Úloha III.5 ... Gazprom

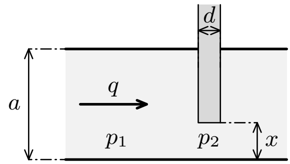
5 bodů; průměr 2,96; řešilo 27 studentů

Na plynovodu na daleké Sibiři, kterým teče zkapalněný zemní plyn, došlo k havárii a bylo nutné jej uzavřít. Spočítejte, jakou práci musel vykonat Váňa Vasilijevič, který byl vyslán k zásobníku zavřít výborně promazaný deskový ventil na příslušné lince. Jakou sílu musel během tohoto aktu vynakládat (vyjádřete ji v závislosti na rozumně vybrané veličině)? Ventil si představte jako desku, která je postupně vsouvána ze strany napříč do potrubí. Ve velkém rezervoáru, který je na linku připojen, je tlak $p = 2\,\mathrm{MPa}$, deskový ventil má tloušťku $d = 10\,\mathrm{cm}$, potrubí má čtvercový průřez o straně $a = 1\,\mathrm{m}$ a zkapalněný plyn o hustotě $\varrho = 480\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ jím protéká s průtokem $q = 20\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$. *Aleš poslouchal motivační píseň ruského plynárenského gigantu.*

Začněme obrázkem. Na nákresu geometrie systému vidíme vodorovný řez potrubím, přičemž vyznačeny jsou veličiny ze zadání. Uvažme, že tlak v potrubí těsně před ventilem (p_1) odpovídá tlaku v rezervoáru (p). Průřezu potrubí přiřadíme označení $S_1 = a^2$ a průřezu ventilu $S_2 = ax$. Budeme chtít zjistit, jaký je tlak p_2 ve ventilu v závislosti na ploše pod ním, protože ten vyvolává tlakovou sílu $F = p_2 A$ ($A = da$ je plocha hrany ventilu), kterou musíme při zavírání překonat. Práci pak spočteme jako $\int F(x)\,\mathrm{d}x$, kde x je vertikální rozměr volného prostoru ve ventilu (viz obrázek 1). O mezích integrace budeme mluvit později.

K určení tlaku p_2 využijeme Bernoulliho rovnici. Protože vsouváme desku z boku, můžeme člen odpovídající tíhovému potenciálu z rovnice vypustit.

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2\,,$$



Obr. 1: Uspořádání situace s ventilem

přičemž potřebujeme vědět, jaké rychlosti plynu jsou v potrubí a ve ventilu. Kapalný plyn budeme považovat za nestlačitelný.

Rychlosti spočítáme z rovnice kontinuity, kde výhodně použijeme hodnotu průtoku q známou ze zadání (obecně je totiž $q = Sv$),

$$S_1 v_1 = q = S_2 v_2\,,$$

z čehož vyplývá, že známe obě rychlosti – $v_1 = q/S_1 = q/a^2$ a $v_2 = q/S_2 = q/(ax)$ – za plochy jsme už dosadili jejich konkrétní velikosti spočtené ze zadaných parametrů.

Vyjádřeme nyní tlak p_2 z Bernoulliho rovnice

$$p_2 = \frac{1}{2}\varrho q^2\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right) + p_1 = \frac{1}{2}\frac{\varrho q^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right) + p_1\,.$$

Teď je dobrá chvíle zamyslet se nad tím, co nám tento vztah říká. Jediným nezávislým parametrem v něm je x, kratší hrana otevřené části potrubí. Na začátku zavírání ventilu je $x = a$, pročež člen se závorkou zmizí úplně a na píst působí tlaková síla vyvolaná tlakem p_2. Když ventil budeme postupně zasouvat, x se bude zmenšovat, ale $1/x^2$ poroste, což znamená, že celý člen se závorkou bude mít záporné znaménko. Rychle proudící tekutina tedy snižuje tlak na ventil. Ale pro x jdoucí k nule $1/x^2$ roste nade všechny meze, a tudíž existuje taková pozice zasunutí ventilu x_0, při které snížení tlaku vyrovná tlak v rezervoáru (p_1). Když bychom ventil zasouvali ještě hlouběji, následováním vzorce bychom došli k tomu, že tlak ve zkoumaném místě bude záporný. To se ovšem v potrubích neděje. Jev, ke kterému v takovýchto případech dochází, se nazývá *kavitace* a jde o vytvoření bublin nasycené páry kapaliny. To se stává v případě, kdy je v kapalině při dané teplotě tlak nižší než tenze par této kapaliny. Vzniknuvší bubliny potom při dopadu na stěny poškozují materiál potrubí. Co to znamená pro náš výpočet? Určeme nejdříve hodnotu x_0 (položíme hodnotu $p_2 = 0$)

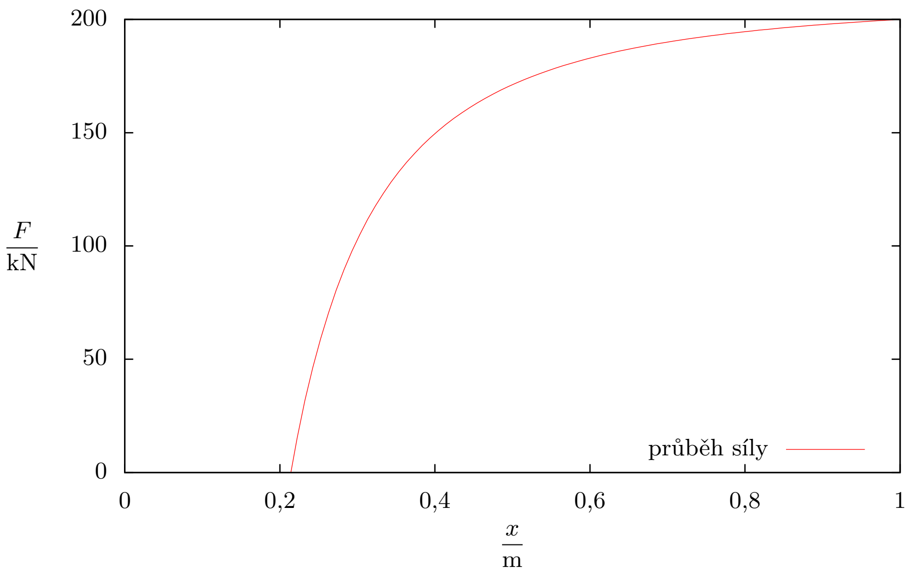
$$x_0 = \sqrt{\frac{\varrho a^2 q^2}{2p_1 a^4 + \varrho q^2}}\,,$$

což je pro naše data přibližně $x_0 = 0{,}21\,\mathrm{m}$. To znamená, že ke kavitaci začne docházet, když když ventil zavřeme přibližně do čtyř pětin.

Víme[1], že tlak nasycených par kapalného methanu se pohybuje od 15 kPa do 190 kPa. Tlak, který je v rezervoáru, je ovšem 10–100krát větší, zároveň nevíme, jak a kde se bubliny tvoří, a celý tento problém se týká jen pětiny dráhy, nahraďme tento zbytek nulou. Protože víme, že tlaková síla na píst působící proti směru jeho pohybu je $F(x) = adp_2(x)$, můžeme její průběh popsat jako

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leq x_0\,. \\ ad\left[\frac{1}{2}\frac{\varrho q^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right) + p_1\right]\,, & x > x_0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Pro konkrétní situaci vidíme průběh na obrázku 2.



Obr. 2: Průběh síly působící na píst.

Samotná velikost práce již je lehce spočitatelná z předpisu pro sílu (1). Je sice potřeba spočítat určitý integrál $\int F(x)\,\mathrm{d}x$, ale k tomu s výhodou můžeme použít například volně dostupný Wolfram Alpha. Výsledek pak určíme ve tvaru

$$W = (AB + C)(a - x_0) + A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x_0}\right)\,,$$

[1] `http://www.vscht.cz/uchi/e_tabulky/antoine.html`

kde $A = d\varrho q^2/(2a)$, $B = 1/a^2$, $C = adp_1$ a x_0 známe z předchozích úvah. Numerická hodnota vykonané práce pak po dosazení hodnot ze zadání je $W \doteq 130\,\mathrm{kJ}$. Kdo neovládá Wolfram Alpha, může stejného údaje dosáhnout pomocí svého oblíbeného tabulkového procesoru nebo programovacího jazyka.

Sice jsme dospěli k nějakému číselnému výsledku, nicméně nebude úplně správně. V základě jsme pro určení tlaku ve ventilu použili Bernoulliho rovnici, která ovšem platí pro místa na jedné proudnici. Také jsme mlčky předpokládali, že v celém průřezu je rychlost konstantní, což zřejmě neplatí. V takovémto (čtveratém) potrubí se těžko nebudou vyskytovat různé víry, které situaci ještě více zkomplikují, nehledě na to, že jsme zanedbali jevy, které nastanou potom, co začne docházet ke kavitaci. Nedá se tedy říct, že Váňa Vasilijevič pak všechnu energii získá zpátky snědením čtyř čtverečků mléčné čokolády, nicméně alespoň přibližný odhad nám to může poskytnout.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz