

## Úloha IV.3 ... kačenka ve vaně

3 body; průměr 1,23; řešilo 26 studentů

Na trajektu máme nezabrzdené auto, které stojí rovnoběžně s jeho osou. Trajekt se houpe harmonicky na vlnách, tj.  $\varphi(t) = \Phi \sin(\omega t)$ . Maximální úhlová výchylka trajektu je  $\Phi$ . Jak daleko od kraje můžeme zaparkovat auto, aby nám nemohlo spadnout do moře? Uvažujte, že maximální výchylka se pomalu zvětšuje z nuly na hodnotu  $\Phi$ .

*Napadlo Lukáše a Jáchyma, když se zamýšleli nad fyzikou každodenní hygieny.*

Najprv si popíšeme pohyb auta na trajekte. Můžeme považovat auto za hmotný bod. Keďže je nezabrzdené, pohybuje sa po palube trajektu bez trenia. Ako vyplýva zo zadania, uhol sklonu paluby  $\varphi$  (uhol medzi rovinou paluby a vodorovnou rovinou) závisí od času harmonicky, teda

$$\varphi(t) = \Phi \sin(\omega t),$$

kde  $\Phi$  je maximálna uhlová výchylka trajektu a  $\omega$  je uhlová frekvencia nakláňania.

Popisovať pohyb auta vzhľadom na more by bola iba komplikácia. Budeme preto popisovať pohyb auta v sústave spojenej s trajektom, kde sa auto pohybuje iba na priamke. Na auto nám pôsobí *tiažová sila*  $\mathbf{G}$  (pôsobí šikmo, keďže je trajekt naklonený o uhol  $\varphi$ ) a *normálová sila* (sila od podložky, má vertikálny smer). Nesmieme zabudnúť, že sústava spojená s trajektom nie je inerciálna, a preto nám v nej budú na auto pôsobiť aj zdanlivé, fiktívne, *zotrvačné sily* (odstredivá sila, Coriolisova sila a sila, v dôsledku uhlového zrýchlenia). Našťastie sú zotrvačné sily v našom prípade oproti tiažovej a normálovej sile zanedbateľné. Prečo? Ak by sa trajekt nakláňal prudko sem-tam, tak by boli zotrvačné sily badateľné a nahadzovalo by to s nami na palube. V tomto prípade nám postačí uvažovať nakláňanie trajektu na miernych vlnách. Pri búrlivom mori by sme neuvažovali, či nám vypadlo auto z trajektu, ale či sa nám trajekt nepotopil. Tým sa nám problém zjednodušil.

Tiažová sila bude mať vždy vertikálnu zložku, ktorú bude stále kompenzovať normálová sila (aby sa nám auto neprepadlo pod palubu). Preto nás bude zaujímať iba horizontálny pohyb, a teda horizontálna zložka tiažovej sily. Na auto pôsobí horizontálna sila

$$F_x = -G \sin(\varphi(t)) = -mg \sin(\varphi(t)).$$

Ako už bolo spomenuté, uvažujeme mierne vlny. To znamená, že uhol naklonenia trajektu  $\varphi$  je malý ( $1 \text{ rad} \gg \varphi$ ), takže v našom prípade môžeme použiť aproximáciu sínusu ( $\sin x \approx x$ ) a dostaneme

$$F_x = -mg\Phi \sin(\omega t).$$

Sila nám určuje zrýchlenie v danom smere

$$F_x = ma_x = -mg\Phi \sin(\omega t).$$

Vidíme, že táto rovnica nám niečo pripomína. Podobná závislosť zrýchlenia  $a_x$  od času je aj v prípade kmitov.

Riešime teda diferenciálnu rovnicu

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -g\Phi \sin(\omega t).$$

Prvou separáciou premenných a integráciou dostaneme závislosť rýchlosti od času

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{g\Phi}{\omega} \cos(\omega t) + v_0.$$

Výsledek si můžeme overit spätnou deriváciou. Máme tu neznámu rýchlosť  $v_0$ . Môžeme to interpretovať tak, že okrem kmitavého pohybu sa auto ešte rovnomerne pohybuje jedným smerom. V zadaní sa písalo, že uvažujeme, že sa maximálna uhlová výchylka trajektu pomaly zväčšovala z nuly na  $\Phi$ . Na začiatku auto stálo v pokoji na palube. Nie je žiaden dôvod, prečo by sa malo auto začať rovnomerne pohybovať smerom dopredu, či dozadu, takže uvedená rýchlosť  $v_0$  bude nulová (zo symetrie ☺).

Druhou separáciou premenných a integráciou dostaneme závislosť polohy od času

$$x = \frac{g\Phi}{\omega^2} \sin(\omega t) + x_0.$$

Z rovnakých dôvodov (ako v prípade rýchlosti) nie je žiaden dôvod, prečo by malo auto kmitať okolo iného miesta ako miesta, kde stálo na začiatku. Preto i vzdialenosť  $x_0$  bude nulová. Auto bude vykonávať kmity s amplitúdou  $A$

$$A = \frac{g\Phi}{\omega^2}$$

a uhlovou frekvenciou  $\omega$ . Z toho vyplýva, že auto musíme dať od okraja ďalej, ako je vzdialenosť  $A$ , ak nechceme, aby nám spadlo do mora.

Musíme spomenúť, že uvedený vzťah nám vyšiel pre malé výchylky (aproximácia sínusu) a nízku uhlovú frekvenciu (zanedbanie zotrvačných síl).

**Jakub Kocák**  
jakub@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.