Úloha III.3 ... pohárkovo vanová

4 body; průměr 2,31; řešilo 72 studentů

Vezměme prázdný válcový kelímek. Otočme ho dnem vzhůru a tlačme ho pod klidnou vodní hladinu. Jak vysoký bude vzduchový sloupec v kelímku v závislosti na jeho ponoření?

Karel se inspiroval tím, jak si dříve hrával s kelímkem ve vaně.

Uvažujme, že kelímek má plochu podstavy S a výšku h, a rovněž, že teplota okolního vzduchu T_a je stálá a rovná teplotě vody, do které kelímek tlačíme. Z hlediska jednoduchých termodynamických modelů můžeme tlačit kelímek dvěma způsoby: buď velmi rychle (tak, aby nestíhala probíhat výměna tepla mezi vzduchem v kelímku a okolím) anebo velmi pomalu (tak, aby teplota vzduchu v kelímku byla vždy rovna teplotě okolí, neboli, aby se teploty okolí a kelímku vždy stihly vyrovnat).

Uvažme nejdříve druhý scénář (*isotermický* model). Označme x vzdálenost okraje ponořeného kelímku od hladiny a $y(x)$ výšku vzduchového sloupce v kelímku. Těsně před ponořením byl objem vzduchu v kelímku $V_0 = Sh$ a jeho tlak byl atmosferický p_a. Ponoříme-li okraj kelímku do hloubky x, bude objem vzduchu v kelímku roven $V(x) = Sy(x)$. Přetlak uvnitř kelímku spočteme jako hydrostatický tlak v úrovni hladiny vody v kelímku, neboli $p(x) = p_\mathrm{a} + \varrho_\mathrm{v} g(x + y - h)$. Můžeme potom psát Boyleův-Mariottův zákon

$$p_\mathrm{a} Sh = p(x)V(x) = [p_\mathrm{a} + \varrho_\mathrm{v} g(x + y - h)]\, Sy\,.$$

Už odtud můžeme snadno vyčíst, že máme $y(x) \to 0$ pro $x \to \infty$: na levé straně rovnice máme konstantu a pokud jdeme s x do nekonečna, přičtením žádného relevantního y toto nekonečno nezrušíme, neboť $y > 0$. Můžeme toho docílit akorát tak tím, že pošleme y k nule. To souhlasí s našimi fyzikálními představami (ve velké hloubce je tlak vzduchu velký a tedy objem malý).

Vztah dále můžeme jednoduše upravit na

$$\varrho_\mathrm{v} g y^2 + [p_\mathrm{a} + \varrho_\mathrm{v} g(x - h)]\, y - p_\mathrm{a} h = Ay^2 + By + C = 0\,,$$

kde jsme označili

$$A = \varrho_\mathrm{v} g, \quad B = [p_\mathrm{a} + \varrho_\mathrm{v} g(x - h)]\,, \quad C = -p_\mathrm{a} h\,.$$

Dosazením do vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice máme y jako funkci x

$$y_{1,2}(x) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-[p_\mathrm{a} + \varrho_\mathrm{v} g(x - h)] \pm \sqrt{[p_\mathrm{a} + \varrho_\mathrm{v} g(x - h)]^2 + 4\varrho_\mathrm{v} g p_\mathrm{a} h}}{2\varrho_\mathrm{v} g}\,,$$

jejíž nejednoznačnost se nám příliš nelíbí. Nahlédneme ale, že vždy $A > 0$ a $C < 0$, což nám za požadavku $y > 0$ říká, že musíme zvolit znaménko plus. Máme tedy řešení

$$y(x) = \frac{-[p_\mathrm{a} + \varrho_\mathrm{v} g(x - h)] + \sqrt{[p_\mathrm{a} + \varrho_\mathrm{v} g(x - h)]^2 + 4\varrho_\mathrm{v} g p_\mathrm{a} h}}{2\varrho_\mathrm{v} g}$$

nebo také

$$y(x) = \frac{2p_\mathrm{a} h}{[p_\mathrm{a} + \varrho_\mathrm{v} g(x - h)] + \sqrt{[p_\mathrm{a} + \varrho_\mathrm{v} g(x - h)]^2 + 4\varrho_\mathrm{v} g p_\mathrm{a} h}}$$

pro všechna $x > 0$. Z posledního tvaru je dobře vidět, že $y(x) \to 0$ pro $x \to \infty$, jak jsme již odhalili výše.

Zde bychom s výpočty mohli skončit a spokojit se s výsledkem výše. To my ale neuděláme, protože chceme vědět, co se stane v případě *skutečného kelímku* (tedy kromě toho, že máme k výsledku jisté výhrady z hlediska estetiky). Výška typického kelímku totiž nepřesahuje řád desítek centimetrů, což je přibližně stokrát méně, než $H = p_\mathrm{a}/(\varrho_\mathrm{v} g) \doteq 10\,\mathrm{m}$, takže $h \ll H$. Tušíme tedy, že pro $x \ll H$ se budou dít zajímavé věci.

Abychom k výsledku došli rychle a relativně bezbolestně, povíme si o velmi užitečném nástroji, totiž *Taylorově větě*: je-li funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ n-krát diferencovatelná a má spojitých prvních $n-1$ derivací na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, pak pro všechna $\boldsymbol{t}$ z tohoto okolí platí[1]

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\boldsymbol{t}\cdot\nabla\right)^k f(\boldsymbol{x}) + O\left(|\boldsymbol{t}|^{n+1}\right),$$

kde $\nabla \equiv (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$ a $\partial/\partial x_i$ značí *parciální derivaci* podle proměnné x_i (což je to stejné jako normální derivace podle x_i, kdy všechny ostatní proměnné považujeme za konstanty). Jak se ukáže, nám bude stačit případ $n = 2$ a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, pro který máme

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{t}) = f(\boldsymbol{0}) &+ t_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} + t_2 \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} + \frac{1}{2}t_1^2 \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} + \frac{1}{2}t_2^2 \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} + \\ &+ t_1 t_2 \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} + O(|\boldsymbol{t}|^3)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Jelikož nás zajímá tvar y pro $x, h \ll H$, bude vhodné pro účely následujícího rozboru uvažovat o y jako o funkci x a h a zavést si nové proměnné $\xi = x/H$ a $\eta = h/H$. Budeme pak zkoumat limitu $(\xi, \eta) \to (0, 0)$. Přepišme si nejdříve y jako funkci ξ a η. Po jednoduché manipulaci dostáváme

$$y(\xi,\eta) = \frac{H}{2}\left(\eta - \xi - 1 + \sqrt{(\xi-\eta+1)^2 + 4\eta}\right).$$

Nahlédneme, že $y(\xi, \eta)$ splňuje v bodě $(0, 0)$ podmínky Taylorovy věty výše, a po rutinním cvičení z derivování odmocnin zjistíme, že $y(0, 0) = 0$, $\partial_\xi y|_{(0,0)} = 0$, $\partial_\eta y|_{(0,0)} = H$, $\partial_{\xi\xi} y|_{(0,0)} = 0$, $\partial_{\eta\eta} y|_{(0,0)} = 0$ a $\partial_{\xi\eta} y|_{(0,0)} = -H$. Dosazením do (1) pak dostaneme

$$y(\xi,\eta) = H\eta\,(1-\xi) + O(|(\xi,\eta)|^3)\,.$$

My ale předpokládáme $h \ll H$ (tedy $\eta \ll 1$) a jak jsme již avizovali výše, zajímá nás teď chování $y(x)$ pro $x \ll H$ (tedy $\xi \ll 1$). Potom ale můžeme zanedbat členy vyšších řádů a máme elegantní výsledek

$$y(x) \approx h\left(1 - \frac{x}{H}\right) \quad \text{pro } x, h \ll H.$$

Nemusíme snad připomínat, že podmínky $x, h \ll H$ jsou pro platnost této aproximace životně důležité a koneckonců, dostaneme-li se do oblasti $x \approx H$, vztah očividně selže pro $x > H$.

Pokud bychom se vrátili k prvnímu (*adiabatickému*) scénáři, došli bychom (analogicky jako výše) k rovnosti

$$p_\mathrm{a} h^\kappa = \left[p_\mathrm{a} + \varrho_\mathrm{v} g(x+y-h)\right] y^\kappa\,, \tag{2}$$

[1] Zde použijeme notaci, která se běžně používá a určitě stojí za to si ji osvojit: pro funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ píšeme, že $f(\boldsymbol{x}) = O(g(\boldsymbol{x}))$ pro $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, pokud se f na nějakém okolí $\boldsymbol{a}$ chová nejhůře jako g (až na vynásobení nenulovou konstantou). Přesněji, máme $f(\boldsymbol{x}) = O(g(\boldsymbol{x}))$ pro $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, pokud existuje $M > 0$ takové, že $|f(\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{x})| \leqslant M$ pro všechna $\boldsymbol{x}$ v nějakém okolí $\boldsymbol{a}$.

ze které pro hodnotu Poissonovy konstanty $\kappa \approx 1{,}4$ pro vzduch nelze analyticky vyjádřit y jako funkci x. Můžeme z ní ale snadno vyčíst, že opět máme $y(x) \to 0$ pro $x \to \infty$, neboť stále $y > 0$ a navíc $\kappa > 0$, takže y jde k nule, právě když y^κ jde k nule.

Rovněž můžeme opět uvážit případ $x, h \ll H$. Musíme zde ale rovnou aproximovat rovnici (2), protože přesný výsledek neznáme.[2] Přepíšeme nejdříve rovnici (2) do tvaru

$$y = \left(1 + \frac{x + y - h}{H}\right)^{-\frac{1}{\kappa}} h.$$

Máme ale $x + y - h < x$, takže $x + y - h \ll H$ a tedy

$$y \approx \left(1 - \frac{x + y - h}{\kappa H}\right) h,$$

odkud jednoduše vyjádříme y a za pomocí dalších přímočarých aproximací dostaneme přibližný výsledek

$$y(x) \approx h \left(1 - \frac{x}{\kappa H}\right) \quad \text{pro } x, h \ll H.$$

Všimněme si, že pro $\kappa = 1$, což by mělo odpovídat izotermickému ději, opravdu dostaneme výsledek, který jsme pro izotermický děj odvodili výše.

Kuba Vošmera
kuba@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[2] Podobně jsme mohli postupovat i v případě isotermického děje a dostali bychom se ke stejnému výsledku jako výše.