Úloha II.P ... gravitace si žádá větší slovo 5 bodů; průměr 1,91; řešilo 54 studentů

Co kdyby se „přes noc“ změnila hodnota gravitační konstanty na dvojnásobek a přitom by zůstaly zachovány ostatní fyzikální konstanty na původních hodnotách? A co kdyby se zvětšila stokrát? Rozepište se o různých aspektech – zejména o životě na Zemi a drahách vesmírných objektů. *Karel zase v zajetí astrofyziky.*

Základnom riešenia bolo uvedomiť si, kde všade (v ktorých javoch) sa objavuje gravitačná konštanta G, či už priamo alebo nepriamo. Napríklad v gravitačnom zákone sa vyskytuje priamo, kde

$$|\boldsymbol{F}_G| = G\frac{M_1 M_2}{r_{21}^2}$$

a v rovniciach pre šikmý vrh je nepriamo zahrnutá v gravitačnom zrýchlení g, kde

$$x = x_0 + v_{0,x}t\,,$$
$$y = y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde

$$g = \frac{GM_{\mathrm{Zem}}}{R_{\mathrm{Zem}}^2}\,.$$

Skôr než začneme rozoberať konkrétne prípady treba povedať ešte dve veci. Javy, ktoré sme tu uviedli, zďaleka nebudú všetky. Pôjde o najvýznamnejšie, ktoré nás napadli. Druhá vec, v pátraní súboru základných konštánt, ktoré priamo určujú konštanty vo všetkých zákonoch známej fyziky, sa zúžil počet na zopár konštánt (medzi nimi je napríklad rýchlosť svetla, Planckova konštanta i gravitačná konštanta), medzi ktorými sa zatiaľ nepodarila nájsť previazanosť, čo však nevylučuje, žeby sa časom mohla nájsť. Budeme predpokladať, že sú nezávislé.

Uvažujme zmenu gravitačnej konštanty k-násobkom

$$G' = kG\,,$$

kde G je pôvodná gravitačná konštanta, G' je nová gravitačná konštanta a k je bezrozmerné číslo.

Prvá zjavná vec, ktorá zo zmenou G prichádza, je zmena gravitácie a už spomínaný šikmý vrh na povrchu Zeme. Zo vzťahu pre gravitačné zrýchlenie dostaneme, že sa k-násobne zväčší

$$g' = \frac{G' M_{\mathrm{Zem}}}{R_{\mathrm{Zem}}^2} = \frac{kGM_{\mathrm{Zem}}}{R_{\mathrm{Zem}}^2} = kg\,.$$

Predstavme si malý kanón, ktorý strieľa gule priamo nad seba (vojensky neužitočný kanón). Deň pred zmenou letela guľa do výšky h a celý pád jej trval čas t. Keď riešime tento jednoduchý problém, tak dostaneme v závislosti od počiatočných podmienok vzťahy

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\,, \qquad t = \frac{2v_0}{g}\,.$$

Na druhý deň nastala zmena konštanty. Síce kanón dodal guli rovnakú kinetickú energiu (a tým pádom i hybnosť a rýchlosť), ale namerali sme výšku h' a čas t'

$$h' = \frac{v_0^2}{2g'} = \frac{h}{k}\,, \quad t' = \frac{2v_0}{g'} = \frac{t}{k}\,.$$

Pri šikmom vrhu kanónom je maximálny dostrel dosiahnutý pod uhlom 45° a dostrel d je

$$d = \frac{v_0^2}{g}\,.$$

Asi už nikoho neprekvapí, že po zmene konštanty bude nový dostrel d' k-násobne kratší

$$d' = \frac{v_0^2}{g'} = \frac{d}{k}\,.$$

Tak vidíme, že pri hodoch sa k-násobne skrátia časy hodov, maximálne výšky i dostrely pod konštantným uhlom.

Zábavnejšie to však je v prípade vesmírnych obežníc, a to či už sa týka nášho Mesiaca alebo planét Slnečnej sústavy. Vo všeobecnosti podľa 1. Keplerovho zákona sa objekty v radiálnom gravitačnom poli pohybujú po kužeľosečkách. Pohyb po kružniciach je iba jeden špeciálny prípad rýchlosti a vzdialenosti od Slnka a prakticky nedosiahnuteľný, keďže zo všetkých možných rýchlostí tomu zodpovedá práve jediná hodnota rýchlosti. Pohyby planét sú síce približne kružnicové, ale fakticky ide o elipsy s malou výstrednosťou/excentricitou (sploštenosťou dráhy). Pre jednoduchosť však môžeme predpokladať pred zmenou gravitačnej konštanty pohyb planét po kružniciach. Pred zmenu je potom vzťah medzi rýchlosťou planéty v_1 a vzdialenosťou od Slnka r_1 (z rovnosti gravitačnej a dostredivej sily)

$$v_1^2 = \frac{GM_\mathrm{S}}{r_1}\,.$$

Po zmene gravitačnej konštanty majú všetky planéty pôvodné rýchlosti (to znamená rovnaká veľkosť i smer = kolmé na spojnicu so Slnkom) a v novom poli sa budú pohybovať všeobecne po kužeľosečkách. Ak sa gravitačná konštanta zväčší, začne na ne pôsobiť väčšia dostredivá sila, ako je potrebná na udržanie na kruhovej dráhe, a preto sa budú pohybovať po elipsách. Jeden vrchol (afélium) bude v mieste, kde sa nachádzali, keď nastala zmena konštanty (lebo rýchlosť je kolmá na spojnicu so Slnkom iba vo vrcholoch elipsy a od tohto bodu sa planéty pohybujú bližšie k Slnku). Je jasné, že potom druhý vrchol (perihélium) je najbližšia vzdialenosť, na ktorú sa dostali k Slnku. Zo zákona zachovania momentu hybnosti a energie vieme túto vzdialenosť vypočítať

$$m v_1 r_1 = m v_k r_k\,,$$

$$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{G' M_\mathrm{S} m}{r_1} = \frac{m v_k^2}{2} - \frac{G' M_\mathrm{S} m}{r_k}\,.$$

Po dosadení dostaneme takúto kvadratickú rovnicu

$$\frac{r_k^2}{r_1^2}(2k-1) + \frac{r_k}{r_1}(-2k) + 1 = 0\,.$$

Okrem afélia dostávame aj druhé riešenie

$$r_k = \frac{r_1}{2k-1}\,.$$

Teraz na základe tohto výsledku môžeme povedať tieto skutočnosti. Ak by klesla gravitačná konštanta na viac ako polovicu ($0 < k < 0,5$), tak všetky planéty budú mať dostatočnú rýchlosť

planéta	Merkúr	Venuša	Zem	Mars	Jupiter	Saturn	Urán
r_1 [AU]	0,39	0,72	1,0	1,52	5,20	9,54	19,18
r_2 [AU]	0,13	0,24	0,33	0,51	1,73	3,18	6,39
r_{100} [AU]	0,002	0,004	0,005	0,008	0,026	0,048	0,096

Tabulka 1: Najmenšie vzdialenosti planét od Slnka pre rôzne k.

na odlet od Slnka. V tabuľke 1 je vidno pre rôzne k rôzne najmenšie vzdialenosti planét od Slnka.

Najskôr si budú v dráhe prekážať susedné planéty. Pri zvyšovaní už pri $k = 1{,}19$ nastáva prekryv možných oblastí stretnutia medzi Zemou a Venušou. Pre $k = 2$ sa jedine neprekrývajú dráhy Jupitera a Marsu. O zábavu sa postará pásmo planétok, ktoré je pekne rozložené medzi Marsom a Jupiterom a ktoré bude mať perihélium približne 0,6 AU. To znamená, že by sme sa mohli pripraviť na deštrukčnú vesmírnu prestrelku. Pri eliptických dráhach sa pohybujú planéty v podstatne väčšom rozsahu vzdialeností od Slnka, čím sa podstatne zvýši vplyv vzájomnej gravitačnej interakcie planét. Takže by sme mohli byť skôr, či neskôr svedkom zrážky planét alebo vyhodenia planéty zo Slnečnej sústavy niektorou z väčších planét. Tak či onak by to boli pre Zem časy nepekné (pekelné alebo mrazivé). Pri pôvodnej gravitačnej konštante je polomer Slnka je 0,004 6 AU. Zvýšením gravitačnej konštanty sa polomer Slnka zmenší, ale stále bude mať Slnko so svojou pre Zem nebezpečnou atmosférou rozmer rádovo tisíciny astronomickej jednotky. Pre $k = 100$ už je jasné, že planéty Merkúr, Venuša a Zem budú míňať Slnko v tesnej blízkosti alebo narazia na jeho povrch. V perihéliu by sa Zem usmažila pri teplote cca 3 700 °C (už by sme sa nemohli sťažovať na slabé leto), deň by trval 18 hodín a noc 6 hodín. Pri takej teplote by bola Zem úplne roztopená (až na diamanty a grafit, ktoré by čoskoro zhoreli vo vzduchu) a bola by to lietajúca kvapka magmy (vhodnejší výraz kvapa magmy). Kolízia s inými planétami by bola otázka času.

Ďalším javom, ktorý by gravitačná konštanta skomplikovala život na zemi sú kapilárne javy. Výška h, do ktorej vystúpi kvapalina v kapiláre, je

$$h = \frac{2\sigma\cos\alpha}{r\varrho g}\,,$$

kde σ je povrchové napätie, α je styčný uhol, r je polomer kapiláry, ϱ je hustota kvapaliny a g je gravitačné zrýchlenie. Čiastočne funguje transport vody v pôde, a potom i v úzkych cievnych zväzkoch, na základe kapilarity, čím sa zabezpečuje transport látok. Zmenou gravitačnej konštanty sa zníži výška vzlínania na

$$h' = \frac{2\sigma\cos\alpha}{r\varrho g'} = \frac{h}{k}\,.$$

Tým sa značne skomplikuje transport látok najmä vysokým rastlinám, stromom.

Keďže aspektov, kde sa to odrazí, je skutočne veľa, uvedieme iba zopár príkladov bez podrobnejšej analýzy.

- Zmenou gravitačnej konštanty bude vzduch priťahovaný silnejšie, čím sa zvýši hustota a tlak vzduchu pri povrchu Zeme.

- Aby mohla byť voda v potrubí vytlačená do vyšších poschodí, potrebujeme na to podľa Bernoulliho rovnice tlak. Zmenou gravitačnej konštanty potrebujeme dodať vode väčšiu potenciálnu energiu, teda budeme potrebovať väčší tlak, ktorý by vykonával prácu.
- Stavby sú síce navrhnuté tak, aby vydržali viac ako maximálnu záťaž (takže $k = 2$ by asi prežili), ale pri určitej hranici sa prekročí medza pevnosti materiálu a stavby sa zrútia (budovy, mosty, ...).

Úloha bola hodnotená podľa hĺbky analýzy a počtu javov, kde sa zmena odrazí.

Jakub Kocák
jakub@fykos.cz