

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

vlaštovky už to vzdaly, ale pták FYKOSák není taková bábovka, aby se vypařil do teplých krajin, takže se nemusíte bát, úlohy druhé série tohoto ročníku FYKOSu jsou na světě a čekají, až si jejich řešením zpříjemníte a zkrátíte dlouhé podzimní večery. Nezapomeňte také na blížící se Fyziklání online, ať zvládnete sestavit ten nejlepší tým a všem ukázat, co ve vás je.

Hodně dobrých nápadů přeji

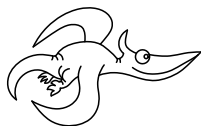
Organizátoři

Aktuality

Od druhé půlky října pořádáme nejen pro řešitele sérii přednášek¹ s fyzikální tematikou – ve stručnosti: modely atomu, kmitání, tepelné stroje, magnetostatika a speciální teorie relativity. Přednášky se budou konat v Praze na MFF UK v Troji každý druhý čtvrtek od 17. 10. do 12. 12.

Chcete sestavit soutěžní tým a poměřit své fyzikální znalosti s ostatními přímo od klávesnice počítače? Ve čtvrtek 5. 12. proběhne další ročník Fyziklání online.² Registrovat se můžete již nyní!

Ve čtvrtek 28. 11. se uskuteční na MFF UK Den otevřených dveří³, dopoledne v Národním domě, odpoledne fyzika na Karlově a matematika a informatika na Malé Straně. Studenti mohou dopoledne navštívit přednášku Libora Barta a ptát se zástupců jednotlivých kateder. Odpoledne budou na Karlově přednášky a exkurze, na Malé Straně především přednášky, ale i informatické kiosky a stánky.



Zadání II. série



Termín uploadu: 3. 12. 2013 23.59

Termín odeslání: 2. 12. 2013

Úloha II.1 ... Twix

2 body

Tyčinka Twix obsahuje 32 % polevy. Jde o váleček průměru 10 mm. Neuvažujte polevu podstavy. Jak je poleva tlustá?

Bonus Uvažujte lepší model tyčinky.

Úloha II.2 ... létavé dřevo

2 body

Máme dřevěnou kuličku ve výšce $h = 1$ m nad Zemí o poloměru $R_Z = 6378$ km a hmotnosti $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg. Kulička má poloměr $r = 1$ cm a je ze dřeva o hustotě $\rho = 550$ kg·m⁻³. Předpokládejte, že Země má náboj $Q = 5$ C. Jaký náboj q by musela mít kulička, aby se mohla vznášet nad Zemí? Jak tento výsledek závisí na výšce h ?

¹<http://fykos.cz/akce/prednasky>

²<http://online.fyziklani.cz>

³[http://www.mff.cuni.cz/verejnost/dod_program_na http://www.mff.cuni.cz/verejnost/hrom/201308/dod_hlavni_2013.pdf](http://www.mff.cuni.cz/verejnost/dod_program_na_http://www.mff.cuni.cz/verejnost/hrom/201308/dod_hlavni_2013.pdf)

Úloha II.3 ... týráni pístu

4 body

Máme nádobu o konstantním průřezu, která obsahuje ideální plyn a píst ve výšce h . Píst nejprve rychle (tzn. prakticky adiabaticky) stlačíme do výšky $h/2$, podržíme ho, než nastane tepelná rovnováha s okolím, a pak ho pustíme. Do jaké výšky píst vystoupá ihned? Do jaké výšky vystoupá za dlouhou dobu? Nakreslete pV diagram.

Úloha II.4 ... hvězdná velikost Měsíce

4 body

Je známo, že Měsíc v úplňku má zdánlivou hvězdnou velikost přibližně -12 mag a Slunce na denní obloze zase -27 mag. Pokuste se odhadnout, jakou hvězdnou velikost má Měsíc těsně před zatměním Slunce, pokud víte, že albedo Země činí 0,36 a albedo Měsíce 0,12. Předpokládejte, že světlo se po odrazu rozptyluje stejným způsobem na povrchu Země i Měsíce.

Úloha II.5 ... kelímek na vodě

5 bodů

Kužel obrácený podstavou vzhůru může držet ve vzduchu na stříkajícím proudu vody, který vychází ze země s konstantním hmotnostním průtokem a počáteční rychlostí v_0 . V jaké výšce nad zemí se bude kužel v rovnováze vznášet?

Bonus Vyšetřete stabilitu kužele v této poloze.

Úloha II.P ... Temelínská

4 body

Odhadněte, kolik jaderného paliva se spotřebuje v jaderné elektrárně na 1 MWh elektrické energie, kterou spotřebují lidé až v domácnosti. Srovnajte to se spotřebou paliva v tepelné elektrárně. Nezapomeňte uvažovat všechny možné ztráty.

Bonus Uvažte i energii, která se spotřebuje při těžbě a přepravě potřebných surovin.

Úloha II.E ... kutululů

8 bodů

Máme nakloněnou rovinu, na které postrčíme míček, aby se začal kutálet bez prokluzování směrem nahoru po nakloněné rovině. Změřte závislost rychlosti míčku na čase a určete závislost ztráty energie na čase. Nakloněná rovina nechť svírá úhel s vodorovnou rovinou úhel $\alpha \sim 10^\circ$. Nezapomeňte popsat parametry vašeho míčku.

Úloha II.S ... akční

6 bodů

- a) Jaký je fyzikální rozměr akce? (Jaké má tato veličina jednotky?) Má stejnou jednotku jako některá z fundamentálních konstant z první otázky k minulému dílu seriálu? Která?
b) *Od Nielse Bohra* – Uvažujte pohyb hmotného bodu po kružnici s dostředivou silou

$$F_d = ma_d = \frac{\alpha}{r^2},$$

kde r je poloměr kružnice a α nějaká konstanta. Pak

1. Spočítejte redukovanou akci \mathcal{S}_0 pro jeden oběh po kružnici jako funkci jejího poloměru r .
2. Určete hodnoty r_n , pro které je hodnota \mathcal{S}_0 přirozeným násobkem konstanty z podúlohy a).
3. Celková energie hmotného bodu je $E = T + V$. Pro tuto sílu je $V = -\alpha/r$. Vyjádřete energii E_n částic v závislosti na poloměrech r_n za pomoci uvedených konstant.

Tip Jistě jste ve fyzice probírali pohyb po kružnici a odpovídající vztahy mezi pohybovými veličinami. Použijte je a pak se integrace akce po obvodu kružnice s konstantním r podstatně zjednoduší (veličiny konstantní při integraci můžete před integrál vytknout). Nezapomeňte také, že samotný dráhový integrál „ničeho“ je prostě délka zintegrované dráhy.

- c) Poslední podúloha může znít komplikovaně, ale je pouhým cvičením na derivaci a integraci jednoduchých funkcí. Vystačíte si se základními tabulkovými derivacemi a integrály. Ověřte, že plná akce \mathcal{S} pro volnou částici pohybující se z bodu $[0; 0]$ do bodu $[2; 1]$ je pro trajektorii odpovídající přímočarému pohybu (první případ) minimální, tedy je větší v ostatních dvou případech

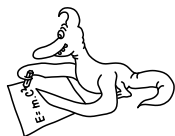
$$\mathbf{y}(t) = (2t, t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \left(1 - \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi} \sin 2\pi t, t\right),$$

$$\mathbf{y}(t) = \left(2t, \frac{e^t - 1 + t^2(t - 1)}{e - 1}\right),$$

kde e je Eulerovo číslo.

Tip Nejprve spočtete derivaci $\mathbf{y}(t)$, dosadíte do výrazu pro akci a zintegrujte.



Řešení I. série

Úloha I.1 ... zlatá přehrada

2 body; průměr 1,69; řešilo 178 studentů

Kolik cihliček (kvádříků) ze čtyřiadvaceti karátového zlata o rozměrech 10 cm, 3 cm a 1 cm by se vešlo do vodní nádrže Orlík? Jaký zhruba tlak bude působit na cihličku, která je na dně v nejhlubším místě nádrže?
Karel se chtěl topit ve zlatě.

Internetové zdroje uvádí⁴, že přehrada Orlík má objem $720\,000\,000\text{ m}^3$ a dosahuje hloubky až 74 m. Objem jedné zlaté cihličky činí $V_c = 3 \cdot 10^{-5}\text{ m}^3$. Počet zlatých cihliček, které by se do přehrady teoreticky vešly (při zanedbání toho, že cihličky svým tvarem přesně nekopírují tvar přehrady), se rovná podílu objemu přehrady ku objemu jedné cihličky, tj. $2,4 \cdot 10^{13}$ cihliček. Nutno však poznamenat, že takové množství zlata mnohonásobně přesahuje odhadované množství zlata, které bylo kdy vytěženo, neboť i kdybychom uvažovali horní hranici odhadu, pak by veškeré vytěžené zlato zhruba vydalo na krychli o hraně $17,5\text{ m}$.⁵

Za předpokladu, že cihličky budou narovnány do sloupců, tak na nejspodnější cihličku v místě největší hloubky působí tíha $7399 \div 7400$ cihliček, které jsou nad ní. Hustota ρ čtyřiadvaceti karátového zlata činí⁶ $19\,500\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Tíhu cihliček vypočteme jako $G = 7400 \cdot mg$, kde m je hmotnost jedné cihličky, přičemž $m = V_c \rho$. Tlak na nejspodnější cihličku pak určíme jako $p = G/S$, kde S je styčná plocha cihliček, tj. $p \div 14\text{ MPa}$.

⁴http://cs.wikipedia.org/wiki/Vodní_nádrž_Orlík

⁵<http://www.svatymaur.cz/cs/jine/stredoveke-zlatnicke-techniky/zajimavosti-o-zlate.html>

⁶<http://cs.wikipedia.org/wiki/Zlato>

Do přehrady Orlík by se teoreticky vešlo $2,4 \cdot 10^{13}$ zlatých cihlíček. Tlak na cihličku, která by byla na dně v nejhlubším místě nádrže, by byl přibližně 14 MPa.

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha I.2 ... nezastavitelný terminátor 2 body; průměr 1,24; řešilo 149 studentů

Jak rychle se pohybuje hranice světla a tmy (terminátor) na povrchu Měsíce? Je možné utíkat před tmou, když jste na rovníku? Karel se už zase díval na Futuramu. . .

První jev, který nás napadne a který má na pohyb terminátoru vliv, je zřejmě rotace Měsíce kolem jeho osy. Její periodu (vzhledem ke hvězdám, které považujeme za statické pozadí) označme⁷ P_{sid} (činí 27,32 d).

Uvažujme nejdříve, že je Měsíc vzhledem ke Slunci v klidu a pouze rotuje kolem vlastní osy, která je kolmá na rovinu ekliptiky⁸. Pak by terminátor oběhl povrch Měsíce právě jednou za čas P_{sid} a jelikož Měsíc rotuje kolem své osy rovnoměrně, můžeme pohyb terminátoru přisoudit konstantní úhlovou rychlost $\omega_{\text{sid}} = 2\pi/T_{\text{sid}}$ (tj. terminátor urazí v selenografické délce⁹ ω_{sid} radiánů za jednotku času). Pokud by nás zajímal pohyb Slunce po měsíční obloze, pozorovali bychom, že se Slunce pohybuje po Měsíční obloze s periodou P_{sid} , a tedy úhlovou rychlostí ω_{sid} .

První komplikace nastane, uvědomíme-li si skutečnost, že sklon rotační osy Měsíce vůči rovině ekliptiky není přesně 90° , ale činí přibližně $88,5^\circ$. To jistě bude mít na pohyb terminátoru vliv, protože se nám tímto vytvoří oblasti, kudy terminátor nikdy neprojde, tj. oblastí věčného polárního dne a noci (stále ignorujeme oběh Země kolem Slunce). Započítáme-li pak i vliv oběhu Země kolem Slunce jednou za T_{rok} (což vzhledem ke hvězdám činí 365,26 d), bude Měsíc vykazovat (byť v menší míře než na Zemi) střídání ročních období. A jelikož P_{sid} není vůči T_{rok} zrovna zanedbatelná (poměr $P_{\text{sid}}/T_{\text{rok}}$ je přibližně jedna třináctina), bude započítání tohoto vlivu na pohyb terminátoru méně triviální záležitost, a to obzvláště v blízkosti rotačních pólů. Naštěstí je odchylka sklonu rotační osy Měsíce od 90° velmi malá a provedše tento kvalitativní popis, budeme nadále pro jednoduchost předpokládat, že rotační osa je přesně kolmá na rovinu ekliptiky. Nás navíc bude zajímat pouze situace na rovníku, kde se roční pohyb terminátoru neprojevuje.

Dále je třeba zvážit vliv oběhu Měsíce kolem Země. Uvažujme proto, že Měsíc nerotuje kolem vlastní osy, ani že Země neobíhá kolem Slunce. Můžeme rovněž předpokládat, že paprsky přicházející od Slunce jsou rovnoběžné, neboť rozměry oběžné dráhy Měsíce kolem Země (řádově 10^8 m) jsou velmi malé ve srovnání se vzdáleností systému Země–Měsíc od Slunce (řádově 10^{11} m). V takové situaci se ale terminátor po povrchu Měsíce nepohybuje, a proto můžeme v rychlosti uzavřít, že oběh Měsíce kolem Země nemá na náš problém vliv.

Konečně je třeba započítat oběh systému Země–Měsíc kolem Slunce. Zastavíme-li rotaci Měsíce vzhledem ke hvězdám, vidíme, že se Slunce na měsíční obloze pohybuje s periodou T_{rok} (úhlovou rychlostí $\omega_{\text{rok}} = 2\pi/T_{\text{rok}}$), ale v opačném směru, než když Měsíc pouze rotoval kolem vlastní osy. Složíme-li tyto pohyby, bude se Slunce po měsíční obloze pohybovat úhlovou rych-

⁷ siderická perioda (*sidus* lat. hvězda)

⁸ rovina, ve které obíhá Země kolem Slunce

⁹ Selenografické souřadnice (ze starořeckého *selenē* – Měsíc) máme definované podobně jako zeměpisné souřadnice na Zemi, tj. vzhledem k rotačním pólům.

lostí $\omega_{\text{syn}} = \omega_{\text{sid}} - \omega_{\text{rok}}$ ve směru ω_{sid} .¹⁰ Propojením úvah o pohybu terminátoru a pohybu Slunce na obloze pak vidíme, že se terminátor v selenografické délce pohybuje úhlovou rychlostí $\omega_{\text{ter}} = \omega_{\text{syn}}$, což se na rovníku přepočte na absolutní rychlost $v_{\text{ter}} = \omega_{\text{ter}}R$, kde $R = 1738$ km je rovníkový poloměr Měsíce.

Pro obecnou selenografickou šířku λ dostaneme $v_{\text{ter}}(\lambda) = \omega_{\text{ter}}R \cos \lambda$, protože se terminátor pohybuje po rovnoběžce, jejíž obvod se mění s $\cos \lambda$. Čím více se však blížíme rotačním pólům, tím větší bude vliv ročního pohybu terminátoru a uvedený vztah pro výpočet $v_{\text{ter}}(\lambda)$ nám bude dávat nepřilíš přesné hodnoty.

Po dosažení číselných hodnot máme pro rychlost terminátoru na rovníku $v_{\text{ter}} = 15,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, čehož klusem snadno dosáhneme. Je však třeba poznamenat, že díky nenulové úhlové velikosti Slunce na Měsíční obloze nebude terminátor zdaleka tak ostrý jako ten ve Futuramě, nicméně bude určitě ostřejší než terminátor na Zemi, a to díky absenci atmosféry, ve které by se Sluneční světlo mohlo rozptylovat.

Kuba Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha I.3 ... bublina v ropovodu

4 body; průměr 2,41; řešilo 115 studentů

Máme malou kulatou bublinku plynu v kapalině, která teče nějakou rychlostí vodorovným potrubím. Jak se změjí její rozměry, když se dostane do místa, kde je potrubí zúžené? K čemu se to dá využít, nebo naopak kde to dělá problémy? Uvažujte laminární proudění.

Karel se zamyslel nad osvěžovačem vzduchu.

Uvažujme nestlačitelnou kapalinu, za kterou můžeme vodu i ropu v našich úvahách směle prohlásit. Zároveň se kapalina nikam neztrácí (pokud není potrubí děravé). Objem, který proteče průřezem potrubí za jednotku času, zůstává tedy konstantní – to je rovnice kontinuity. Zúžením potrubí z původního průřezu S_0 na S dojde ke zvětšení rychlosti proudění z původní v_0 na v podle vztahu

$$Sv = S_0v_0.$$

Nyní víme, že kapalina bude mít po zúžení potrubí rychlost

$$v = v_0 \frac{S_0}{S}.$$

Bernoulliho rovnice, která vyjadřuje zákon zachování energie v kapalině, nám dá do souvislosti změnu rychlosti se změnou tlaku v potrubí. Uvažujeme-li, že potrubí je vedeno vodorovně, pak můžeme Bernoulliho rovnici psát ve tvaru

$$\rho \frac{v^2}{2} + p = \rho \frac{v_0^2}{2} + p_0,$$

kde p_0 je tlak v potrubí o původním průřezu a

$$p = \rho \frac{v_0^2}{2S^2} (S^2 - S_0^2) + p_0$$

tlak ve zúženém potrubí.

¹⁰ ω_{syn} je odvozena ze *synodické* periody $T_{\text{syn}} = 2\pi/\omega_{\text{syn}}$ (ze starořeckého *syn hodō* – s cestou [Slunce]). Pokud by ω_{syn} vyšla záporně, znamenalo by to opačný směr pohybu Slunce po měsíční obloze.

K dalším úvahám o bublině chceme využít vhodnou rovnici popisující termodynamické chování plynu, kterým je tvořena. Řekněme, že naše bublina je koule o objemu V_0 resp. V po zúžení potrubí a je tvořena ideálním plynem. Platí pro ni tedy stavová rovnice ideálního plynu

$$pV = RnT,$$

kde T je absolutní teplota, n je látkové množství a R je molární plynová konstanta.

Doposavad jsme používali jednoduchých přiblížení, jako je dokonale nestlačitelná kapalina, ideální plyn nebo potrubí, ve kterém se nic neztrácí. A protože v jednoduchosti je krása, popíšeme si také pouze dva idealizované způsoby, kterými se plyn může dostat ze stavu s tlakem p_0 , kdy má objem V_0 , do stavu s tlakem p , kdy má objem V .

Bude-li zužování dostatečně pomalé (tak, aby se stihlo v každém okamžiku předat teplo a vyrovnat teploty), budeme moct děj považovat za izotermický a bude platit $p_0V_0 = pV$. Bublina tedy zúžením potrubí změní objem na

$$V = V_0 \frac{p_0}{p} = V_0 \frac{p_0}{\rho \frac{v_0^2}{2S^2} (S^2 - S_0^2) + p_0}.$$

Protože šlo o zúžení průřezu $S_0 > S$, vidíme, že objem bubliny se zvětšil.

Druhým případem, který popíšeme, je rovnovážný adiabatický děj. Při něm platí Poissonův zákon

$$pV^\kappa = \text{konst}$$

a dostáváme, že objem se opět zvětší, avšak tentokrát dle vztahu

$$V = V_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\kappa} = V_0 \left(\frac{p_0}{\rho \frac{v_0^2}{2S^2} (S^2 - S_0^2) + p_0} \right)^{1/\kappa}.$$

Poissonova konstanta $\kappa = c_p/c_v$ je podílem tepelných kapacit při stálém tlaku a stálém objemu.

Mezi izotermickým a adiabatickým dějem leží rovnovážné procesy zvané polytropické, které lze popsat rovnicí

$$pV^a = \text{konst},$$

kde $a \in (1; \kappa)$.

Izotermická expanze bubliny bude v tomto případě reálnější model, neboť uvažujeme poměrně malé rychlosti (proudění má být laminární), a proces tedy bude probíhat dostatečně pomalu, aby se teploty vyrovnávaly průběžně. Pokud by proces probíhal rychle, izotermický by nebyl a o použitelnosti adiabatického děje by se dalo pochybovat, protože rychlý adiabatický děj není rovnovážný a popsáný vztah neplatí. To nás ovšem nemusí až tak trápit, protože při příliš rychlé expanzi by se bublina pravděpodobně rozpadla na menší.

Další věc, která hraje podstatnou roli, ale kterou uvážíme pouze formou diskuse, je povrchová energie rozhraní kapalina-plyn. Na změnu povrchu fázového rozhraní je zapotřebí energie $W = \sigma \Delta S$, kde σ je povrchové napětí. Při energetické bilanci, do které bychom zahrnuli energii spojené se změnou objemu i povrchu, bychom museli uvažovat absolutní velikost bubliny, nejenom relativní změnu objemu resp. poloměru. Při započtení kapilárního tlaku by nám vyšlo, že se bublina zvětší méně, než nám vyšlo původně. Kapilární tlak na bublinu je $p_{\text{kap}} = 2\sigma/R$. Povrchové napětí vody při 20 °C je $\sigma = 72 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Chceme-li, aby relativní chyba, kterou

způsobí ve výpočtu zanedbání kapilárních efektů, byla menší než ε , musíme mít $p_{\text{kap}} < \varepsilon p$, kde p je tlak kapaliny v potrubí. Dosadíme-li za p_{kap} , dostáváme, že

$$\frac{2\sigma}{R} < \varepsilon p_{\text{atm}} \cdot \frac{p}{p_{\text{atm}}},$$

kde p_{atm} je atmosferický tlak. Dostáváme tedy, že poloměr R studované bubliny musí být větší než $10^{-6} (p_{\text{atm}}/p)/\varepsilon$ m, kde $2\sigma/p_{\text{atm}} \approx 10^{-6}$ m. Vidíme, že při běžných tlacích v potrubích, které se mohou pohybovat v rádech desítek atmosfér, budou bublinky, u kterých se výrazněji projeví kapilarita, velké řádově desítky až jednotky mikrometrů. Pro takovéto bublinky převáží kapilární efekty a změny vnějšího tlaku jejich poloměr měnit nebudou.

Tento efekt může dělat problémy v plyno-/ropovodu, kde přítomností bublin proteče méně dopravovaného paliva – plynové sporáky můžou blafat. Větší bubliny ve vodě v topení můžou způsobovat nežádoucí zvuky. Daleko horší následky může mít bublina v hydraulických systémech – například zavzdušnění brzd. V cévním řečišti může zvětšená bublina ve zúžení uvolnit trombus, případně sama o sobě způsobit vzduchovou embolii. Na druhou stranu, tento efekt nám třeba umožňuje snadnější rozprašování.

Tereza Steinhartová

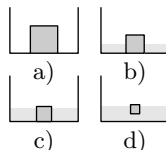
terkas@fykos.cz

Úloha I.4 ... kostka v bazénu

4 body; průměr 2,94; řešilo 122 studentů

Na dně prázdného bazénu s dnem plochy S leží ledová kostka (z vody) o hraně délky a . Kostka se rozpouští ze všech stran stejnoměrně tak, že si je stále podobná. Jaká její část se rozpustí, než začne plavat?

Lukáš koukal na zamrzlou Bílinu.



Pýtáme sa na stav v rovnováhe, tj. kedy je vztlaková sila pôsobiaca na kocku rovnako veľká ako tiaž kocky. Označme teda pôvodný objem kocky ako a^3 , nový objem v stave rovnováhy ako b^3 . Voda s hustotou ρ_v siaha kocke s hranou b a hustotou ρ_l do výšky h . Archimédov zákon vraví, že vztlaková sila pôsobiaca na kocku je rovná tiaži hmotnosti vody kockou vytlačenu

$$\rho_v h b^2 = \rho_l b^3 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\rho_l}{\rho_v} b. \quad (1)$$

Vidíme teda, že kocka sa začne vznášať až sa dostane pod hladinu približne 90 % jej objemu.

Všetka voda v bazéne plochy S okolo kocky vzišla z objemu ľadu $a^3 - b^3$. Platí teda

$$a^3 - b^3 = \frac{\rho_v}{\rho_l} (S - b^2) h,$$

kde s využitím rovnice (1) dostávame

$$a^3 - b^3 = S b - b^3,$$

z čoho je zřejmé, že rozpustená část kocky je rovná

$$\frac{a^3 - b^3}{a^3} = 1 - \frac{b^3}{a^3} = 1 - \frac{a^6}{S^3}.$$

Patrílo by sa povedať, že kocka neleží úplne na dne bazéna alebo napríklad, že predpokladáme, že dno bazéna nie je dokonale rovné a pod kockou sa nachádza tenká vrstvička vody.

Ak by totiž ležala kocka priamo na dne, tak hydrostatický tlak na dolnej podstave by bol nulový a hydrostatický tlak na hornej podstave by kocku tlačil neustále nadol, čím by sa od dna neodlepila vôbec.

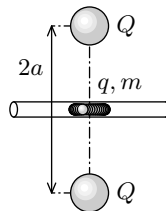
Radomír Gajdošoci
radomir@fykos.cz

Úloha I.5 ... korálek

5 bodů; průměr 3,29; řešilo 66 studentů

Bodový korálek o hmotnosti m a s nábojem q se pohybuje v rovné trubce bez tření. Trubka se nachází ve středu mezi dvěma nabitými koulemi, každá s nábojem $Q = -q$. Vzdálenost koulí je $2a$. Uvažujte elektrostatické působení a najděte frekvenci malých kmitů korálku okolo rovnovážné polohy.

Nápověda Uvědomte si, že velikost síly se při malých výchylkách mění pouze zanedbatelně. *Radomír se kutálel v trubce.*



Nejprve se podívejme, jak by problém vypadal bez jakýchkoli aproximací. Označme d okamžitou vzdálenost našeho korálku od každé nabitě koule. Pokud Δr označíme výchylku korálku z jeho rovnovážné polohy (na spojnici nabitých koulí), tak můžeme d vyjádřit jako

$$d = \sqrt{a^2 + \Delta r^2}.$$

Obě nabitě koule budou na korálek působit stejnou silou F_0 , která bude přitažlivá. Její velikost můžeme vyjádřit z Coulombova zákona elektrostatiky

$$F_0 = \frac{kq^2}{d^2} = \frac{kq^2}{a^2 + \Delta r^2}.$$

Pokud označíme α úhel, který svírá spojnice korálku s jednou z nabitých koulí a spojnice obou koulí, tak můžeme psát

$$\sin \alpha = \frac{\Delta r}{\sqrt{a^2 + \Delta r^2}}.$$

Pro velikost výsledné síly F působící na korálek můžeme z geometrie problému psát vztah

$$F = 2F_0 \sin \alpha.$$

Rovněž vidíme, že síla F působí proti směru výchylky korálku. Pak pro zrychlení korálku, které si označíme jako $\Delta \ddot{r}$ (označení pro druhou časovou derivaci Δr , tedy zrychlení), platí vztah

$$m\Delta \ddot{r} = -\frac{2kq^2 \Delta r}{(a^2 + \Delta r^2)^{3/2}} = -\frac{2kq^2 \Delta r}{a^3 \left[1 + \left(\frac{\Delta r}{a}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (2)$$

Díky tomu, že výchylka je velmi malá, můžeme rovnici (2) upravit, ve druhé mocnině se totiž Δr stane v poměru k a naprosto zanedbatelným. Například, pokud by poměr $\Delta r/a$ byl 10^{-2} (tedy 1%), tak poměr $(\Delta r/a)^2$ by byl 10^{-4} , což je již zanedbatelný zlomek. Z toho, že je výchylka malá, tedy víme, že $\Delta r/a$ je velmi malé číslo a $(\Delta r/a)^2$ lze ve jmenovateli oproti jedničce zanedbat. Rovnici pro zrychlení tedy můžeme upravit následovně

$$\Delta \ddot{r} = -\frac{2kq^2}{ma^3} \Delta r.$$

Tato rovnice nám připomíná rovnici pro harmonický oscilátor $a = -(k/m)\Delta x$, kde k je tuhost pružiny, m je hmotnost závaží, a je zrychlení závaží a Δx je jeho výchylka z rovnovážné polohy. Pro úhlovou frekvenci harmonického oscilátoru ω_h potom platí

$$\omega_h = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Tohoto řešení využijeme pro naši rovnici a můžeme psát, že frekvence kmitů při malé výchylce bude

$$\omega = \sqrt{\frac{2kq^2}{ma^3}}.$$

Tomáš Bárta

tomas@fykos.cz

Úloha I.P ... rychlost světa

5 bodů; průměr 2,40; řešilo 100 studentů

Jaký by byl svět, ve kterém by byly stejné hodnoty fundamentálních fyzikálních konstant, jenom rychlost světla by byla pouze $c = 1\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$? Jaký by byl takový svět pro život na Zemi, život lidí? A bylo by vůbec možné, aby v takovém světě existovali lidé?

Karel zase navrhl neřešitelnou úlohu.

Toto riešenie nebude vôbec úplné. Totiž rýchlosť svetla je konštanta, ktorá sa vyskytuje všade. A keď sa povie všade, tak sa to prejaví skutočne v toľkých aspektoch, že by sa na to dala napísať celá hŕba kníh. A veru to sa i stalo. Teoretický fyzik *George Gamow* sa snažil v sérii kníh *Pan Tompkins...* popularizovať modernú vedu verejnosti. V prvej knihe *Pan Tompkins v ríši divů* (1940) sa snaží priblížiť aspekty špeciálnej a všeobecnej teórie relativity vykreslením sveta pri zmene rýchlosti svetla o niekoľko rádov.

A práve to je prvá oblasť, ktorej aspekty by nás napadli, že sa objavia pri zmene rýchlosti svetla. Veď rýchlosť $c = 1\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1} \approx 278 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ už je porovnateľná s rýchlosťami, s ktorými sa stretávame a dokonca niektoré ju prevyšujú. Auta na diaľnici dosahujú rýchlosti $130 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$ (povedzme si na rovinu, niektoré i viac), čo je zároveň aj priemerná rýchlosť oblačnosti nad krajinou. Rýchlosť zvuku je približne $1\,200 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$. Dopravné lietadlá dosahujú maximálne rýchlosti práve okolo $1\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$, raketoplány dokonca $28\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$. Geostacionárne družine oblietajú Zem rýchlosťou $11\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$ a nižšie družice sa musia pohybovať rýchlejšie, aby sa udržali na dráhe, a to rýchlosťou približne $28\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$. Rovnako rýchlosť rotácie Zeme na rovníku je približne $1\,700 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$ a Zem sa dokonca pohybuje okolo Slnka priemernou rýchlosťou $107\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$.

Keďže podľa špeciálnej teórie relativity sa hmotné objekty nemôžu pohybovať rýchlejšie ako rýchlosť svetla, je jasné, že by to na Zemi nemohlo vyzeráť rovnako. Keď začnete zrýchľovať a približovať sa rýchlostiam porovnateľným rýchlosti svetla (napríklad jazdou v aute po diaľnici), začnú sa rozmery sveta v smere pohybu skracať podľa vzťahu

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

kde l_0 je pôvodný rozmer v smere pohybu, v je rýchlosť pohybu a l je nový kratší rozmer. A zároveň bude sa vám ubiehať čas pomalšie, než ľuďom na Zemi a to cez vzťah

$$t = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

kde t_0 je čas ktorý ubehne ľuďom na Zemi a t je čas, ktorý prežijete v aute. Pre nášeho cestného piráta je to približne skrátenie rozmeru a času o 1 %.

Ďalším javom, ktorý bude pri takejto rýchlosti badateľný, je Dopplerov jav. Vravíte si, že veď Dopplerov jav je aj tak bežne pozorovať pri sanitkách a podobne? No ale tentokrát ho budete môcť pozorovať aj pri svetle. Veru tak, pri pohybu od zdroja svetla sa vám budú vlnové dĺžky predlžovať a smerom ku zdroju skracovať. Čo znamená, že sa bude meniť farba svetla, ktorú uvidíte. Vlnová dĺžka sa bude meniť podľa vzťahu

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}},$$

kde λ je pozorovaná vlnová dĺžka svetla, λ_0 pôvodná vlnová dĺžka svetla a v rýchlosť pohybu ku zdroju. To znamená, že náš cestný pirát, ktorý ide rýchlosťou $v = 130 \text{ km} \cdot \text{hod}^{-1}$ smerom ku križovatke, na ktorej svieti jasná červená vlnovej dĺžky $\lambda_0 = 640 \text{ nm}$, tak vidí jasnú zelenú vlnovej dĺžky $\lambda = 560 \text{ nm}$ a cez križovatku v spokojnosti prejde. Asi väčšie prekvapenie budú mať šoféri, čo namiesto zelenej uvidia na semafore modrú farbu.

No ale keď sa už len pozrieme na rýchlosti makrosvetla i mikrosvetla, tak je naša nová hranica rýchlosti svetla mnohokrát prekračovaná a často i o niekoľko rádov. Preto bude svet vyzerat inak. Má vôbec zmysel rozmýšľať, ako bude vyzerat? Budeme tu môcť existovať? Nuž ani veľmi nie. Keď sa pozrieme na Schwarzschildov polomer R , ktorý vyjadruje kritický polomer, pri ktorom prechádza teleso v čiernu dieru. Ten závisí podľa vzťahu

$$R = \frac{2GM}{c^2},$$

kde G je gravitačná konštanta a M je hmotnosť telesa. Pre Zem hmotnosti $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ dostávame približne polomer $R_Z = 1 \cdot 10^7 \text{ km}$, čo je poznateľne viac, než skutočný polomer Zeme. Naša planéta by bola čierna diera. A čoby len Zem, i Slnko by bolo čiernou dierou. Pomaly sa naskytá otázka, čo by nebolo čiernou dierou. Tak skúsime odhadnúť veľkosť objektov, ktoré sa nepremenia v čiernotu. Uvažujme teleso guľového tvaru polomeru R a odhadnutej hustoty $\rho \approx 5000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Hmotnosť takého telesa m teda bude

$$m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho,$$

kde V je objem telesa, gule. Dosadíme do Schwarzschildovho vzťahu, položíme Schwarzschildov polomer polomeru telesa a vyjadríme polomer. Dostaneme

$$R = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi\rho G}} \approx 170 \text{ km},$$

čo znamená, že planéty, planétky, asteroidy a iné vesmírne skaly väčšie ako tento polomer sa premenia na čierne diery. I naša hviezda Slnko, čo by znamenalo, že by nebol ani zdroj svetla, ktorý je pre existenciu nášho života dôležitý.

Otázka je rovnako, ako by sa správal vesmír. Vývoj vesmíru sa dá predpovedať Einsteino-
vými rovnicami poľa zo všeobecnej teórie relativity. Samozrejme, to už je iná partia. Ako sme
už videli v prípade čiernych dier, tak zmenšenie rýchlosti svetla sa dá chápať ako relatívne zvý-
šenie gravitačnej konštanty alebo skôr relatívne zvýšenie účinnosti gravitácie. Preto môžeme
odhadnúť podobný efekt na vývoj vesmíru. Vo vesmíre so silnejším prejavom gravitácie, by sme
sa mohli dostať ku uzatvorenému typu vesmíru, ktorý časom môže skončiť veľkým kolapsom.

Samozrejme zmena rýchlosti svetla by mala veľa prejavov v bežnom živote i existencii života.
Preto pri hodnotení riešení som uznával rozumné množstvo javov, nápaditosť a jedinečnosť.

Komentár k riešeniam

Medzi časté chyby, čo sa vyskytovali v riešeniach, boli tvrdenia, že zmenou rýchlosti svetla
sa zmení veľkosť metra/škálovanie priestoru/škálovanie času. Jednotka meter bola historicky
zvolená. Zmena definície metra by samozrejme zmenila rýchlosť svetla na rýchlosť v zadaní,
ale zároveň by sa zmenili všetky iné konštanty, k ktorých sa meter vyskytuje. V tom sa tento
prípád líši od zadania úlohy. Iné fundamentálne konštanty by sa tiež zmenili.

Rovnako, keď sa v rovnici vyskytovala rýchlosť svetla, tak bol problém odhadnúť, ktoré
veľičiny/konštanty by sa zmenili a ktoré nie. Napríklad v prípade rovnice

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0},$$

kde ε_0 je elektrická permitivita vákua a μ_0 magnetická permeabilita vákua. Pri zmene hodno-
ty rýchlosti svetla sa preto musí jedna, druhá alebo obe konštanty zmeniť, aby vzťah platil.
Hodnota elektrickej permitivity vákua pochádza z Coulombovho zákona a je konštantou funda-
mentálnej sily – elektromagnetickej interakcie. Magnetizmus je prejav relativity. Keď sa skom-
binuje Coulombova sila s teóriou relativity, dostaneme magnetizmus. Magnetizmus je najstarší
pozorovaný prejav teórie relativity. Preto zostane rovnaká elektrická permitivita a magnetická
permeabilita sa zväčší. To znamená, že by boli magnetické sily omnoho silnejšie.

Samozrejme, zadanie nie je úplne jednoznačné, ktoré konštanty sú považované za fundamen-
tálne. Dobrým príkladom na ukázanie tejto nejednoznačnosti je konštanta jemnej štruktúry α
určená vzťahom

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c},$$

kde e je elementárny náboj a \hbar redukovaná Planckova konštanta. Táto konštanta je úplne
bezrozmerná, a teda nezávisí na systéme jednotiek, ktorý používame. Je teda fundamentálnou
konštantou. No ale ak by sa zmenila rýchlosť svetla, čo sa potom stane? Zmení sa α , \hbar , e ,
či ε_0 ? O ε_0 sme sa už vyjadrili, náboj elektrónu je takisto konštanta zo štandardného modelu
a redukovaná Plancková konštanta je základná konštanta kvantovej mechaniky. Evidentne sme
sa dostali do patovej situácie, a preto sa riešenie mohlo pojať viacerými spôsobmi. Buď si
zvolíme, že sa zachovajú bezrozmerné fundamentálne konštanty alebo fundamentálne konštanty
s rozmermi.

Pri konštante jemnej štruktúry ešte chvíľu ostaneme. Popularizačná literatúra uvádza, že
zmena tejto konštanty o 4% by viedla k tomu, že by sa vo hviezdach pri fúzii netvoril uhlík.
A teda život založený na uhlíku by nemohol existovať v takom svete. Dokonca sa uvádza, že

ak $\alpha > 0,1$, tak by Coulombické odpuzování zabránilo akejkolvek nukleárnej fúzi. Človek by si pomaly aj začal myslieť, že niečo na tom antropickom princípe je.

Jakub Kocák
jakub@fykos.cz

Úloha I.E ... Ohni to, neohýbej to!

8 bodů; průměr 4,24; řešilo 66 studentů

Změřte vzdálenosti vrypů na difrakční fólii pomocí světla ze třech různobarevných LED-diod.

Karel rozfořoval rozpočet.

Teorie

Dopadá-li světlo na mřížku, dochází k difrakci. Protože difrakci pozorujeme ve vzdálenosti l velké vzhledem ke vzdálenosti vrypů d na mřížce a velikosti osvětlené části mřížky, můžeme užít aproximace, že paprsky dopadající do daného místa na stínítko jsou rovnoběžné. Dle obrázku 1 platí

$$\sin \alpha = \frac{\Delta}{d}. \quad (3)$$

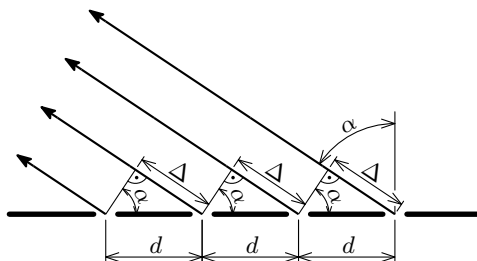
Aby v místě na stínítku určeném úhlem α (viz obrázek 2) došlo ke konstruktivní interferenci (a bylo v tomto místě tedy lokální maximum a my na stínítku viděli světlo), musí být dráhový rozdíl Δ roven celočíselnému násobku vlnové délky λ , tedy

$$\Delta = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z},$$

odkud již dostaneme podmínku pro maximum

$$\sin \alpha = \frac{k\lambda}{d}. \quad (4)$$

Obdobným způsobem bychom dostali podmínku pro minimum (pro které musí být dráhový rozdíl roven lichému násobku poloviny vlnové délky). Minima však v našem experimentu detekovat nebudeme.



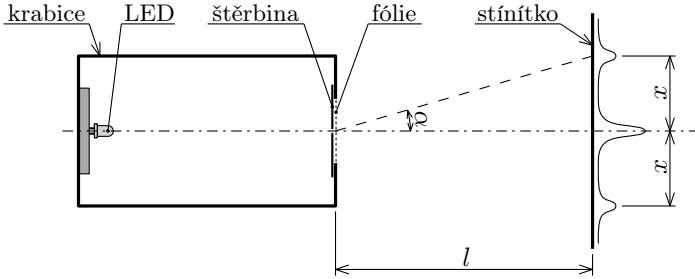
Obr. 1: Difrakce na mřížce, světlo dopadá zespodu kolmo na mřížku, pozorujeme pod úhlem α .

Budeme měřit polohu maxim na stínítku, nikoliv úhel. Z obrázku 2 plyne

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}. \quad (5)$$

Z rovnic (4) a (5) pak vyjádříme vzdálenost vrypů na difrakční fólii

$$d = \frac{k\lambda\sqrt{x^2 + l^2}}{x}. \quad (6)$$



Obr. 2: Uspořádání experimentu, za stínítkem je schematicky znázorněn očekávaný průběh intenzity.

Dosud jsme uvažovali, že difrakční fólie je rovnoběžná se stínítkem. To se nám však v praxi naprosto přesně nepodaří. Jestliže stínítko otočíme, obraz na něm se zdeformuje tak, že na jedné straně budou maxima blíže, na druhé dále. Jestliže je úhel malý, budou rozdíly menší. Uvažujme, že stínítko svírá s osou fólie úhel β (v ideálním případě $\beta = 90^\circ$). Pak dle sinusové věty a za využití vlastností funkce sinus platí

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{l}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Tento vztah bychom měli použít místo vztahu (5). Dále uvažujme nad tím, co se stane, nebude-li naopak fólie rovnoběžná s osou, ale bude s ní svírat úhel γ (v ideálním případě $\gamma = 90^\circ$). Uvažujme zdroj světla v nekonečnu (resp. tak daleko, aby vzdálenost zdroje od fólie byla mnohem větší než vzdálenost vrypů na fólii). Pak světlo, které v daný okamžik opustilo zdroj, dorazí na některé části fólie dříve, na některé naopak později. Potom se dráhový rozdíl při průchodu dvěma sousedními otvory mřížky zvětší o $d \cos \gamma$ a můžeme upravit vztah (3) na

$$\sin \alpha + \cos \gamma = \frac{\Delta}{d}.$$

Pak můžeme vyjádřit vzdálenost vrypů na difrakční fólii

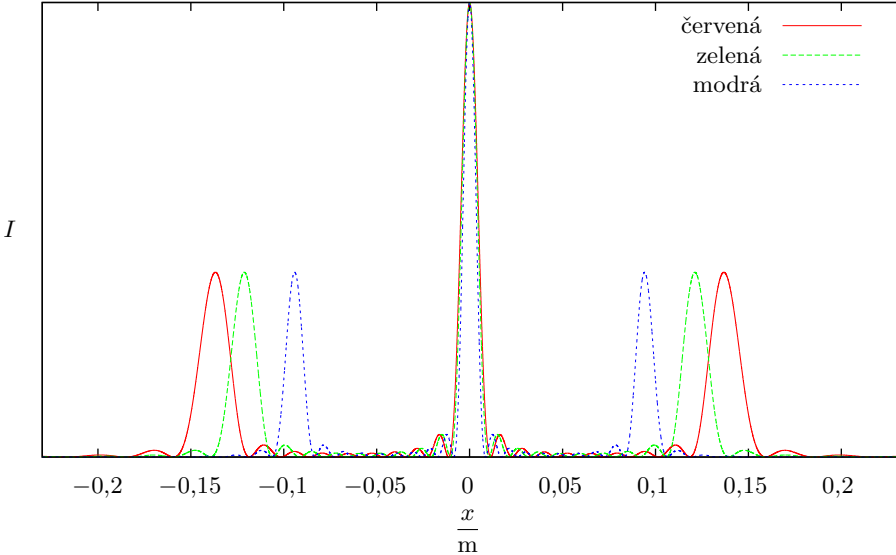
$$d = \frac{k \lambda}{\frac{x \sin \beta}{\sqrt{x^2 + l^2 - 2xl \cos \beta}} + \cos \gamma},$$

přičemž pro $\beta = \gamma = 90^\circ$ samozřejmě dostáváme vztah (6). Jelikož jde o poměrně složitý výraz, budeme dále předpokládat, že fólie i stínítko jsou na osu dokonale kolmé.

Úvahou výše jsme zjistili polohu minim a maxim, nedokážeme však jednoduše zjistit závislost intenzity na úhlu. To by bylo složitější, proto zde postup neuvádíme. Pro zájemce však zmíníme, že se pro $\beta = \gamma = 90^\circ$ dá popsat vztahem

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi p \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi p \sin \alpha}{\lambda}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi N d \sin \alpha}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}} \right)^2, \quad (7)$$

kde I_0 je amplituda, N je počet otvorů na mřížce a p je jejich šířka. První závorka (tzv. otvorový faktor) popisuje difrakci na otvoru šířky p (tedy na jednom otvoru mřížky). Druhá závorka (tzv. mřížkový faktor) pak popisuje interferenci záření z N otvorů vzdálených d . Graf této funkce po dosazení vztahu (5) uvádíme na obrázku 3.



Obr. 3: Teoretická závislost intenzity na poloze na stínítku pro všechny tři vlnové délky koherentního světla, vzdálenost fólie od stínítka 20 cm, počet vrypů $N = 10$, periodu mřížky $d = 1,1 \mu\text{m}$ a šířku otvoru v mřížce $p = 0,55 \mu\text{m}$.

Doteď jsme předpokládali, že světlo, které pro experiment používáme, je koherentní. Že tomu tak úplně není, ukážeme, vypočítáme-li koherentní délku, tedy takovou vzdálenost, na které můžeme záření považovat za koherentní, jako

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

kde $\Delta\lambda$ je tzv. pološířka čáry (tedy šířka v polovině výšky). V návodu byly zadány vlnové délky s nejistotou 15 nm. Odhadneme-li pološířku na $\Delta\lambda = 30$ nm, dostaneme např. pro zelenou barvu $l_c = 11 \mu\text{m}$, což je vzdálenost 10 vrypů na použité mřížce. Osvětíme-li vrypů více (počet osvětlených vrypů budeme omezovat štěrbinou), pak spolu bude interferovat vždy jen světlo z několika otvorů vedle sebe, u zbytku dojde pouze ke sčítání intenzit. Můžeme si představit, že široká štěrбина představuje mnoho štěrbin vedle sebe, vždy o kousek posunutých. Světlo z každé této malé štěrbině bude koherentní a po průchodu mřížkou vytvoří difrakční obrazec, z každé štěrbině o kousek posunutý. Naopak záření z různých štěrbin koherentní není, proto se tyto obrazce prostě sečtou (sečtou se intenzity), což vzhledem k tomu, že jsou sčítané obrazce navzájem posunuté, způsobí rozšíření maxima na stínítku a prakticky zánik (resp. splynutí) maxim s nízkou intenzitou viditelných na obrázku 3.

Rozšíření čáry na stínítku se dá snadno vysvětlit také tím, že světlo vycházející z LED diod není z principu monochromatické (což samozřejmě s tvrzením výše úzce souvisí), tedy obsahuje různé vlnové délky. Různé vlnové délky pak mají difrakční maxima v různé vzdálenosti.

Měření

Nyní již k samotnému uspořádání experimentu, které je vyobrazeno na obrázku 2. Všechny tři diody byly připevněny pod sebe na nepájivé kontaktní pole, které bylo přilepeno na jednu vnitřní stěnu krabice. Na opačné straně byl v krabici otvor s úzkou svisle orientovanou štěrbínou (dvě vedle sebe přilepené žiletky), za kterou byla přilepena difrakční fólie, přičemž vrypky v ní byly orientovány svisle. Diody byly používány vždy po jedné, bez rezistoru a napájeny zdrojem konstantního proudu 20 mA, což je maximální proud, který může dle návodu dlouhodobě tímto typem diod protékat. Difrakční obrazec byl promítán na bílé stínítko opatřené pravítkem. Obrazec byl fotografován, přičemž v místnosti byla tma.

Při experimentování bylo třeba vyzkoušet optimální šířku štěrbiny. Příliš úzká štěrbina znamená malou intenzitu na stínítku. Při velmi malé šířce štěrbiny bychom navíc pozorovali i difrakci na ní, což je v našem případě nepatřičné. Pokud je štěrbina naopak příliš široká, difrakční proužky se rozšiřují a maxima intenzity nejsou tak ostrá, nalezení středu proužku je pak méně přesné, a tedy nejistota polohy maxima roste. Také bylo i při pohledu okem patrné, že světlo vycházející z LED není monochromatické, protože po průchodu mřížkou se na stínítku v případě modré LED objevila i zelená barva, v případě zelené barva červená.

Fotografie byla následně zpracována v programu Matlab.¹¹ Nejprve byl od fotografií odečten černý snímek (tedy taková fotografie, která byla pořízena za stejné expozice, ale s vypnutým zdrojem světla), aby bylo možné eliminovat světlo nepocházející z LED. To se ukázalo nutné zejména u zeleného světla, u kterého bylo vzhledem k malé intenzitě třeba použít expoziční čas v řádu desítek sekund. Následně byl obrázek převeden do stupňů šedi a byly odečteny hodnoty pixelů podél zadané úsečky, na které byl vidět difrakční obrazec. Z fotografie pořízené za světla byla v pixelech odečtena délka pravítka známé délky, čímž byla kalibrována délková osa. Tímto byla zjištěna intenzita podél obrazce, resp. přesněji řečeno nějaká bezrozměrná veličina (dále ji nazýváme intenzitou), která je na intenzitě závislá. Poté již bylo možné vykreslit závislost intenzity na poloze na stínítku (graf na obrázku 5) a odečíst polohy difrakčních maxim, což bylo kvůli eliminaci šumu provedeno pomocí proložení polynomem druhého stupně v okolí maxima a následně určení maxima tohoto polynomu.

Kromě vlastnoručně napsaného skriptu pro Matlab je možné použít i již hotové řešení, např. volně dostupný program ImageJ¹², který umí mj. vykreslit profil intenzity podél zadané úsečky a data uložit pro další zpracování, viz obrázek 4.

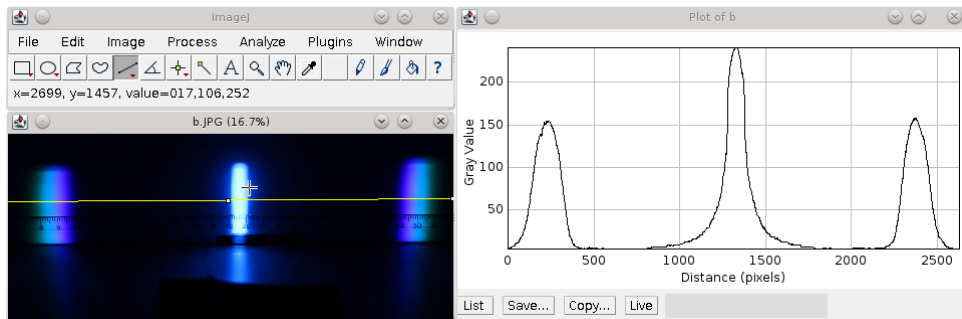
Graf na obrázku 5 končí prvním difrakčním maximem, protože další maxima nebyla viditelná.

Vlnové délky použitých zdrojů světla (LED diod) známe, v případě červené LED je to (623 ± 15) nm pro zelenou (572 ± 15) nm a pro modrou (470 ± 15) nm.

Měřili jsme vzdálenost maxim prvního řádu od maxima druhého řádu, což jsou pro každou zpracovávanou fotografii (pro danou vlnovou délku λ a danou vzdálenost stínítka od mřížky l)

¹¹Zájemci si skript pro Matlab včetně ukázkových fotografií mohou stáhnout na <http://fykos.cz/rocnik27/1-e.zip>. Po drobných úpravách by měl jít spustit též v Octave. Do skriptu je třeba vložit jména souborů s fotografiemi, polohu difrakčního obrazce na nich a délku měřítka v pixelech. Po spuštění načte obrázky, najde maxima, vykreslí profil intenzity a vypočítá vzdálenost vrypů na fólii včetně nejistoty.

¹²<http://rsbweb.nih.gov/ij>



Obr. 4: Pomocí programu ImageJ je možné vykreslit průběh intenzity podél zadané úsečky.

dvě hodnoty – x_1 a x_2 . Z každé z nich bylo následně možné vypočítat vzdálenost vrypů d_1 , resp. d_2 . Všechny tyto hodnoty uvádím v tabulce 1.

Tabulka 1: Naměřené a z nich vypočítané hodnoty.

$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	$\frac{l}{\text{mm}}$	$\frac{x_1}{\text{mm}}$	$\frac{x_2}{\text{mm}}$	$\frac{d_1}{\mu\text{m}}$	$\frac{d_2}{\mu\text{m}}$
470 ± 15	150 ± 3	69 ± 1	71 ± 1	$1,12 \pm 0,04$	$1,10 \pm 0,04$
470 ± 15	200 ± 3	93 ± 1	91 ± 1	$1,11 \pm 0,04$	$1,13 \pm 0,04$
470 ± 15	250 ± 3	117 ± 1	116 ± 1	$1,11 \pm 0,04$	$1,12 \pm 0,04$
572 ± 15	150 ± 3	93 ± 1	92 ± 1	$1,09 \pm 0,03$	$1,09 \pm 0,03$
572 ± 15	200 ± 3	121 ± 1	118 ± 1	$1,11 \pm 0,03$	$1,13 \pm 0,03$
572 ± 15	250 ± 3	155 ± 1	156 ± 1	$1,09 \pm 0,03$	$1,08 \pm 0,03$
623 ± 15	150 ± 3	103 ± 1	102 ± 1	$1,10 \pm 0,03$	$1,11 \pm 0,03$
623 ± 15	200 ± 3	140 ± 1	136 ± 1	$1,09 \pm 0,03$	$1,11 \pm 0,03$
623 ± 15	250 ± 3	170 ± 1	171 ± 1	$1,11 \pm 0,03$	$1,10 \pm 0,03$

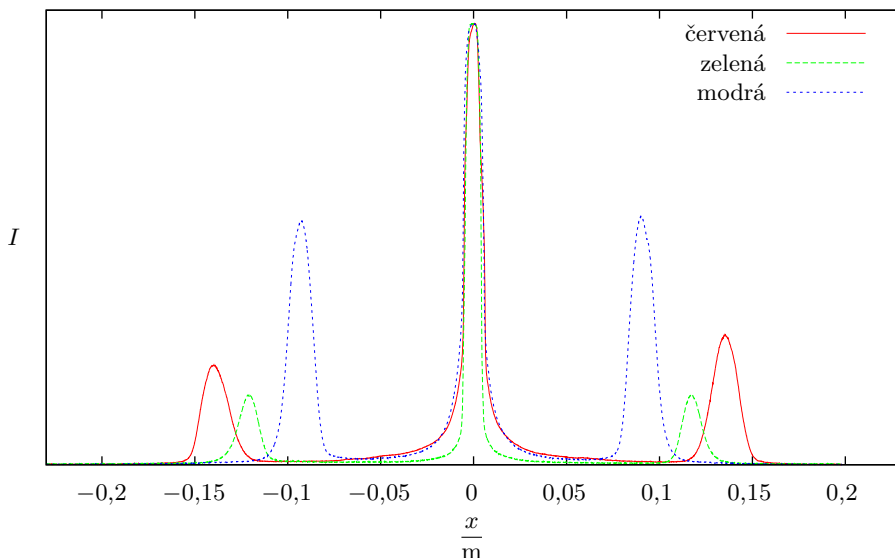
Nejistoty měření

Nejistoty vlnové délky máme zadané na $\Delta\lambda = 15 \text{ nm}$.

Vzdálenost l difrakční fólie od stínítka byla měřena pravítkem, nejistotu odhadneme na $\Delta l = 3 \text{ mm}$.

Pokud bychom polohu difrakčních maxim určovali pouhým okem, byla by její nejistota poměrně velká, závisela by na šířce štěrbině (při široké štěrbině bude proužek široký a střed se bude hledat obtížně) a vzdálenosti fólie od stínítka. Protože jsme však pomocí fotoaparátu změřili profil intenzity, můžeme maxima najít mnohem přesněji. V našem případě bychom odhadli nejistotu na $\Delta x = 1 \text{ mm}$.

Z výše uvedených byla nejistota typu B (tedy nejistota způsobená např. nepřesností použitých měřidel) vypočítána (a uvedena u veličin d_1 a d_2 v tabulce 1) pomocí zákona šíření nejistot



Obr. 5: Změřená závislost intenzity na poloze na stínítku pro všechny tři barvy LED a pro vzdálenost fólie od stínítka 20 cm.

jako

$$\Delta_B d = \sqrt{\left(\Delta\lambda \frac{\partial d}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\Delta l \frac{\partial d}{\partial l}\right)^2 + \left(\Delta x \frac{\partial d}{\partial x}\right)^2}.$$

Dále budeme uvažovat $\Delta_B d = 0,04 \mu\text{m}$.

Protože bylo zpracováno 9 snímků, dostali jsme 18 různých hodnot d . Z těchto hodnot byla vypočítána výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru. Po vynásobení Studentovým koeficientem dostáváme nejistotu typu A $\Delta_A d = 0,01 \mu\text{m}$.

Nakonec vypočteme výslednou nejistotu

$$\Delta d = \sqrt{(\Delta_A d)^2 + (\Delta_B d)^2} = 0,05 \mu\text{m}.$$

Diskuse výsledků

Po vypočítání vzdálenosti vrypů teď již dokážeme (ačkoliv jen pro červenou a zelenou) vysvětlit, proč byla viditelná pouze maxima prvního řádu. Dle vztahu (4) musí platit $k\lambda < d$ (funkce sinus je vždy menší nebo rovna 1, nicméně hodnota 1 by znamenala pravý úhel, což na stínítku nezachytíme), což pro změřenou hodnotu d a zadané vlnové délky červeného a zeleného světla platí pouze pro $k = 1$. Pro modrou barvu je přípustné i $k = 2$, nicméně maximum druhého řádu též nebylo viditelné. Ve vztahu (7) určuje intenzitu maxim druhá závorka. Dle velikosti otvoru v difrakční mřížce se může stát, že tento člen bude v místě maxima členu prvního nulový, pak by celý výraz byl nulový, a tedy maximum by v daném místě nebylo. Také se může stát, že intenzita bude tak malá, že maximum nebudeme schopni detekovat.

Srovnáme-li teoretickou závislost intenzity na obrázku 3 a naměřenou na obrázku 5, objevíme několik rozdílů. Jedním z nich jsou chybějící malá maxima. Pro výpočet teoretické závislosti byl pro názornost použit počet vrypů $N = 10$. Ve skutečnosti však bylo vzhledem k šířce štěrbině asi 0,5 mm osvětleno asi 500 otvorů. Se vzrůstajícím počtem otvorů intenzita těchto maxim klesá (zájemci si mohou zkusit vykreslit vztah (7) pro různé parametry). Druhým rozdílem je rozdílná intenzita maxim prvního řádu pro různé vlnové délky. To je možné připsat způsobu záznamu a následném zpracování. Maxima nultého řádu neměla po zpracování stejnou intenzitu, což bylo způsobeno rozdílnou svítivostí jednotlivých diod, a tedy nutností přizpůsobovat expoziční čas (příčemž nebylo možné jednoduše trefit takový, aby byla intenzita stejná).

Závěr

Pomocí analýzy fotografií difrakčních obrazců byla změřena vzdálenost vrypů na difrakční fólii $d = (1,11 \pm 0,05) \mu\text{m}$.

Komentář k došlým řešením

Nejčastější chyba v došlých řešeních bylo špatné zaokrouhlování. Nejistota výsledku by měla být zaokrouhlena na jednu platnou číslici, je-li první platná číslice 1 (popř. někdy i 2), pak na dvě platné číslice. Podle nejistoty se pak zaokrouhlí i střední hodnota. Někteří řešitelé uvedli výsledky s přesností na pikometry ($1 \cdot 10^{-12} \text{ m}$). U experimentálních úloh stále se opakující chybou bylo též nepopsání značení fyzikálních veličin.

Často řešitelé též chybně použili aproximaci $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha$, přestože správně dodali, že platí jen pro malé úhly α . Úhly prvních maxim byly asi 25° – 35° , což rozhodně nemůžeme považovat za malý. Nikdo z těch, kteří tuto aproximaci použili, tak nedostali správný výsledek, ačkoliv měli naměřené správné hodnoty.

Mnoho řešitelů si neuvědomilo, že měření je vhodné několikrát opakovat pro jiné hodnoty veličin, které můžeme měnit. Při tomto experimentu to byla vzdálenost stínítka od fólie, která šla (při dostatečné tmě) měnit ve velkém rozsahu, čímž bylo možné získat více hodnot a vyloučit tak chyby při některých měřeních. U této úlohy bylo velmi vhodné měřit vzdálenost obou maxim 1. řádu od maxima 0. řádu, čímž bylo možné vyloučit chybu vzniklou nerovnoběžností difrakční fólie se stínítkem, což bohužel mnoho řešitelů též neudělalo.

Velmi často jsme se při opravování setkali též s tím, že nebyl dostatečně nebo vůbec popsán pozorovaný jev, tedy difrakce (v některých řešeních se slovo difrakce dokonce ani nevyskytovalo), a nebyly vůbec diskutovány nejistoty měření.

Malá rada na závěr – obrázek nejen vydá za celé odstavce textu, ale často i pomůže při výpočtu.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha I.S ... relativistická

6 bodů; průměr 4,10; řešilo 81 studentů

- a) *Kvantovou gravitaci potřebujeme jen při studiu velmi malých vzdáleností, kdy jsou gravitační síla a kvantové efekty rovnocenné. Gravitační sílu charakterizuje gravitační konstanta, kvantovou mechaniku Planckova konstanta a speciální teorii relativity rychlost světla. Najděte hodnoty těchto konstant v tabulkách a zkuste z nich vzájemným násobením a umoc-*

ňováním získat veličinu s jednotkou délky. Tak získáte délkovou škálu, na které je relevantní gravitace a kvantová mechanika současně.

- b) Ukažte, že provedeme-li speciální Lorentzovu transformaci (tj. přejdeme do systém pohyblivému se vůči původnímu rychlostí v ve směru osy x^1)

$$x_{\text{nov}}^0 = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x_{\text{nov}}^1 = \frac{-\frac{v}{c}x^0 + x^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x_{\text{nov}}^2 = x^2, \quad x_{\text{nov}}^3 = x^3,$$

potom se hodnota čtyřintervalu nezmění.

- c) Vzpomeňte na definici čtyřintervalu a položte $\Delta x^3 = \Delta x^2 = 0$. Máme pak

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2.$$

V jaké části roviny $(\Delta x^0, \Delta x^1)$ je čtyřinterval $(\Delta s)^2$ záporný a kde kladný? Jak vypadá křivka definovaná $(\Delta s)^2 = 0$?

- a) Abyste úlohu vyřešili, stačí vědět příslušné rozměry konstant; jejich číselné hodnoty si dohledáte později.¹³ Máme gravitační konstantu $[G] = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$, Planckovu konstantu $[h] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ a rychlost světla ve vakuu $[c] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (hranaté závorčky značí jednotky daných konstant).

Ihned si můžeme všimnout, že kilogramy figurují jenom v G a h . Proto pokud chceme kilogramy vyřadit, musí být nutně výsledek v mocninách $[Gh] = \text{m}^5 \cdot \text{s}^{-3}$. Pro vyřazení sekund je potřeba Gh vydělit rychlostí světla na třetí. Pro rozměr v metrech veličinu Gh/c^3 odmocníme a získáváme

$$\sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4,05 \cdot 10^{-35} \text{ m}.$$

V teoriích kvantové gravitace se mnohdy více hodí takzvaná Planckova délka ℓ_P definovaná analogicky jako naše délka jen pomocí redukované Planckovy konstanty $\hbar = h/2\pi$.

- b) Chceme spočítat čtyřinterval mezi nějakými dvěma obecnými prostoročasovými body (událostmi) \mathbf{x} a \mathbf{y} v inerciálním systému souřadnic. Definujeme-li vektor $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, jeho čtyřinterval pak vypadá takto:

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2.$$

Pokud transformujeme polohy událostí \mathbf{x} a \mathbf{y} podle předpisu v zadání, dostaneme pro jeho složky po transformaci

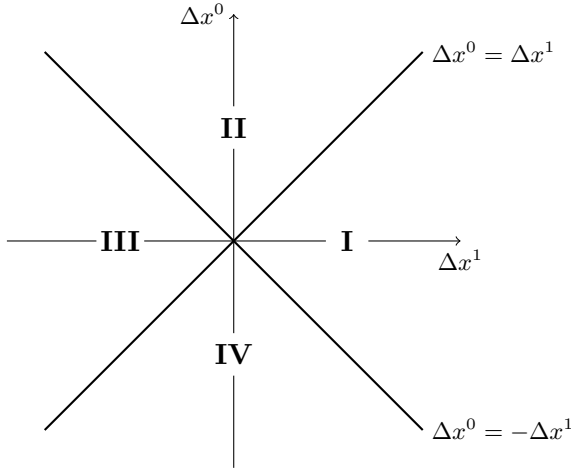
$$\Delta x_{\text{nov}}^0 = \frac{\Delta x^0 - \frac{v}{c}\Delta x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\Delta x_{\text{nov}}^1 = \frac{\Delta x^1 - \frac{v}{c}\Delta x^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\Delta x_{\text{nov}}^2 = \Delta x^2,$$

$$\Delta x_{\text{nov}}^3 = \Delta x^3.$$

¹³Pokud byste konstanty našli v jiných jednotkách, nezapomeňte, že $J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ a $N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Obr. 6: Graf roviny $(\Delta x^1, \Delta x^0)$ s vyznačeným řešením $(\Delta s)^2 = 0$.

Je tedy vidět, že rozdíl polohových vektorů se transformuje stejně jako vektory samotné. Transformační vztahy dosadíme do nového čtyřintervalu a upravujeme:

$$\begin{aligned}
 (\Delta s_{\text{nov}})^2 &= -(\Delta x_{\text{nov}}^0)^2 + (\Delta x_{\text{nov}}^1)^2 + (\Delta x_{\text{nov}}^2)^2 + (\Delta x_{\text{nov}}^3)^2 \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[-\left(\Delta x^0 - \frac{v}{c} \Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^1 - \frac{v}{c} \Delta x^0\right)^2 \right] + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[-(\Delta x^0)^2 + \frac{v^2}{c^2} (\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 - \frac{v^2}{c^2} (\Delta x^1)^2 \right] + (\Delta x_{\text{nov}}^2)^2 + (\Delta x_{\text{nov}}^3)^2 \\
 &= -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2
 \end{aligned}$$

kde jsme po dosazení rozepsali mocniny v hranatých závorkách, odečetli odpovídající členy a vytkli a pokrátli $1 - v^2/c^2$. Získali jsme tedy požadovanou invarianci čtyřintervalu při speciální Lorentzově transformaci

$$(\Delta s_{\text{nov}})^2 = (\Delta s)^2 .$$

- c) Začneme nejdřív položením $(\Delta s)^2 = 0$. Pak můžeme zkoumat znaménko na různých stranách křivky

$$0 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x^0 = \pm \Delta x^1 ,$$

což definuje jednu přímku se směrnici 1 a druhou -1 v rovině $(\Delta x^1, \Delta x^0)$, jako je vidět na obrázku 6. Tyto dvě přímky značí události propojené s počátkem částicemi cestujícími rychlostí světla.

Zpátky k příkladu, na obrázku 6 jsou vyznačené oblasti I, II, III a IV. Je jasné, že v nich bude znaménko $(\Delta s)^2$ konstantní, protože neprochází nulou (to prochází jenom na nakreslených přímkách). V daných oblastech snadno zjistíme, že platí

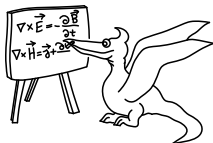
$$\begin{aligned} \text{I} : (\Delta x^1)^2 &> (\Delta x^0)^2, \\ \text{II} : (\Delta x^1)^2 &< (\Delta x^0)^2, \\ \text{III} : (\Delta x^1)^2 &> (\Delta x^0)^2, \\ \text{IV} : (\Delta x^1)^2 &< (\Delta x^0)^2. \end{aligned}$$

Vzhledem k definici čtyřintervalu je jasné, že v oblastech I a III ($|\Delta x^0| < |\Delta x^1|$) bude čtyřinterval kladný. Vektorům posunutí mezi událostmi, pro které je čtyřinterval kladný, se říká *prostorupodobné*, protože se mezi danými událostmi nelze dostat menší než světelnou rychlostí, a tudíž pro nikoho nepředstavují dvě události na jeho vlastní časové ose.

Naopak v oblastech II a IV ($|\Delta x^0| > |\Delta x^1|$) je čtyřinterval určitě záporný. Těmto vektorům mezi událostmi se říká *časupodobné*, protože dané události lze v principu spojit cestováním podsvětelnou rychlostí, a tudíž to mohou být události pozorované jedním pozorovatelem na jeho časové ose.

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz

Miroslav Rapčák
miro@fykos.cz



Seriál: Akční

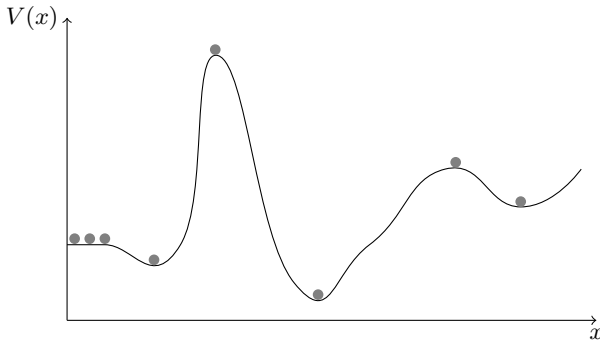
V minulém dílu jsme si představili problémy se sjednocením interakcí a formulací teorie kvantové gravitace. Seznámili jsme se se základními pojmy teorie relativity jakožto teorie gravitace. Také jsme si řekli, že teorie strun je, zdá se, doposud jedinou známou konzistentní teorií, která má potenciál popsat všechny interakce a částice. Teorie strun je kvantovou teorií relativistické struny, tedy jednorozměrného objektu pohybujícího se v prostoročasu.

Než začneme mluvit o této složité teorii, musíme nejdřív uvést jazyk, ve kterém je budována. V tomto díle si povíme něco o variačních principech, které zahrnují i takzvané „zákony kosmické lenosti“. Ukazuje se totiž, že příroda v mnohých okamžicích koná co nejméně *akce*, nebo tak to alespoň formulovali osvětenější fyzici. Co to ale přesně znamená? A je to zcela obecně pravda? O tom se dozvíte v následujícím textu.

Řetěz v podivném údolí

Představme si kuličku, která se nachází ve zvlněné krajině popsané výškovou funkcí $V(x)$ jako na obrázku 7. Kulička se může nacházet v rovnováze, leží-li na rovince. Matematik by řekl, že výška terénu musí v daném bodě být *stacionární* – derivace (neboli sklon) výšky $V'(x)$ musí být v daném bodě nulová.

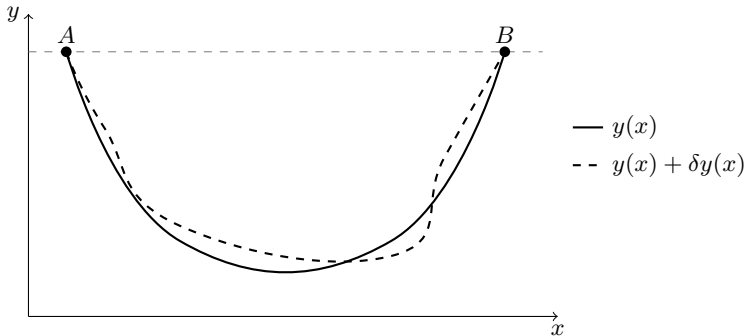
Kromě plochých oblastí nastává podmínka stacionarity v lokálních minimech nebo maximech funkce $V(x)$ (tj. na vrchu kopce nebo v nejnižším bodě údolí) nebo v tzv. sedlových



Obr. 7: Výška zvlněné krajiny $V(x)$ v závislosti na x . Šedé puntíky označují místa, kde je derivace nulová ($V'(x) = 0$) a kde může kulička nehybně stát.

bodech, které odpovídají plošině, jako má například funkce $V(x) = x^3$ v nule. (Přesvědčte se, že zde má funkce nulovou derivaci, a jde tedy o stacionární bod.)

Podobné úvahy dost možná znáte s funkcí $V(x)$ jakožto potenciální energií, kde její derivace $-V'(x)$ (spád) odpovídá síle příslušného pole. Potenciální energie je obecně funkcí polohy a její rozdíl mezi dvěma body O a P určuje energii, kterou dané silové pole (třeba gravitační) předá částici, pokud se přesune z O do P. Nulová derivace potenciální energie znamená nulovou sílu, a tudíž lokální rovnováhu částice (nulová síla znamená nulové zrychlení, a tedy možnost klidu).



Obr. 8: Tvar řetízku $y(x)$ v homogenním gravitačním poli a jeho variace.

Doteď jste se možná nedozvěděli nic zas tak nového, ale zkuste přemýšlet nad následující úlohou: máte ideální řetízek konstantní délky l a pověsíte jej mezi body A a B v homogenním gravitačním poli. Potenciální energie hmotného bodu v tomto poli je dána vztahem $V(x, y) = mgy$. Uvažujme řetízek, jehož tvar je popsán funkcí $y(x)$ (viz obrázek 8). Rozdělíme-li náš řetízek na malé elementy délky ds , bude potenciální energie elementu v bodě $y(x)$ rovna $dV(x) = \rho g y(x) ds$, kde ρ je hustota řetízku a g tíhové zrychlení. Otázka zní: jaký bude tvar řetízku v rovnováze?

Mohli bychom nyní dlouhosáhle počítat síly, které na řetízek působí, a pak se je pokoušet vyrovnávat a zjišťovat tvar řetízku. Můžeme si ale vzpomenout na předchozí odstavce a prostě říct: řetízek se uspořádá do tvaru $y(x)$ tak, aby měl minimální celkovou potenciální energii $\mathcal{V}(y(x))$.¹⁴ Celkovou energii míníme součet energií všech kousíčku řetízku. Pokud je řetízek dostatečně jemný, můžeme vysčítání příspěvků jednotlivých článků k celkové potenciální energii nahradit integrálem přes jeho délku. Pro ty, kteří nejsou na integrály zvyklí, je na internetu mnoho textů, nebo si stačí přečíst příslušnou část z textu ke třetí sérii 24. ročníku našeho seriálu. Říkáme tedy, že

$$\mathcal{V}(y(x)) = \int_A^B \rho g y(x) dx \quad (8)$$

je minimální pro stabilní tvar $y(x)$. Minimalizovat musíme však při zachování délky řetízku a uchycení na koncích.

Matematik se na naši formulaci zběžně podívá a říká: to znamená, že integrál v rovnici (8) musí být nutně *stacionární*. Co to ale znamená? Že jakákoliv nekonečně malá výchylka od rovnovážného rozložení $y \rightarrow y + \delta y$ (viz obrázek 8) zachovávající délku řetízku a uchycení na koncích nezmění hodnotu celkové potenciální energie z rovnice (8).

To nám ale jako fyzikům dává smysl, protože zatímco u částice v potenciálu nekonečně malá výchylka δx z rovnovážné polohy způsobí nekonečně malou změnu potenciální energie úměrnou jejímu sklonu $V'(x)$, něco podobného se děje i tady, jen v mnohem obecnějším duchu. Místo malé změny potenciální energie $V(x + \delta x) \approx V(x) + V'(x)\delta x$ máme takzvanou variaci δV celkové potenciální energie $\mathcal{V}(y(x) + \delta y(x)) = \mathcal{V}(y(x)) + \delta \mathcal{V}$.

Když se ovšem znovu podíváme na obrázek 8, přijde nám divné, že by se potenciální energie při variaci $\delta y(x)$ neměnila vůbec – stejně jako se při malé výchylce doopravdy trochu mění ve stacionárních bodech i funkce $V(x)$ na obrázku 7. Pravda je taková, že ve stacionárních bodech se potenciální energie $V(x)$ i celková potenciální energie $\mathcal{V}(y(x))$ nemění až na *nekonečně malé veličiny vyššího řádu*. Požadavek $\delta \mathcal{V} = 0$ do prvního řádu přesnosti je tedy matematicky preciznější formulací stacionarity.

Podmínky na nulovou variaci $\delta \mathcal{V}$ nakonec vedou na úplně stejné podmínky rovnosti určitých vektorů v každém bodě, jako bychom dostali při úvahách nad silovým působením v řetězu. To se nám povedlo bez nutnosti složitěho analyzování sil. Potvrzuje se tak správnost našeho tvrzení o minimalizaci celkové potenciální energie.

Křivce $y(x)$, která minimalizuje integrál (8), se říká od této slavné úlohy *řetězovka* a jedná se o součet dvou exponenciál symetrický okolo středu řetězu též známý jako hyperbolický kosinus. Můžete ji nalézt ve tvaru opravdových prověšených řetězů nebo i v přírodě, například na prověšených vláknech pavučiny.

Abychom si to tedy zrekapitulovali, v minulé části textu jsme ukázali, že pokud si odvodíme nějaký fyzikální princip minima nebo maxima například pro bod, bezrozměrný (0-dimenzionální) objekt, s trochu opatrnosti ho můžeme lehko rozšířit i na mnohem obecnější případy, jako je řetízek nebo struna – 1-dimenzionální objekt s nekonečně mnoha body.

Výhoda daného přístupu je v tom, že se příliš nemusíme zabývat nějakou fyzikou sil atp., která je s problémem spojená, ale můžeme rovnou formulovat princip celkového maxima nebo minima s nějakými dodatečnými podmínkami, jako je pevná délka řetízku. *Fyzikální rovnice pak ale získáme zpětně z podmínek nulové variace minimalizované nebo maximalizované veličiny okolo řešení problému!*

¹⁴Všimněte si, že je celková energie funkcí funkce $y(x)$, tj. každé funkci $y(x)$ popisující tvar řetízku přiřadí číslo. Takovým objektům matematikové říkají funkcionály.

Tento způsob „hádání“ fyziky se může zdát dost divný u klasické mechaniky, kde nám síly přijdou intuitivně zřejmé. Ve zkoumání úplně nové fyziky, kde mechanická intuice už dávno selhává, se ale jedná o úspěšnou a často používanou metodou formulování nových teorií.

Nejmenší, největší, nejlepší

Principy minima a maxima uhranuly matematiky a fyziky počínaje začátkem 18. století. Ne, že by předtím nebyly takové principy známy, ale osvícenští matematici měli tendenci je hledat *všude*. Například filozof, matematik a spoluvynálezce integrálního a diferenciálního počtu Gottfried Wilhelm Leibniz tvrdil, že náš svět je ten nejlepší z nekonečného počtu možných světů, kde dobro je maximalizováno a zlo minimalizováno. Jiný matematik, Leonard Euler, kterého budete nejspíš znát díky Eulerovu číslu e , třeba v jedné své práci tvrdil, že „nemůže býtí. . . nejmenší pochybnosti, že veškeré účinky ze Všemohácnosti lze dovésti jak metodou maxim a minim, tak z působení příčin.“

Citovat bychom mohli ještě dlouho, ale pojďme se podívat na nejstarší principy maxim a minim, kterým budeme říkat jedním slovem *extremální* nebo též *variacioní*. Princip, podle kterého se dá odvodit zákon odrazu a lomu paprsku světla, byl používán v různých obdobích už od počátku našeho letopočtu a definitivně jej formuloval v 17. století Pierre de Fermat. Tento *Fermatův princip* prostě tvrdí, že *světlo cestuje po drahách, které ho mezi každými dvěma body dopraví za nejkratší dobu*.

Čas T spotřebovaný na cestu paprsku mezi body M a N lze také přepsat jako

$$T = \int_{t_M}^{t_N} dt = \int_M^N \frac{dt}{ds} ds = \frac{1}{c} \int_M^N n ds,$$

kde $n = c/v$ je index lomu optického prostředí v daném bodě, c rychlost světla ve vakuu, a kde jsme při úpravě využili skutečnosti, že

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

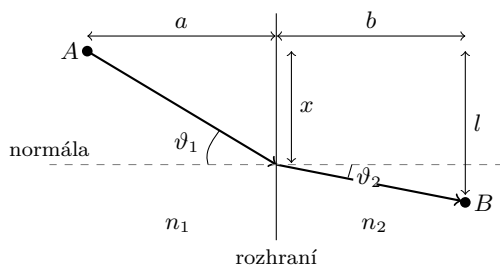
Pravda je ovšem taková, že v některých speciálních případech se světlo pohybuje i po dráze s *maximálním* časem. Takže obecně platí, že se světlo pohybuje po drahách s *extremálním* časem, neboli *po drahách s nulovou variací doby potřebné k uražení*, jak to nyní formulujeme v souladu s předchozí částí textu.

Pokud je rychlost světla v nějaké oblasti konstantní, je jasné, že paprsky nebudou dělat žádné zatáčky, ale že se bude pohybovat po nejkratších spojnicích mezi body – přímkách. Nyní si ale odvodíme, co se stane, pokud paprsek dopadne na rozhraní dvou prostředí.

Zvolíme si dva body A a B, jeden v optickém prostředí s indexem lomu n_1 a druhý v prostředí s indexem lomu n_2 jako na obrázku 9. Víme, že v každém prostředí zvlášť se bude světlo pohybovat po přímce a na rozhraní může tedy pouze změnit směr. Vzhledem k tomu, že body A a B jsou pevné, jediný volný parametr je výška x , ve které paprsek dopadá na rozhraní. Vyjádříme si dobu T , kterou dráha z bodu A do B zabere, za pomoci rychlostí v_1 , v_2 a drah d_1 , d_2 v prvním, respektive druhém prostředí .

$$T(x) = \frac{d_1(x)}{v_1} + \frac{d_2(x)}{v_2},$$

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}{v_2}, \quad (9)$$



Obr. 9: Nákres lomu paprsku.

kde jsme použili Pythagorovu větu pro výpočet vzdáleností d_1 a d_2 s použitím značení vzdáleností z obrázku 9. Podmínka pro extrém doby $T(x)$ je nulová derivace podle x , takže když rovnici (9) zderivujeme, získáváme podmínku na x

$$0 = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}. \quad (10)$$

Pokud si navíc uvědomíme, že

$$\sin \vartheta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \sin \vartheta_2 = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}},$$

pak po úpravě rovnice (10) použitím definice $n_{1,2} = c/v_{1,2}$ získáváme známý zákon lomu

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2.$$

Zákon lomu je dobře ověřená skutečnost, na jehož principu například funguje většina klasických optických přístrojů, a proto vidíme, že *variační principy mají uplatnění nejen ve staticce, ale i v dynamice*, tj. v časovém vývoji.

To je podstatně méně intuitivní skutečnost, protože nás nutí si klást otázky typu: *jak paprsek ví, že bude narážet na rozhraní nebo že bude potřebovat dorazit do bodu B?* Odpověď samozřejmě zní, že to paprsek prostě neví a vědět k takovému chování nemusí. Fermatův princip nám říká, že pokud body A a B prochází nějaký paprsek, tak bude mít určitě takovýto tvar. Není to přímý způsob, jak předvídat vývoj jednotlivého paprsku, když ještě nevíme, kde skončí (bod B předem neznáme). Fermatův princip je obecné tvrzení o přirozenosti paprsků, ze kterého lze pak okamžité zákony chování jako zákon lomu odvodit. Obdobně to bude platit i pro další principy, které nyní uvedeme.

Tři, dva, jedna – AKCE!

Všichni známe Newtonovu klasickou mechaniku, podle které se hmotné body pohybují vlivem síly $\mathbf{F}(t)$ po trajektoriích $\mathbf{x}(t)$, které jsou řešením druhého Newtonova zákona

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}.$$

Dost možná vás překvapí, že osvětení fyzikové uspěli ve vymýšlení extrémního principu i v případě zmíněných Newtonových rovnic. Zatímco u světla se z trajektorií mezi dvěma body vybírala ta správná trajektorie na základě extrémální *doby*, u mechaniky je to mnohem hůře pochopitelnější veličina, takzvaná *akce*. Historicky první byl *Maupertuisův princip akce*, postulovaný v 18. století. Maupertuisův princip tvrdí, že suma velikostí hybností po délce trajektorie (akce) je mezi libovolnými dvěma body minimální, pokud je energie po celou dobu pohybu stejná. Tedy integrál

$$\mathcal{S}_0 = \int_A^B mv \, ds$$

má určitě nulovou variaci při nekonečně malé variaci $\delta \mathbf{x}(t)$ vedoucí na variaci

$$\delta \mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t).$$

Tento tvar takzvané redukované akce reprodukuje z podmínky na nulovou variaci Newtonovy rovnice v časově neměnných konzervativních polích a použil jej například Niels Bohr na začátku 20. století, když odvozoval kvantování energetických hladin vodíku. Opět nemůžeme říci, jestli je redukovaná akce nutně minimální, proto pro jistotu říkáme, že je stacionární.

Existuje ale i jiná, „neredukovaná“ akce \mathcal{S} , jejíž stacionarita je v časově neproměnných situacích ekvivalentní se stacionaritou redukované akce \mathcal{S}_0 , a která určuje trajektorie i v časově proměnných situacích. Musíme ale definovat novou funkci, jejíž integrál se po dobu běhu extremalizuje, a tou je *Lagrangián* (čti *lagranžián*). Lagrangián je definovaný jako rozdíl kinetické a potenciální energie $L = T - V$.

Kinetickou energii hmotného bodu o hmotnosti m a rychlosti \mathbf{v} vypočteme jako

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2.$$

Jedná se o energii, kterou libovolná síla musela do částice vložit, aby se urychlila na rychlost \mathbf{v} . Pro potenciální energii již takto explicitní vztah nemáme. Tato energie je obecně funkcí času a polohy hmotného bodu $V(\mathbf{x}, t)$. Jak bylo řečeno v první části textu, je to právě potenciální energie, kterou předává silové pole částici nebo hmotnému bodu při pohybu v prostoru.

Když tedy nyní známe Lagrangián a jeho význam, můžeme zformulovat Hamiltonův princip stacionární akce. Hamiltonův princip tvrdí, že pro trajektorii $\mathbf{x}(t)$, která se nachází v čase t_1 v bodě P a v čase t_2 v bodě Q, je stacionární následující akce

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \, dt.$$

Vidíte, že nyní neklademe požadavek jen na koncové body trajektorie, *ale i na časy, ve kterých se v daných bodech P, Q nachází*. To je prostě důsledek faktu, že se nám například silové pole může pod trajektorií měnit a pozice v různých časech může znamenat docela jinou fyzikální situaci. Nebudeme vás dlouho napínat a rovnou vám řekneme, že z podmínky $\delta \mathcal{S} = 0$ dostáváme Newtonovy rovnice se silou odpovídající poli potenciální energie V . Zkusme si i něco jednoduššího spočítat, třeba rovnice plynoucí pro volnou částici.

Variace na svobodné lety

Ukážeme si, jak zkonstruovat akci pro volnou částici a jak z ní odvodíme pohybové rovnice z podmínky $\delta\mathcal{S} = 0$. Na volnou částici nepůsobí žádná síla, a proto můžeme zvolit potenciální energii nulovou $V = 0$. Do Lagrangiánu přispěje proto jen kinetický člen a dostáváme

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{y}(t)^2 dt.$$

Nyní provedme malou variaci $y(t) \rightarrow y(t) + \delta y(t)$. Dostaneme

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m (\dot{y}(t) + \delta\dot{y}(t))^2 dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{y}(t)^2 dt.$$

Pokud je ale $\delta y(t)$ malé (řekněme o řád menší než $y(t)$), pak je $(\delta y(t))^2$ již zcela zanedbatelné a budeme ho považovat za nulové. Potom máme

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m (\dot{y}(t)^2 + 2\dot{y}(t)\delta\dot{y}(t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{y}(t)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{y}(t) \delta\dot{y}(t) dt.$$

Poslední úpravu, kterou musíme provést, je integrace per partes¹⁵ podle které je

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\dot{g}(t) dt = f(t_2)g(t_2) - f(t_1)g(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{f}(t)g(t) dt.$$

V našem případě dostáváme

$$\delta\mathcal{S} = \dot{y}(t_2)\delta y(t_2) - \dot{y}(t_1)\delta y(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}(t)\delta y(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}(t)\delta y(t) dt,$$

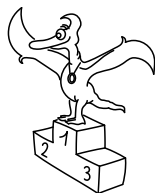
kde jsme využili toho, že ze zadání víme přesně počáteční a koncovou polohu bodu, a proto je $\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$. Protože může být $\delta y(t)$ jinak libovolné, musí platit

$$\ddot{y}(t) = a(t) = 0,$$

abychom splnili podmínku $\delta\mathcal{S} = 0$. Vidíme, že jsme v tomto jednoduchém případě odvodili druhý Newtonův zákon pro bod, na který nepůsobí žádná síla (tj. zrychlení je nulové).

Snad jste během této krátké ochutnávky z historie a praxe variačních principů okusili alespoň část jejich elegance a možností. Zvláště principy stacionární akce se během historie fyziky již mnohokrát osvědčily a můžeme je snadno rozšířit z dynamiky hmotného bodu na dynamiku vícerozměrného tělesa jako struny nebo celého třírozměrného objektu. Zobecnit se princip stacionarity akce dá zcela obdobně, jako jsme to udělali s principem minimalizace potenciální energie a řetízkem. To si ale ukážeme až v příštím díle. Začneme s akcí pro volnou relativistickou částici a zobecníme ji na relativistickou strunu. Máte se tedy určitě ještě na co těšit.

¹⁵Čtenář, který se nespokojí s pouhým uvedením příslušné formulky, může nahlédnout do libovolné učebnice matematické analýzy nebo třeba na Wikipedii.



Pořadí řešitelů po I. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	40
1. Jan Preiss	G, Lovosice	4	4	3	3	4	4	5	6	33	83	33
2. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	4	4	3	4	3	4	4	6	32	80	32
3. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	4	4	4	3	4	2	8	2	31	78	31
4. Jáchym Bárták	G Havlíčkův Brod	4	2	1	4	3	4	6	5	29	73	29
5.–6. Simona Gabrielová	G, Jírovcova, České Budějovice	4	2	1	3	3	2	6	6	27	68	27
5.–6. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	4	2	3	4	1	7	2	27	68	27
7.–8. Vít Pískovský	G O. Havlové, Ostrava	4	0	4	1	4	3	1	6	23	58	23
7.–8. Přemysl Štastný	G, Žamberk	4	2	4	2	–	2	3	6	23	66	23
9. Jozef Lipták	G Tajovského, B. Bystrica	4	2	–	2	5	2	5	2	22	61	22
10.–11. Jozef Burkuš	G, Rožňava	4	0	3	4	3	2	4	–	20	59	20
10.–11. Petr Jakubčík	PORG, Praha	4	2	3	2	1	4	–	4	20	63	20
12.–13. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	4	2	3	4	–	2	4	–	19	66	19
12.–13. Štěpán Stenclák	G, Trinec	4	2	3	4	–	4	–	2	19	70	19
14. Hana Lounová	G, Olomouc – Hejčín	4	2	1	4	–	2	3	2	18	51	18
15.–17. Vít Horáček	G L. Jaroše, Holešov	4	4	3	–	2	3	–	–	16	73	16
15.–17. Kateřina Stodolová	G, Dašická, Pardubice	4	2	4	2	–	4	–	–	16	76	16
15.–17. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	2	2	2	3	–	1	–	6	16	59	16
18.–19. Dominik Krasula	G, Krnov	4	2	–	2	–	4	–	3	15	65	15

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	40
1. Petr Hrubý	G, Polička	4	2	3	3	4	1	7	6	30	75	30
2. Martin Gažo	G, Pankúchova, SR	4	2	4	4	4	4	–	6	28	88	28
3. Tomáš Hrbek	G J. Ressela, Chrudim	4	4	3	3	2	3	4	4	27	68	27
4. Jirí Jarošák	G J. Vrchlického, Klatovy	4	6	4	4	–	–	5	2	25	83	25
5.–6. Jakub Jambrich	G J. A. Raymana, Prešov	4	2	2	3	4	2	3	4	24	60	24
5.–6. Lukáš Šupík	G, Trinec	4	4	1	3	3	–	3	6	24	69	24
7. Samuel Obuch	G Jána Hollého, Trnava	2	2	0	4	2	2	5	6	23	58	23
8. Dominika Durovčíková	G Hlohovec	4	4	–	3	–	–	5	6	22	85	22
9.–10. Daniël Hausner	G, Plasy	4	2	4	4	3	1	1	2	21	53	21
9.–10. Christian Mikláš	G Jána Hollého, Trnava	4	2	3	4	–	3	5	–	21	72	21
11.–12. Karel Chládek	G, Lanškroun	4	2	3	4	–	2	–	4	19	70	19
11.–12. Kuba Pilař	G J. Ressela, Chrudim	4	2	3	3	2	1	–	4	19	59	19
13.–15. Anna Kufová	G M. Koperníka, Bílovec	4	2	3	1	1	3	–	3	17	53	17
13.–15. Pavel Kús	G J. Š. Baara, Domažlice	4	–	4	4	–	3	–	2	17	74	17
13.–15. Vojtěch Lukeš	G Ludka Pika, Plzeň	4	2	–	4	4	–	3	–	17	68	17

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	5	5	8	6	36	100	36
1.–4. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	2	4	4	4	3	8	6	32	89	32
1.–4. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	2	1	4	4	4	3	8	6	32	89	32
1.–4. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	2	2	2	4	4	4	8	6	32	89	32
1.–4. <i>Luboš Vozdecký</i>	G a SOŠZZE Vyškov	2	1	4	3	4	4	8	6	32	89	32
5. <i>Mojmír Poproický</i>	G Matyáše Lercha, Brno	2	2	3	4	5	4	5	6	31	86	31
6.–7. <i>Miroslav Gašpárek</i>		2	2	4	–	4	4	6	6	28	88	28
6.–7. <i>Pavel Peterka</i>	G P. de Coubertina, Tábor	1	1	3	2	4	4	7	6	28	78	28
8. <i>Tomáš Fiala</i>	G, SOŠ a VOŠ, Ledec n. Sáz.	2	1	4	4	4	–	5	6	26	84	26
9.–10. <i>Jiří Kučera</i>	G Jana Keplera, Praha	2	1	3	2	4	2	5	6	25	69	25
9.–10. <i>Václav Skála</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	2	2	4	4	4	2	3	4	25	69	25
11.–12. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, HK	2	2	2	4	4	4	–	6	24	86	24
11.–12. <i>Jakub Maruška</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	2	2	4	4	4	3	5	–	24	80	24
13. <i>Jakub Sláma</i>	G Opatov, Praha	2	1	4	4	2	2	6	2	23	64	23
14. <i>Martin Vančura</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	2	1	4	4	2	1	–	6	22	79	22
15. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	1	2	4	4	–	–	7	2	20	77	20
16. <i>Lucie Brichová</i>	PSG jazykové, HK	1	1	2	2	2	3	8	–	19	63	19
17.–19. <i>Samuel Kočišák</i>	G Poštová, Košice	2	1	3	3	4	4	–	–	17	77	17
17.–19. <i>Jakub Löwit</i>	G, Českolipská, Praha	2	2	2	4	–	2	–	5	17	74	17
17.–19. <i>Kateřina Smítalová</i>	G, Dašická, Pardubice	2	2	4	3	–	4	–	2	17	74	17
20.–22. <i>Gianamar</i>		2	1	1	2	4	3	–	3	16	57	16
<i>Giovannetti-Singh</i>												
20.–22. <i>Brigita Holendová</i>	G A. Kmeta	2	1	3	1	2	2	3	2	16	44	16
20.–22. <i>Martin Kihoulou</i>	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	1	2	–	4	4	3	–	2	16	67	16

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	5	5	8	6	36	100	36
1. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Dubnica n. Váhom	2	1	5	4	4	4	8	6	34	94	34
2. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	2	1	4	3	4	3	6	5	28	78	28
3. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	2	1	–	4	4	–	7	6	24	89	24
4.–5. <i>Tomáš Tměj</i>	G, Arabská, Praha	2	–	–	4	4	–	6	6	22	88	22
4.–5. <i>Zuzana Vlasáková</i>	G, Rumburk	1	1	–	4	3	–	7	6	22	81	22
6. <i>Ján Ondráš</i>	G Grösslingova, Bratislava	1	1	3	4	4	2	–	6	21	75	21
7. <i>Míchal Belina</i>	G Volgogradská, Ostrava	2	2	3	3	–	2	6	2	20	65	20
8.–9. <i>Norbert Slivka</i>	G Tajovského, B. Bystrica	1	1	–	4	4	4	–	5	19	79	19
8.–9. <i>Karolína Šromeková</i>	ŠpMNDAg, SR	2	1	3	4	3	2	–	4	19	68	19
10.–12. <i>Lukáš Knob</i>	G, Kojetín	–	–	4	4	4	–	–	6	18	95	18
10.–12. <i>Denisa Lampášová</i>	G, Považská Bystrica	2	1	–	4	3	2	–	6	18	75	18
10.–12. <i>Ondřej Zelenka</i>	SPŠ a SOŠGS Most	2	0	–	4	4	–	3	5	18	67	18
13. <i>Peter Hojnoš</i>	G Školská, Spišská Nová Ves	–	–	3	4	4	–	5	–	16	76	16
14.–16. <i>Lýdia Janítorová</i>	G, Šrobárova, Košice	2	1	3	2	4	1	–	2	15	54	15
14.–16. <i>Július Koval</i>	G Senica	2	1	–	3	4	–	–	5	15	79	15
14.–16. <i>Andrej Novák</i>	G M. Hattalu, Trstená	1	2	4	3	–	1	4	–	15	60	15
17. <i>Daniel Slezák</i>	Svobodná chebská škola	2	2	3	–	–	4	–	2	13	68	13
18. <i>Viktor Skoupý</i>	G, Moravská Třebová	–	–	4	4	4	–	–	–	12	92	12
19. <i>Irena Bačinská</i>	ŠpMNDAg, SR	2	2	3	4	–	–	–	–	11	92	11
20.–21. <i>Josef Havlíček</i>	G, Neumannova, Žďár n. S.	2	2	1	4	–	–	–	–	9	75	9



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta


Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 

<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.