Úloha IV.P ... Mrazík

5 bodů; průměr 2,91; řešilo 35 studentů

V pohádce Mrazík vyhodil Ivan loupežníkům kyje do takové výšky, že spadly až za půl roku. Jak vysoko by je musel vyhodit, aby dopadly za takovou dobu? Vytvořte první a druhý hrubý odhad. Zdůvodněte, proč jsou tyto odhady nejspíš řádově špatné. Co jste všechno zanedbali? Z jakých důvodů je celkově nesmyslné, aby kyje dopadly na prakticky stejné místo po půl roce? Nebraňte se proudu kritiky na tuto klasickou pohádku! *Lukáš si vzpomněl na Mrazíka.*

Budeme řešit pohyb jednoho z kyjů. Zkusme nejprve naivně předpokládat, že Ivan vyhodil kyj v homogenním gravitačním poli v bezodporovém prostředí. Ivánek hází kolmo nahoru z výšky, kterou označíme jako nulovou, s nějakou počáteční rychlostí v_0, kterou budeme chtít určit. Rovnice pro svislý vrh vzhůru pak vypadají

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\,, \tag{1}$$

$$v = v_0 - gt\,, \tag{2}$$

kde h je výška kyje v čase t, v je jeho aktuální rychlost a g je tíhové zrychlení. Čas, za který mají kyje dopadnout, je půl roku $T \doteq 15{,}8 \cdot 10^6$ s. Z druhé rovnice pak můžeme určit původní rychlost kyje, protože víme, že ve chvíli návratu by měly mít kyje stejnou rychlost, ale opačného směru.

$$-v_0 = v_0 - gT \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{gT}{2} \approx 8 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \approx \frac{c}{4}\,,$$

kde $c \doteq 3{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je rychlost světla ve vakuu. Z výsledku je patrné, že bychom už správně měli využít pro výpočet speciální teorii relativity, protože kyj by měl být vyhozen relativistickou rychlostí. Ovšem než se zběsile vrhneme do relativistických řešení, tak si můžeme vyzkoušet vypočíst, do jaké výšky by dle výše uvedeného výpočtu měl kyj vystoupit. Buď si rovnou vzpomeneme, že nejvyššího bodu dosáhne kyj v čase $T_{\max} = v_0/g = T/2$, nebo si uvědomíme, že v okamžiku obratu je rychlost nulová a vypočteme tento čas z rovnice (2), nebo si to můžeme ukázat složitěji tak, že rovnici (1) doplníme na čtverec

$$h = -\frac{1}{2} g \left(t^2 - \frac{2v_0}{g} t \right) \quad \Rightarrow \quad h = -\frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}\,.$$

Výška bude maximální v okamžiku, kdy závorka umocněná na druhou má nejmenší hodnotu, tedy v okamžiku, kdy je nulová. Pokud čas $T_{\max}$ dosadíme do (1), pak dostáváme $h_{\max} = gT_{\max}/2 \approx 3 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}$, tedy (pokud uvážíme, že poloměr Země je $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$) že se jedná řádově o $5 \cdot 10^7$ násobek poloměru Země. V dalších jednotkách je to pak $2 \cdot 10^3\,\mathrm{AU}$ či $0{,}03\,\mathrm{ly}$. Je tedy zřejmé, že gravitační pole, ve kterém se kyj pohybuje, ve skutečnosti nebude homogenní, a proto náš původní předpoklad vůbec neplatí, takže se ani vylepšováním speciální teorií relativity nemusíme zabývat.

Již víme, že budeme muset uvažovat, že se jedná o vrh v radiálním gravitačním poli Země. Vrh je prováděn kolmo vzhůru, což by mělo vést k tomu, že se kyj bude pohybovat po degenerované elipse na úsečku, jejíž jeden konec by se nacházel v těžišti Země. Nebudeme raději moc spekulovat nad tím, jak by pak mohl dopadnout kyj opět na stejné místo pod stejným úhlem, protože bychom po chvíli stejně došli k tomu, že je to příliš podezřelé, a to zejména kvůli sklonu osy zemské rotace a dalším pohybům Země v průběhu roku. Keplerův třetí zákon platí i pro takto zdegenerovanou elipsu. Napišme si ho ve tvaru

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_\mathrm{Z}}{4\pi^2}\,,$$

kde a je délka hlavní poloosy, což je v našem případě polovina délky úsečky, po které se pohybuje kyj[1], $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$ je gravitační konstanta, $M_\mathrm{Z} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ hmotnost Země. Pokud bychom mohli zanedbat dobu, kterou by kyj měl strávit v rámci své oběžné doby pod povrchem Země, tak opravdu můžeme použít ve vztahu čas T. Vyjádřeme si hlavní poloosu

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM_\mathrm{Z}}{4\pi^2}T^2} \approx 1{,}4 \cdot 10^9\,\mathrm{m} \approx 200R_\mathrm{Z} \approx 9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{AU}\,.$$

Vzhledem k tomu, že je poloosa více jak dvousetnásobkem poloměru Země, tak opravdu můžeme relativně dobře použít zanedbání času. Navíc v části pod Zemí by se kyj měl hýbat nejrychleji, a tedy strávit tam jenom relativně krátký čas. Ovšem – měli bychom se zamyslet, do jaké největší vzdálenosti od Země se kyj dostane. Od jejího jádra by to měl být dvojnásobek a, což je řádově 400 poloměrů Země. Zamyslíme se nad tím, jestli opravdu v celé oblasti bude mít hlavní roli gravitace Země, nebo i dalších těles. Proto se podívejme na soustavu Země – Slunce. V této soustavě se nachází 5 bodů, ve kterých se vyrovnávají gravitační a odstředivé síly. Jedná se o takzvané Lagrangeovy či librační body. Nás v této chvíli zajímá zejména poloha bodu L_1, který je Zemi nejblíže. Proč? Protože pokud se může nějaká družice dostat od Země za bod L_1, tak se může stát oběžnicí Slunce nebo střídavě obíhat Zemi a Slunce (pokud nemá energii tak velkou, že dokonce ze soustavy unikne). Dá se vypočítat či najít[2], že se nalézá zhruba $1{,}5 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$ od Země. Vzhledem k tomu, že se kyj má dostat až do vzdálenosti $2{,}7 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$, pak není opět splněna vstupní podmínka výpočtu. Správně bychom měli uvažovat i gravitační vliv Slunce a tím by se úloha značně zkomplikovala. Proto nadále budeme pracovat s tímto odhadem, ale budeme si uvědomovat, že by musel být ještě opraven.

Zkusme se zaměřit na výpočet rychlosti, kterou by musel Ivan kyje hodit. Jako první nástřel můžeme odhadnout, že musí jít o rychlost někde mezi 1. kosmickou rychlostí[3], což je oběžná rychlost po kruhové dráze na úrovni povrchu Země $v_1 \doteq 7{,}9\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, a 2. kosmickou rychlostí, což je úniková rychlost z povrchu Země, tj. kyje by se vůbec nevrátily $v_2 \doteq 11{,}2\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Už tím bychom měli docela pěkný řádový odhad. Pokud bychom chtěli dostat nějakou přesnější hodnotu, tak můžeme využít nějakého programu či programovacího jazyka a průběh vrhu si numericky nasimulovat. V tom případě, při použití trochu přesněji zadaných hodnot, než je uvedeno zde, dostáváme hodnotu rychlosti hodu[4] jako $v_\mathrm{kyj} \doteq 11\,168\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a hodnotu druhé kosmické rychlosti jako $v_2 \doteq 11\,181\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Hodnoty se liší pouze o něco málo víc než jedno promile, což ukazuje další problematickou část pohádky a to, že by Ivan musel do urychlení kyje vložit přesně definovanou sílu, protože jinak by kyje dopadly v úplně jinou dobu, nebo by rovnou úplně uletěly.

Nadále budeme pracovat s rychlostí v_kyj, která je vlastně kvůli odporovým silám spodním odhadem toho, na jakou rychlost by Ivan kyje musel urychlit. Zamysleme se nad tím, jakou

[1] Musíme poznamenat, že v místě obratu kyje, tedy v těžišti Země, bychom museli umístit něco, od čeho by se kyj mohl dokonale pružně odrazit, kdežto cestu až k těžišti bychom mu museli vyhloubit. Takže se jedná vlastně o hypotetickou a dost abstraktní situaci.

[2] `http://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte`

[3] Důvodem, proč je jasné, že by rychlost kyje měla být vyšší než tato, je už to, že velká poloosa dráhy kyje je větší, navíc ho vypouštíme přímo vzhůru.

[4] K výpočtu byl použit program Wolfram Mathematica. Kód je k nalezení na `http://fykos.cz/rocnik26/4-p.nb` a `http://fykos.cz/rocnik26/4-p.cdf`. Ve formátu .nb si můžete kód i upravovat, pokud vlastníte Wolfram Mathematicu, kdežto v .cdf se na něj můžete alespoň podívat a přehrávač .cdf můžete stáhnout zdarma na `http://www.wolfram.com/cdf/`.

kinetickou energii by musel Ivan do kyjů vložit. Uvažujme jeden $m \doteq 20\,\mathrm{kg}$ kyj.

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{kyj}^2 \approx 1{,}2\,\mathrm{GJ}$$

Ivan by tedy do jednoho kyje musel dát přes gigajoule své energie.

S jakým zrychlením musel Ivan kyje urychlovat? Uvažujme, že je urychloval rovnoměrně a že je velmi vysoký, a tak je urychloval $h_i = 2\,\mathrm{m}$.

$$h_i = \frac{1}{2} a\tau^2\,, \quad v_\mathrm{kyj} = a\tau \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_\mathrm{kyj}^2}{2h_i} \approx 3 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,$$

kde jsme označili jako τ čas urychlování kyje. Ivan by tedy musel pohybovat svou paží s takto nemožně velkým zrychlením, přičemž celé urychlování by trvalo $\tau \approx 3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$. Při takto agresivním urychlování by se nejspíš kyj sám rozbil svou setrvačností.

Zaměřme se teď na odpor vzduchu, který jsme dosud přecházeli, byť jsme si uvědomovali, že bude hrát značnou roli. Použijeme Newtonův vztah pro odpor vzduchu

$$F = \frac{1}{2} C \varrho S v^2\,,$$

kde C je součinitel odporu daný tvarem tělesa, který bývá většinou mezi 0,1 a 1,2 a v našem případě ho budeme považovat[5] za 0,5, $\varrho = 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu, S je plocha průřezu tělesa ve směru pohybu, která může být u kyje řádově $S \approx 0{,}1\,\mathrm{m}^2$. Zkusme dosadit, jaká by pak měla být odporová síla na počátku pohybu v případě, že by byl kyj urychlen „pouze“ na rychlost v_kyj. Síla je pak $F \doteq 4 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$, což by pro 20 kg kyj znamenalo zrychlení zhruba $2 \cdot 10^5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, což by kyj teoreticky zabrzdilo v první sekundě[6], resp. ještě dříve, takže konstantnost odporu si v úvahách dovolit nemůžeme a kyje by musely vyletět nejspíše s řádově vyšší rychlostí. Ovšem musíme si uvědomit, že hustota vzduchu s výškou klesá, a zejména, že když je rychlost nižší, tak klesá i odporová síla. Navíc s takto vysokými rychlostmi v atmosféře narážíme na limity použité rovnice, protože jsme v rychlostech řádově nad rychlostí zvuku ve vzduchu. Newtonova rovnice se tudíž ani nedá spolehlivě použít.

Laskavá čtenářka si pak už sama dopočte, že by energie dodaná na počátku kyji stačila na jeho zahřání o více jak několik tisíc stupňů Celsia a s ohledem na odpor vzduchu by se tedy kyj po cestě nejspíš uhořel (stejně jako se to často stává malým meteoritům).

Závěrem můžeme říci, že Mrazík by se měl z hlediska výuky fyziky zakázat, nebo používat pouze jako odstrašující případ.

Komentář k došlým řešením

Častým nedostatkem v řešení bylo nedostatečné zdůvodnění, proč je vlastně všechno, co počítáte, nesmysl, a hlavně nevypočtení nějakých hodnot, které by vaši domněnku podpořily. Případně, když už se objevilo nějaké číslo s nějakou jednotkou, tak kde vlastně? Je potřeba uvést výpočet nebo zdroj, odkud údaj pochází.

Bylo mnoho zajímavých a sem tam i originálních myšlenek, jak aféru „Ivanovy kyje“ shodit ze stolu. Málokdo se ale asi na Mrazíka podíval pořádně, protože připomínka k tomu, že kyjů

[5] Ve skutečnosti se mění v průběhu letu, jak se kyj otáčí, ale stejně nám jde pouze o řádový odhad.

[6] První vteřina je zde zmíněná čistě účelově. Atmosféru bychom mohli hodně hrubě považovat za vysokou 10 km s hustotou vzduchu jako je u hladiny moře. Je to hodně hrubé přiblížení, ale pro odhad nám to stačí. Vzhledem k rychlosti, s jakou by kyje měly opustit Ivanovu ruku, tedy skrz atmosféru projde za právě jednu sekundu.

dopadl značně vyšší počet, než vyletěl do vesmíru, byla zaznamenaná pouze jednou. Chtěl bych ale vyzdvihnout zpracování Samuela Kočiščáka, který neváhal a na video použil videoanalýzu v programu Tracker, takže k různým faktickým připomínkám přidal i tu, že by let kyjů s naměřenou počáteční rychlostí trval pouze asi 5 sekund.

Velká část řešitelů si uvědomila, že kyje by pravděpodobně v průběhu letu atmosférou shořely, ale bohužel značná část psala o tom, že by uhořely až v průběhu dopadu. To zní velice nepravděpodobně, vzhledem k tomu, že pokud uvážíme odpor vzduchu, tak při stoupání by musely mít kyje daleko vyšší rychlost a tím pádem i vyšší odpor. Je pravdou, že by proletěly rychleji, ale pokud by měly uhořet, tak by spíše uhořely už při výstupu.

Část řešitelů se zaměřila na to, jak dostat kyje zpátky v rámci Sluneční soustavy. Zajímavý byl nápad vyhodit kyje kolmo na rovinu oběhu Země kolem Slunce tak, aby oběžná rychlost kyjů kolem Slunce byla totožná s oběžnou rychlostí Země (po jejich vzdálení od Země). To by bylo ještě „realistické“ teoretické řešení. Horší byly nápady úplně zanedbat gravitaci Země a Slunce a hodit je skrz Slunce bez ohledu na to, že by, pokud již neshořely předtím, kyje určitě shořely. Nemluvě o tom, že při vzdalování od Země by jejich rychlost klesala, pak zase stoupala při přibližování Slunci, pak zase klesala při vzdalování a pak se kyje zase urychlily u Země. Takže předpoklad rovnoměrného pohybu by byl opravdu značně přestřelený.

Dalším přístupem, který se pro odhad rychlosti pohybu kyje objevil, byl výpočet mezní rychlosti v atmosféře. Ten má několik vad. Nejdřív by totiž Ivan musel hodit řádově vyšší rychlostí, než je mezní, aby kyje získaly nějakou dostatečnou výšku, ale tím zase narážíme na přiblížení, které bylo učiněno, a to, že hustota atmosféry je přibližně konstantní, což opět nemůže platit vzhledem k tomu, jak dlouho se kyje mají pohybovat. Ale je to jinak zajímavý odhad, který vychází řádově blíže než aproximace homogenním gravitačním polem ve vakuu.

Závěrem bychom ještě uvedli velké upozornění – pokud máme pohyb hmotného bodu ve vzduchoprázdnu a pokud tam nemáme žádné další síly, tak se tento hmotný bod musí nutně pohybovat po kuželosečce, což bývá nejčastěji elipsa či hyperbola. Může to být teoreticky úsečka či parabola. Ale rozhodně se nemůže stát to, že vyšleme družici „kopnutím“ nahoru a ona nám sama začne obíhat po kruhové trajektorii v nějaké výšce nad Zemí. K tomu musí mít družice motory, aby upravily její kurz po vynesení do požadované výšky. Také si jen tak samy od sebe neřeknou, že spadnou. Jedině pokud se srazí nebo pokud klesají z důvodu tření o atmosféru. Nemluvě o tom, jak je občas zveličována geostacionární dráha… Ano, je to význačná dráha, ale jen protože družice na ní oběhne Zemi jednou za den. Jinak může družice obíhat v úplně libovolné výšce, která je dostatečně velká, aby nedrhla o atmosféru a která je dostatečně nízká, aby byla ve sféře gravitačního vlivu Země.

P.S.: Není to jenom Mrazík, co má vadnou fyziku. Jen si poslechněte ty souboje ve vesmíru se zvukovými efekty ve Star Wars nebo se podívejte, co provádějí Tom a Jerry…

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.