

Úloha III.4 ... nadzvuková nebo podzvuková?

4 body; průměr 3,16;

řešilo 61 studentů

Uvažujte bombu padající volným pádem svisle dolů na cíl. Po celou dobu pohybu, který začíná z klidu, vydává vlivem tření o vzduch zvuk, který se šíří rychlostí $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jaká je maximální možná rychlost dopadu, aby ti, na které bomba dopadne, ji ještě za živa slyšeli?

Lukáš sledoval kačenky na rybníce.

Ze zadání víme, že bomba padá volným pádem, tj. bez tření o vzduch, i když právě tímto nulovým třením zvuk vydává, což doufáme, že vás nevyvedlo moc z míry a že jste se s plnou vervou vrhli do řešení.

Protože bomba padá volným pádem, můžeme pro polohu zdroje zvuku psát

$$y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2,$$

kde H je počáteční výška bomby, g je tíhové zrychlení a t je čas od začátku pádu. Nyní určíme čas T , ve kterém doputuje na zem zvuk vydaný v čase t . Ten musí překonat vzdálenost $y(t)$ určenou dle vztahu výše, tj. pro čas T platí

$$T(t) = t + \frac{y(t)}{c}.$$

Nyní si ukážeme malý trik, který se ve fyzice velmi často používá, protože zjednodušuje zápis. Položíme $c = 1$, což vypadá divně, protože rychlost zvuku není bezrozměrná. Ale nejde o problém, protože dostaneme-li obecný výsledek, tak není problém do něj dopsat na správná místa násobky c a to tak, abychom sčítali vždy veličiny stejného rozměru. Jiné vysvětlení je, že dále nebudeme vzdálenosti měřit v metrech, ale v sekundách, kde převodní konstanta bude právě rychlost zvuku c .

Proto můžeme psát

$$T(t) = H + t - \frac{1}{2}gt^2.$$

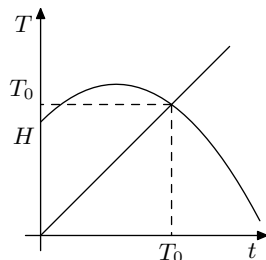
Dále víme, že bomba dopadne v čase T_0 , pro který platí

$$T_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Abyste si, na které bomba dopadne, slyšeli ještě za živa, musí existovat čas $t_0 \in (0, T_0)$ určující okamžik vydání zvuku takový, aby $T(t_0) < T_0$.

Nakreslíme si proto graf 1 závislosti T na t , tedy závislost doby slyšení signálu na době vyslání signálu, a také do tohoto grafu zaneseme přímkou $T = t$. Je zřejmé, že na průsečíku $T = T(t)$ a $T = t$ dojde k dopadu bomby na zem, protože vzdálenost zdroje od pozorovatele $\Delta = c(T - t)$ je nulová.

Nyní se podíváme, co značí přímkou $T = \text{konst}$, resp. její průsečíky s $T(t)$. Vlastně se tímto ptáme: V jakém okamžiku byl vydán zvuk, který nyní slyšíme? Samozřejmě pro tuto interpretaci se musíme omezit na $t < T$, protože ty ostatní zvukové vlny nebyly ještě v daný moment vydány. Jak tohoto využít při řešení úlohy? Jednoduše. Pokud bude existovat průsečík paraboly s přímkou $T = \text{konst}$ takový, aby $t \in (0, T)$, tak bombu uslyšíme. Z obrázku 1 je vidět, že



pro časy $T \in \langle H, T_0 \rangle$ existuje čas t vydání zvuku, a proto v těchto časech bude bomba slyšet. Dále je též vidět, že aby byly budoucí oběti varovány, musí platit

$$H < T(T_0),$$

do čehož můžeme dosadit ze vztahů výše a dostáváme

$$H < H + T_0 - \frac{1}{2}gT_0^2 = H + T_0 - H.$$

Nyní se již opět odvrátíme od označení $c = 1$ a nerovnici výše přepíšeme

$$H < cT_0 = c\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Nyní uvážíme, že pro rychlost dopadu platí $v_D = \sqrt{2Hg}$, a jednoduchými úpravami dostáváme

$$v_D < 2c,$$

což je velmi zajímavý výsledek, protože bombu můžeme slyšet před dopadem, i když dopadá nadzvukovou rychlostí.

Komentář k došlým řešením

Skoro všichni, kteří poslali řešení, měli správný výsledek. Bohužel nemálo z vás neargumentovalo, že $2c$ je maximální možná rychlost „slyšitelného“ dopadu, resp. že první zvuková vlna dorazí na zem nejdříve. Za toto opomenutí jsme strhávali jeden bod. Pokud jste měli řešení správně a pokusili jste se pěkně odhadnout další úskalí této úlohy, a to hlavně odpor vzduchu, odhadnutí frekvence vydávaného zvuku nebo jeho hlasitosti, dostali jste bonusový bod.

Alternativní způsob řešení

Stačilo dát do rovnosti dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu bomby a rovnoměrného pohybu zvuku vydaného na počátku pádu,

$$ct = \frac{v^2}{2g}, \quad v = gt \quad \Rightarrow \quad v = 2c,$$

a použít velmi pěkný argument z vašich řešení, proč zvuk vydaný na počátku dorazí na zem nejdříve: „Před dosažením rychlosti zvuku je rychlost bomby menší než rychlost zvuku, proto zvuková vlna vydaná v pozdějším čase dorazí na zem později. Po překročení rychlosti zvuku můžeme již vydávané zvukové vlny ignorovat, protože dorazí později než bomba.“

Lukáš Ledvina
lukas1@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.