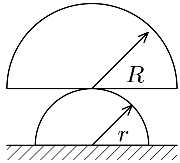
Úloha V.3 ... plážové válení

4 body; průměr 3,68; řešilo 22 studentů

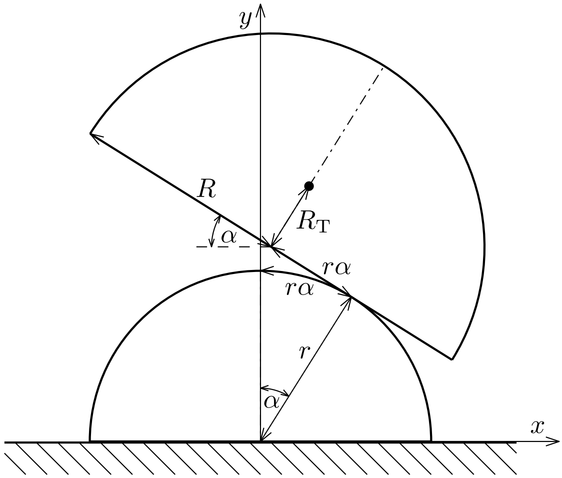
Mějme dva půlválce ležící na sobě jako na obrázku. Spodní má poloměr r a horní poloměr R. Pro jaký poloměr R s pevným r je soustava stabilní?

Bonus *V případech, kdy je soustava stabilní (pokud vychýlíme vrchní válec z rovnovážné polohy, tak začne provádět malé kmity), s jakou periodou bude kmitat?*

Karel neměl co dělat, a tak se válel.



Při řešení budeme předpokládat, že se tělesa po sobě pouze valí, tedy nedojde se smýkání, a spodní těleso se nepohybuje. V tom případě můžeme polohu horního půlválce oproti poloze na obrázku v zadání popsat jednou souřadnicí, soustava má jeden stupeň volnosti. Dále nezáleží na tom, jakou souřadnici zvolíme, např. úhel α dle obrázku 1.



Obr. 1: Horní půlválec v obecné poloze popsané úhlem α.

Aby byla soustava stabilní, při vychýlení z rovnovážné polohy musí působit taková síla, popř. takový moment síly, která vychýlené těleso vrací zpět. Jestliže horní půlválec leží na spodním, dotýkají se na úsečce, kterou v každé poloze můžeme považovat za osu otáčení. Tlaková síla, která působí mezi půlválci, tuto osu protíná, stejně tak síla třecí, obě proto mají vzhledem k této ose nulový moment. Nenulový moment má síla tíhová působící na horní půlválec v jeho těžišti.

Vyjádřeme polohu těžiště horního půlválce v závislosti na úhlu α. K tomu potřebujeme znát vzdálenost na obrázku 1 označenou R_T, tedy polohu těžiště půlkruhu vzhledem k jeho středu. Využijeme např. první Pappos-Guldinovy věty, která říká, že objem rotačního tělesa (v našem případě by šlo o kouli s objemem $4\pi R^3/3$) je roven součinu délky trajektorie, kterou při rotaci urazí těžiště (tedy $2\pi R_\mathrm{T}$), a obsahu plochy, kterou rotujeme (půlkruh, tedy $\pi R^2/2$), tj.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi R_\mathrm{T}\frac{\pi R^2}{2} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{T} = \frac{4R}{3\pi}\,.$$

Pak z obrázku je poloha těžiště horního půlkruhu

$$x_\mathrm{T} = r\sin\alpha - r\alpha\cos\alpha + R_\mathrm{T}\sin\alpha = \left(\frac{4R}{3\pi} + r\right)\sin\alpha - r\alpha\cos\alpha\,,$$
$$y_\mathrm{T} = r\cos\alpha + r\alpha\sin\alpha + R_\mathrm{T}\cos\alpha = \left(\frac{4R}{3\pi} + r\right)\cos\alpha + r\alpha\sin\alpha\,.$$

Nyní se již můžeme vrátit ke stabilitě. Aby moment tíhové síly působící na horní půlválec jej po vychýlení z rovnovážné polohy vracel zpět, musí platit

$$x_\mathrm{T} < r\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{4R}{3\pi r} < \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\,,$$

tedy horizontální poloha těžiště horního půlválce (resp. přímka, na které leží tíhová síla na něj působící) musí být blíže k ose dolního půlválce, než je bod dotyku, pak moment tíhové síly bude půlválec vracet do rovnovážné polohy. Zkoumáme, kdy poloha $\alpha = 0$ je stabilní, toto tedy dosadíme. Výraz na pravé straně je neurčitý výraz typu $0/0$, buď tedy vypočítáme limitu, nebo si vykreslíme graf této funkce a zjistíme, že musí platit

$$\frac{4R}{3\pi r} < 1 \quad\Rightarrow\quad R < \frac{3\pi r}{4}\,.$$

Stabilita by šla vyřešit i pomocí potenciální energie. Aby byla poloha stabilní, potenciální energie tělesa v rovnovážné poloze musí mít minimum. Potenciální energie horního půlválce je přímo úměrná vertikální poloze těžiště y_T, stačí tedy zjistit, pro jaké R má funkce $y_\mathrm{T}(\alpha)$ v bodě $\alpha = 0$ minimum. Aby funkce měla v nějakém bodě minimum, musí být první derivace nulová a druhá kladná, tedy

$$\left.\frac{\partial y_\mathrm{T}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial^2 y_\mathrm{T}}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0} > 0\,.$$

Provedeme příslušné derivace

$$\frac{\partial y_\mathrm{T}}{\partial\alpha} = -\frac{4R}{3\pi}\sin\alpha + r\alpha\cos\alpha\,,$$
$$\frac{\partial^2 y_\mathrm{T}}{\partial\alpha^2} = \left(r - \frac{4R}{3\pi}\right)\cos\alpha - r\alpha\sin\alpha$$

a z druhé derivace (podmínka plynoucí z první derivace je triviální) dostaneme stejnou podmínku jako postupem výše.

Z tvaru potenciální energie (pokud bychom si vykreslili její průběh v závislosti na α) je též vidět, že ačkoliv je pro některá R je poloha stabilní, existuje takový úhel α, pro který má potenciální energie maximum a dále začne opět klesat. Tedy, jestliže vychýlíme horní půlválec o větší úhel (popř. mu dáme takovou rychlost, aby tento mezní úhel překonal), spadne (opět zde neuvažujeme situaci, kdy by se začal smýkat).

Bonus

K výpočtu periody malých kmitů budeme potřebovat moment setrvačnosti horního válce vzhledem k ose procházející jeho těžištěm. Nejprve určíme moment setrvačnosti vzhledem k ose válce. Jelikož moment setrvačnosti je aditivní veličina, bude moment setrvačnosti půlválce polovinou momentu setrvačnosti válce o stejném poloměru a výšce (který bude mít hmotnost $2m$), tedy

$$J = \frac{1}{2} m R^2 \,.$$

Za pomoci Steinerovy věty poté určíme moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm

$$J_\mathrm{T} = J - mR_\mathrm{T}^2 = mR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) \,.$$

Pohyb jakéhokoliv tuhého tělesa (jako je i náš půlválec) můžeme rozložit na translační pohyb libovolného jeho bodu a rotační pohyb vzhledem k ose procházející tímto bodem. Za tento bod je vhodné si zvolit těžiště tělesa. Kinetická energie pohybu je pak rovna součtu kinetické energie translačního pohybu a kinetické energie rotačního pohybu, tedy

$$\begin{aligned} E_\mathrm{k} &= \frac{1}{2} m \dot{x}_\mathrm{T}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_\mathrm{T}^2 + \frac{1}{2} J_\mathrm{T} \dot{\alpha}^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \dot{\alpha} \cos\alpha - r\dot{\alpha} \cos\alpha + r\dot{\alpha}\alpha \sin\alpha \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} m \left[- \left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \sin\alpha\dot{\alpha} - r\dot{\alpha} \sin\alpha + r\alpha\dot{\alpha} \cos\alpha \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} mR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) \dot{\alpha}^2 = \\ &= \frac{1}{4} m \left(R^2 + 2r^2\alpha^2 \right) \dot{\alpha}^2 \,, \end{aligned}$$

přičemž tečka označuje derivaci podle času, tedy $\dot{x}_\mathrm{T}$ je velikost rychlosti těžiště ve vodorovném směru (analogicky $\dot{y}_\mathrm{T}$) a $\dot{\alpha}$ je úhlová rychlost rotačního pohybu.

Nulovou hladinu potenciální energie je pro další postup vhodné zvolit tak, aby v rovnovážné poloze (tedy pro $\alpha = 0$) byla nulová, tedy

$$E_\mathrm{p} = mg(y_\mathrm{T} - r - R_\mathrm{T}) = mg \left[\left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \cos\alpha + r\alpha \sin\alpha - r - \frac{4R}{3\pi} \right] \,.$$

Budeme předpokládat, že kmity jsou malé a můžeme použít aproximaci

$$\sin\alpha \approx \alpha \,,$$

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \,.$$

Pak můžeme přepsat vztah pro potenciální energii

$$E_\mathrm{p} \approx mg \left[\left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) + r\alpha^2 - r - \frac{4R}{3\pi} \right] = mg \left[r\alpha^2 - \left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \frac{\alpha^2}{2} \right] \,.$$

Dále budeme předpokládat, že kmity jsou harmonické, tedy závislost výchylky α a úhlové rychlosti $\dot{\alpha}$ na čase t lze vyjádřit jako

$$\alpha = \alpha_\mathrm{m} \sin \omega t\,,$$
$$\dot{\alpha} = \omega \alpha_\mathrm{m} \cos \omega t\,,$$

kde α_m je amplituda a $\omega = 2\pi/T$ je úhlová frekvence kmitů, přičemž T je jejich perioda.

Vzhledem ke zvolené hladině nulové potenciální energie je v rovnovážné poloze potenciální energie nulová, a tedy kinetická energie je maximální. Naopak při maximální výchylce α_m je potenciální energie maximální a kinetická energie nulová. Vzhledem k zákonu zachování mechanické energie musí být potenciální energie při maximální výchylce (kdy $\alpha = \alpha_\mathrm{m}$ a $\dot{\alpha} = 0$) rovna kinetické energii v rovnovážné poloze (kdy $\alpha = 0$ a $\dot{\alpha} = \omega\alpha_\mathrm{m}$), tedy

$$mg\left[r\alpha_\mathrm{m}^2 - \left(\frac{4R}{3\pi} + r\right)\frac{\alpha_\mathrm{m}^2}{2}\right] = \frac{1}{4}mR^2\omega^2\alpha_\mathrm{m}^2\,,$$

odkud

$$\omega = \sqrt{\frac{g(6\pi r - 8R)}{3\pi R^2}}\,,$$

tedy perioda kmitů je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{12\pi^3 R^2}{g(6\pi r - 8R)}}\,.$$

Povšimněme si, že výraz pro periodu kmitů má smysl pouze pro $R < 3\pi r/4$, což je stejný výsledek, jako jsme dostali výše.

Tomáš Pikálek
`pikos@fykos.cz`