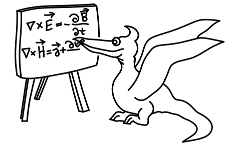


Seriál: Aplikační

Tento díl seriálu bude tak trochu aplikační. Minule jsme si pověděli úvod k variačním metodám ve fyzice, nyní bychom rádi nabyté znalosti aplikovali na tři speciální případy. Povíme si něco o variační úloze pro klasickou strunu, pro relativistickou částici a na závěr zavedeme slavnou Nambu-Gotovu akci pro relativistickou strunu. Znalost této akce nám otevře brány ke všem tajům teorie strun. Začněme ale od počátku.

Klasická struna

Každý z nás už v minulosti viděl nějaký strunný hudební nástroj. Položili jste si někdy otázku, jak se struna při brnknutí hýbe? Odpověď je snadná. Jak jsme si v minulém díle řekli, pohybuje se tak, že je hodnota akce příslušející tomuto pohybu extremální. Jak ale akce pro naši strunu vypadá?

Připomeňme, že jsme akci pro částici definovali jako integrál

$$\mathcal{S}[\boldsymbol{x}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{v}(t), t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kde rozdíl $L = T - V$ kinetické energie T a potenciální energie V jsme nazvali Lagrangiánem. Uvažujme nyní strunu délky l a celkové hmotnosti m, která se pohybuje v rovině $[x;y]$. Struna je natažena mezi body $\mathsf{A}[a;0]$ a $\mathsf{B}[b;0]$, kde $b = a + l$. Tvar struny v daném čase můžeme popsat funkcí $y(x)$ pro x z intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, jak jsme to dělali v předchozím díle seriálu pro řetízek v gravitačním poli. Jelikož se však tvar struny může v čase měnit, je ve skutečnosti výchylka závislá jak na souřadnici x, tak na čase t a píšeme $y \equiv y(x,t)$.

Zde poznamenejme, že máme-li funkci více proměnných (v našem případě tedy $y(x,t)$), pak se zavádí *parciální derivace* jakožto veličina charakterizující změnu funkce při malé změně jedné z proměnných. Například parciální derivace $y(x,t)$ podle x, kterou zapisujeme jako

$$\frac{\partial y}{\partial x} \equiv \partial_x y \equiv y_x\,,$$

by nám charakterizovala změnu $y(x,t)$ při malé změně x. Prakticky to znamená, že při parciálním derivování $y(x,t)$ podle x derivujeme funkci stejně jako v případě obyčejné derivace a druhou proměnnou t považujeme za konstantu. Podobně postupujeme i pro derivaci podle t.

Spočtěme nejprve kinetickou energii naší struny. Strunu můžeme rozdělit na malinké kousíčky délky $\mathrm{d}x$ o hmotnosti $\mathrm{d}m = (m/l)\,\mathrm{d}x$, kde m je celková hmotnost struny. Jde-li o dostatečně malinké kousky, můžeme každý kousíček v daném čase t považovat za hmotný bod s polohou $(x, y(x,t))$, jehož kinetickou energii známe

$$\mathrm{d}T(x,t) = \frac{1}{2}v(x,t)^2\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}m\,.$$

Přescítáme-li přes všechny malé elementy, získáme celkovou kinetickou energii struny. V případě infinitezimálně malých elementů přejde tato suma v integrál

$$T = \int_{\mathsf{A}}^{\mathsf{B}} \mathrm{d}T = \frac{1}{2}\int_{\mathsf{A}}^{\mathsf{B}} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{2l}\int_a^b \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Dále musíme určit potenciální energii odpovídající dané konfiguraci. Jsou-li deformace malé, lze uvažovat s dobrou přesností, že je v celé struně konstantní napětí T_0. Při natažení má struna tendenci vrátit se do původního stavu s délkou l a příslušná energie odpovídající prodloužení Δl bude úměrná tomuto prodloužení, takže $V = T_0 \Delta l$. Nám zbývá určit toto prodloužení. Opět rozdělme strunu na malé kousíčky a každý aproximujme malou úsečkou. Délka takovéto úsečky bude z Pythagorovy věty

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \mathrm{d}x\,,$$

kde dx odpovídá délce kousíčku podél osy x a dy příslušné délce podél osy y. Vidíme, že v důsledku naivního dělení diferenciálů se nám pod odmocninou objevila parciální derivace $y(x,t)$ podle x jakožto sklon struny v daném čase. Jelikož uvažujeme jen malé výchylky, je tento sklon velmi malý a můžeme tedy psát přibližný vztah

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\,,$$

o jehož platnosti pro malé $\frac{\partial y}{\partial x}$ se lze snadno přesvědčit. Celkovou změnu délky struny pak získáme opět integrací přes celou strunu a dostáváme potenciální energii

$$V = T_0 \Delta l = T_0 \left(\int_{\mathsf{A}}^{\mathsf{B}} \mathrm{d}l - l\right) = T_0 \left(\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \mathrm{d}x - l\right) \approx$$
$$\approx T_0 \left(\int_a^b \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x - l\right) = \frac{T_0}{2}\int_a^b \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\,,$$

kde jsme využili znalosti délky struny

$$\int_a^b \mathrm{d}x = l\,.$$

Celkově tedy máme akci pro strunu vyvíjející se z času t_1 do času t_2 ve tvaru

$$\mathcal{S}[y(x,t)] = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left(\frac{m}{2l}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t\,.$$

Všimněme si, že akce struny na rozdíl od akce pro částici obsahuje dva integrály. Funkce v závorce je funkcí nejen času, ale také polohy na struně a integrací přes celou strunu pak získáváme Lagrangián. Je přirozené veličinu v závorce nazvat hustotou Lagrangiánu a označit

$$\mathcal{L}(\partial_x y, \partial_t y) = \frac{m}{2l}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\,.$$

Analogicky, jako jsme minule odvodili z akce pro volnou částici její pohybové rovnice, můžeme odvodit pohybovou rovnici pro klasickou strunu. Uvažujme strunu, která se vyvíjí z počátečního času t_1, kde má tvar popsaný funkcí $y(x,t_1) \equiv y_1(x)$, do času t_2, kde má tvar popsaný funkcí $y(x,t_2) \equiv y_2(x)$, a pokusme se najít „trajektorii“, po které se struna vyvíjí, jakožto extremálu naší akce. Připomeňme, že v případě bodové částice, jejíž trajektorii parametrizujeme parametrem p, jsme prováděli změnu $y(p)$ pro každé p o malou hodnotu $\delta y(p)$ a dostali jsme tak trajektorii $y(p)+\delta y(p)$ nepatrně odlišnou od trajektorie $y(p)$. V případě struny máme však funkci dvou proměnných a musíme provést malou změnu v každém čase t a v každém bodě x struny. Musíme tedy provést variaci $y(x,t) \to y(x,t)+\delta y(x,t)$. Na tuto změnu však musíme naložit dvě podmínky. Předně musí být $\delta y(x,t_1) = 0 = \delta y(x,t_2)$, protože počáteční i koncový tvar struny máme pevně zadaný. Dále jsme fixovali krajní body struny, takže v každém čase musí být také $\delta y(a,t) = 0 = \delta y(b,t)$.

Nyní už nám nic nebrání v odvození pohybových rovnic pro klasickou strunu. Najděme tedy variaci akce a položme ji rovnu nule. Máme

$$
\begin{aligned}
\delta \mathcal{S}[y(x,t)] = &\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left(\frac{m}{2l}\left(\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial \delta y}{\partial t}\right)^2 - \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \\
&-\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left(\frac{m}{2l}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \\
= &\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left(\frac{m}{l}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial \delta y}{\partial t} - T_0\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}
$$

kde jsme roznásobili obě závorky, jeden z takto získaných členů se odečetl s druhým členem a členy obsahující druhou mocninu variace δy jsme pro jejich malost zanedbali.

Stejně jako v minulém díle provedeme nyní pro každý z členů integraci per partes a dostáváme

$$
\begin{aligned}
\delta \mathcal{S}[y(x,t)] = &\frac{m}{l}\int_a^b \left(\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=t_2,x}\delta y(t_2,x) - \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=t_1,x}\delta y(t_1,x)\right)\mathrm{d}x - \\
&- T_0\int_{t_1}^{t_2}\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=b,t}\delta y(b,t) - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=a,t}\delta y(a,t)\right)\mathrm{d}t - \\
&-\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left(\frac{m}{l}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\delta y - T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\delta y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}
$$

kde svislicí značíme vyhodnocení parciálních derivací v daných bodech. Dostali jsme tak tři členy. První dva jsou ale nulové z okrajové, počáteční a koncové podmínky, které vyžadují $\delta y(x,t_1) = \delta y(x,t_2) = \delta y(a,t) = \delta y(b,t) = 0$. Dostáváme tedy podmínku

$$
0 = \delta \mathcal{S}[y(x,t)] = -\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left(\frac{m}{l}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\delta y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,
$$

což musí platit pro všechna δy. Toho docílíme jen tehdy, pokud je výraz v závorce nulový a dostáváme tak rovnici

$$
\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{T_0 l}{m}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0\,,
$$

která je pohybovou rovnicí pro klasickou strunu a nazývá se vlnovou rovnicí. Poznamenejme zde ještě, že odmocnina z konstanty stojící před druhým členem odpovídá rychlosti šíření vlny na struně.

Relativistická částice

Druhým příkladem tohoto dílu seriálu je volná relativistická částice, tedy částice, na kterou nepůsobí žádná síla. V prvním díle jsme si povídali o teorii relativity a řekli jsme si, že fyzikální zákony musí být nezávislé na inerciálním systému, ve kterém studovaný jev popisujeme. Matematicky řečeno musí být konzistentní fyzikální teorie invariantní vůči Lorentzovým transformacím.

Nyní bychom rádi vyšetřili pohyb volné relativistické částice. Tento pohyb bude opět dán jakožto extremála nějakého funkcionálu. Abychom dostali správnou relativistickou teorii, je přirozené uvažovat také relativisticky invariantní akci. Položme si tedy otázku: známe nějaký invariant vůči Lorentzově transformaci? Známe! Příkladem je čtyřinterval, jak jsme diskutovali v úloze k prvnímu dílu našeho seriálu. Podívejme se na konstrukci akce trochu detailněji.

Rádi bychom našli akci pro částici pohybující se z bodu časoprostoru A se souřadnicemi $\left(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3\right)$ do bodu B se souřadnicemi $\left(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3\right)$. Částice se pohybuje v časoprostoru po světočáře $\boldsymbol{x}(\lambda) = \left(x^0(\lambda), x^1(\lambda), x^2(\lambda), x^3(\lambda)\right)$, kde λ je libovolný parametr určující polohu na světočáře (v předešlém značený p), jak jsme diskutovali již v prvním díle seriálu, a nabývá hodnoty λ_1 v bodě A a λ_2 v bodě B. Rozdělíme-li tuto trajektorii na malé kousíčky, pak můžeme pro každý element spočíst příslušný čtyřinterval

$$(\mathrm{d}s)^2 = -\left(\mathrm{d}x^0\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^3\right)^2 \,, \tag{1}$$

který je, jak víme, invariantní vůči Lorentzově transformaci.

Akci nyní získáme integrací přes celou trajektorii. K tomu potřebujeme odmocnit vztah (1). Již z úlohy k prvnímu dílu seriálu víme, že výraz na pravé straně je záporný pro částici pohybující se rychlostí menší, než je rychlost světla. Proto si musíme při odmocňování dát pozor na znaménko a psát

$$\mathcal{S}[\boldsymbol{x}(s)] = -mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{-(\mathrm{d}s)^2}\,,$$

kde m je klidová hmotnost částice a c je rychlost světla a s jsme zvolili jako parametr světočáry nabývající hodnot s_1 v bodě A a s_2 v bodě B. Prefaktor mc jsme museli do definice akce přidat, aby měla správný rozměr.

Vyvstává otázka, jaký má nalezená akce fyzikální význam. Víme, že nezávisí na tom, v jakém systému počítáme $(\mathrm{d}s)^2$. Představme si tedy, že sedíme přímo na pohybující se částici. V tom případě se vůči nám poloha částice nemění a tedy $\left(\mathrm{d}x^1\right)^2 = \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 = \left(\mathrm{d}x^3\right)^2 = 0$. V tomto případě je nenulová jen jedna složka $(\mathrm{d}s)^2 = -\left(\mathrm{d}x^0\right)^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2$, kde τ je vlastní čas pozorovatele pohybujícího se s částicí. Potom dostáváme

$$\mathcal{S}[\boldsymbol{x}(\tau)] = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau$$

a akce je tedy rovna (až na prefaktor) vlastnímu času, který je potřeba, aby se částice po dané trajektorii dostala z bodu A do bodu B.

Už jsme zběhlí v počítání variací a odvozování pohybových rovnic. Proveďme to i pro tento případ. Uvažujme variaci trajektorie $x^\mu(\lambda) \to x^\mu(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda)$ mezi body A, B s hodnotami parametru λ_1 a λ_2.[1] Jako obvykle, fixujeme počáteční a koncovou polohu částice, takže $\delta x^\mu(\lambda_1) =$

[1] Připomeňme, že za index μ můžeme dosadit 0, 1, 2 nebo 3.

$= 0 = \delta x^\mu(\lambda_2)$. Vzpomeneme-li si na první díl seriálu, kde jsme zavedli metriku $\eta_{\mu\nu}$, můžeme psát

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}[\boldsymbol{x}(\lambda)] &= -\delta\left(mc\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{-(\mathrm{d}s)^2}\right) = \\
&= -\delta\left(mc\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{-\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda\right) = \\
&= -mc\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{-\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right)}\,\mathrm{d}\lambda - \mathcal{S}[\boldsymbol{x}(\lambda)] = \\
&= -mc\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{-\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}+2\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right)}\,\mathrm{d}\lambda - \mathcal{S}[\boldsymbol{x}(\lambda)]\,,
\end{aligned}$$

kde jsme v posledním řádku využili symetrie $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$. Nyní „vtáhneme“ diferenciál $\mathrm{d}\lambda$ zpět pod odmocninu, dosadíme za $\mathcal{S}[\boldsymbol{x}(\lambda)]$, vzpomeneme si, že $\sqrt{-(\mathrm{d}s)^2} = c\,\mathrm{d}\tau$, a dostaneme

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}[\boldsymbol{x}(\lambda)] &= -mc\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{-(\mathrm{d}s)^2 - 2\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}(\delta x^\nu)} + mc\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{-(\mathrm{d}s)^2} = \\
&= -m\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{1-2\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}(\delta x^\nu)}{\mathrm{d}\tau}}\,\mathrm{d}\tau + m\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathrm{d}\tau \approx \\
&\approx m\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = m\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\,,
\end{aligned}$$

kde jsme opět využili přibližného vztahu jako výše a zanedbali příspěvky vyšších řádů v δx^μ. Je přirozené definovat relativistickou (čtyř)hybnost v analogii s klasickou hybností jako

$$p^\mu = m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Tuto hybnost můžeme dosadit to vztahu výše a provést integraci per partes. Dostáváme tak

$$\begin{aligned}
0 = \delta\mathcal{S}[\boldsymbol{x}(\lambda)] &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}p^\mu\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \\
&= \sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\left[p^\mu(\lambda_2)\,\delta x^\nu(\lambda_2) - p^\mu(\lambda_1)\,\delta x^\nu(\lambda_1)\right] - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\,\delta x^\nu\,\mathrm{d}\lambda\,,
\end{aligned}$$

kde první člen je opět nulový díky pevné počáteční a koncové poloze $\delta x^\nu(\lambda_1) = 0 = \delta x^\nu(\lambda_2)$. Jelikož musí tato rovnost platit jinak pro všechny variace δx^ν, dostáváme pohybové rovnice ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0\,.$$

Podobně jako v klasické mechanice se zde tedy zachovává čtyřhybnost volné částice. Pohybuje-li se částice malou rychlostí, je vlastní čas částice přibližně roven času pozorovatele $t \approx \tau$ a můžeme psát pro $i = 1, 2, 3$

$$0 = \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}\tau} \approx \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

V limitě malých rychlostí tedy opravdu dostáváme pohybovou rovnici pro klasickou volnou částici z minulého dílu seriálu.

Jak by vypadala akce pro volnou částici v obecné teorii relativity? Akce by měla naprosto stejný tvar, jen by nyní nemělo $\mathrm{d}s$ tvar (1), ale mělo by obecný tvar z prvního dílu seriálu, který odpovídá obecně zakřivenému časoprostoru. Teď tedy konečně vidíme, co se myslí tím, že se částice pohybuje v zakřiveném časoprostoru po nejrovnějších možných drahách. Myslíme tím to, že délka měřená čtyřintervalem $\mathrm{d}s$ je extremální.

Relativistická struna

Naše diskuze akce nyní vyvrcholí studiem akce pro relativistickou strunu, tedy jednorozměrný provázek pohybující se v časoprostoru. Naše akce bude přímým zobecněním úvah o relativistické částici.

Pohyb částice v časoprostoru, kterému odpovídá světočára, je určen čtveřicí funkcí $\boldsymbol{x}(\tau) = \left(x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau)\right)$ vlastního času τ. Podobně bude pohybující se struně odpovídat světoplocha v časoprostoru a bude parametrizována dvěma parametry

$$\boldsymbol{X}(\tau,\sigma) = \left(X^0(\tau,\sigma), X^1(\tau,\sigma), X^2(\tau,\sigma), X^3(\tau,\sigma)\right)\,.$$

Parametr τ odpovídá časupodobnému směru na světoploše (odpovídá tedy času nějakého pozorovatele), zatímco parametr σ odpovídá prostorupodobnému směru. Přesuneme-li se do soustavy spojené s pozorovatelem, jehož vlastní čas je τ, pak pro nějaké $\tau = \tau_0$ konstantní určuje funkce $\left(X^1(\tau_0,\sigma), X^2(\tau_0,\sigma), X^3(\tau_0,\sigma)\right)$, podobně jako v případě klasické struny, její tvar v tomto čase. Parametr σ pak odpovídá parametru x v klasickém případě a parametrizuje strunu v daném čase. Na funkci $\boldsymbol{X}(\tau,\sigma)$ tedy můžeme nahlížet jako na funkci, která každému bodu z prostoru parametrů $[\tau,\sigma] \in \langle\tau_1,\tau_2\rangle \times \langle 0, l\rangle$ přiřadí jeden bod na světoploše struny jako na obrázku 1.

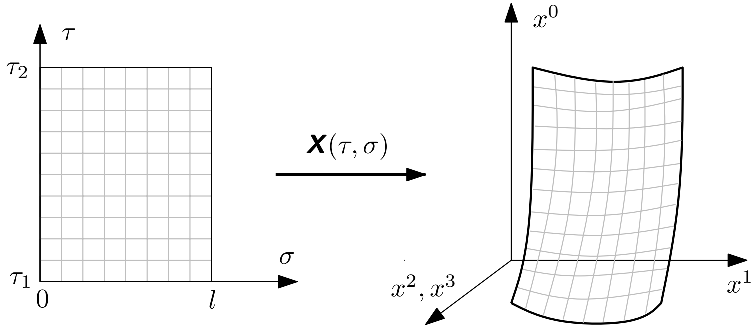
Zobecnění akce je nyní nasnadě. V případě relativistické částice byla akce (až na konstantní prefaktory) rovna Lorentzovsky invariantní délce světočáry. V případě relativistické struny máme v časoprostoru dvourozměrnou světoplochu a akce bude úměrná plošnému obsahu této světoplochy.

Akce relativistické částice vznikla vysčítáním přes čtyřintervaly malých elementů podél trajektorie částice. V případě struny budeme sčítat plošné obsahy malých elementů světoplochy. Rozdělme si prostor parametrů $\langle\tau_1,\tau_2\rangle \times \langle 0, l\rangle$ na malinké obdélníčky o délce stran $\mathrm{d}\tau$ a $\mathrm{d}\sigma$. Změna parametru τ o element $\mathrm{d}\tau$ odpovídá zřejmě změně polohy

$$\mathrm{d}X_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

na světoploše. Podobně bude posunutí σ o element $\mathrm{d}\sigma$ v prostoru parametrů odpovídat změně polohy

$$\mathrm{d}X_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}\,\mathrm{d}\sigma$$



Obr. 1: Prostor parametrů a funkce $\boldsymbol{X}(\tau,\sigma)$ přiřazující každému bodu z prostoru parametru jeden bod světoplochy. Na světoploše jsou také vyobrazeny souřadnice odpovídají konstantnímu τ resp. σ. Integrace v akci odpovídá sčítání obsahů všech zobrazených elementárních rovnoběžníků.

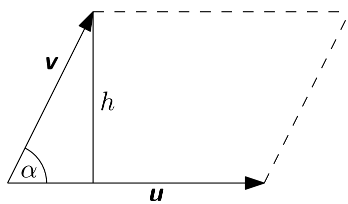
na světoploše. Každému malému obdélníčku $\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma$ bude odpovídat na světoploše v časoprostoru malinký rovnoběžník určený čtyřvektory $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2$. My bychom si přáli spočíst plochu tohoto rovnoběžníku a sečíst plochy všech takovýchto malých rovnoběžníků.

Vypočtěme tedy plošný element na světoploše v prostoru parametrů odpovídající obdélníčku $\langle\tau,\tau+\mathrm{d}\tau\rangle\times\langle\sigma,\sigma+\mathrm{d}\sigma\rangle$. Velikost a skalární součin příslušných čtyřvektorů v časoprostoru $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2$ počítáme pomocí metriky, kterou jsme si zavedli v prvním díle seriálu. Zde využijeme následujícího značení

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1|^2=\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}X_1^{\mu}\mathrm{d}X_1^{\nu}\,,\quad |\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2|^2=\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}X_2^{\mu}\mathrm{d}X_2^{\nu}\,,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{X}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2=\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}X_1^{\mu}\mathrm{d}X_2^{\nu}\,.$$

Jak ale vypočíst obsah rovnoběžníku zadaného dvěma vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$? Ze školy víme, že obsah rovnoběžníku spočteme jako velikost základny krát výška. Pohledem na obrázek 2 vidíme, že pro obsah S musí platit

$$\begin{aligned}S&=|\boldsymbol{u}|h=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\\&=\sqrt{|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2-|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2\cos^2\alpha}=\sqrt{|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2}\,.\end{aligned}$$



Obr. 2: Obrázek k výpočtu obsahu rovnoběžníku zadaného dvěma vektory.

Použijeme-li tento vzorec v našem případě, dostaneme plochu našeho malého elementu ve tvaru[2]

$$\mathrm{d}S = \sqrt{(\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}_2)^2 - |\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1|^2 \, |\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2|^2} = \\ = \sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \sigma}\right)^2 - \left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \tau}\right|^2 \left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \sigma}\right|^2} \, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\sigma \, .$$

Nyní už stačí integrovat přes celou plochu a přenásobit prefaktorem se správným rozměrem a dostáváme slavnou Nambu-Gotovu akci

$$\mathcal{S}[\boldsymbol{X}(\tau, \sigma)] = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \sigma}\right)^2 - \left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \tau}\right|^2 \left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \sigma}\right|^2} \, \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau \, .$$

Poznamenejme nyní, že funkce $\boldsymbol{X}(\tau, \sigma)$ není určena jednoznačně. Relevantní je výsledný tvar světoplochy, ale nezávisí na tom, jak budou na světoploše vypadat křivky konstantního τ a σ. Pokud je zvolíme tak, aby byly na sebe vždy kolmé, bude první člen pod odmocninou výše nulový a my máme akci

$$\mathcal{S}[\boldsymbol{X}(\tau, \sigma)] = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \sqrt{- \left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \tau}\right|^2 \left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \sigma}\right|^2} \, \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau \, .$$

Variaci této akce a odvození příslušných pohybových rovnic si necháme až na jindy. Výpočet bude velmi podobný jako v případě relativistické částice, ale diskuze pohybových rovnic pro strunu a jejich řešení si žádá vlastní díl.

V tomto díle jsme se tedy seznámili se třemi významnými akcemi a ukázali si, jak postupovat v odvození příslušných pohybových rovnic. V dalším díle odhlédneme od akce a povíme si něco o kvantové mechanice. K Nambu-Gotově akci se pak vrátíme v pátém díle, kde nás čeká odvození pohybových rovnic, jejich řešení a kvantování celé struny.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[2] Všimněme si, že jsme museli pod odmocninou, stejně jako v případě relativistické částice, prohodit znaménko, abychom odmocňovali kladnou veličinu.