit závislost osvětlení na úhlu dopadu paprsků. Mnoho řešení též bylo hodnoceno nížce kvůli nedostatečnému zdůvodnění zvoleného rozložení.

Mnozí si vzali (správně) na pomoc počítač při výpočtu osvětlení (obdiv ale patří i Jakubovi Dolejšimu, Kateřině Smítalové a Kláře Stefanové, kteří udělali zevrubnou analýzu „ručně“). O krok dál šel Filip Ayazi a počítač použil i k optimalizaci.

Michal Koutný
michal@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

²Viz 1. díl seriálu 21. ročníku (<http://fykos.cz/archiv/rocnik21/serial>).

³<http://fykos.cz/rocnik27/6-6-samin.zip>