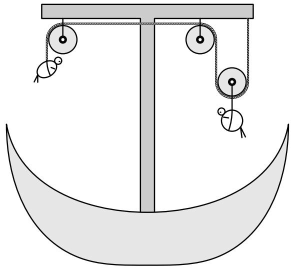
Úloha II.3 ... Benátčané

4 body; průměr 3,18; řešilo 38 studentů



Dva mladí, ale bohužel poněkud prostorově výraznější, Benátčané Paolo a Francesca Muschetti (o hmotnostech $m_\mathrm{P} = 180\,\mathrm{kg}$ a $m_\mathrm{F} = 130\,\mathrm{kg}$) by se chtěli spolu projet na gondole. Žádný gondoliér je ale nechce vzít na svou loď, protože ví, že by je všechny tři loď neunesla. Chytrý gondoliér Jacopo ale vymyslel rampu, na kterou umístil tři kladky dle obrázku. Skrz kladky provlékl lano a oba mladé Benátčany na ně upevnil (viz obrázek) každého na opačný konec, tak, že nejprve byla nahoře lehčí Francesca a po jisté chvíli ji v této pozici vystřídal těžší Paolo. Jak vysoká musí být rampa, aby gondola stihla přejet přes kanál? Doba jízdy je $\tau = 60\,\mathrm{s}$. Předpokládejme, že při použití tohoto zařízení se již gondola nepotopí. Zanedbejte veškeré tření, hmotnost lana a momenty setrvačnosti kladek. *Lada se vydala na výlet*

Úloha má dvě řešení, v závislosti na tom, jak budou Paolo a Franceska uchyceni. Oběma řešením je společná strategie výpočtu. Jak Paolo, tak Franceska se budou na kladkách pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem a tato zrychlení budou jednoznačně dána jejich hmotnostmi a geometrií úlohy. Budeme-li tedy chtít spočíst nejnižší možnou výšku rampy, aby se gondola nepotopila, hledáme ve skutečnosti dráhu, kterou Franceska, resp. Paolo urazí za určitý čas – τ, nebo $\tau/2$. Podívejme se tedy na oba případy zvlášť.

Nejprve případ, kdy Franceska je na levé kladce, Paolo na pravé – viz obrázek. Rozborem sil, které na Benátčany působí, získáváme rovnice:

$$m_\mathrm{P} a_\mathrm{P} = m_\mathrm{P} g - 2T\,,$$
$$m_\mathrm{F} a_\mathrm{F} = m_\mathrm{F} g - T\,,$$
$$a_\mathrm{F} = -2a_\mathrm{P}\,.$$

První rovnice je pohybová rovnice Paola: síla, která na něj působí, je rozdílem tíhové síly a dvojnásobku napěťové síly lana T. Za kladný směr uvažujeme směr působení tíhové síly. Druhá rovnice je pohybová rovnice Francesky. Rovnice třetí je vazební podmínka, dává do souvislosti zrychlení Francesky a_F a Paola a_P. Jednoduchými úpravami dostáváme $a_\mathrm{P} = -1{,}12\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ a $a_\mathrm{F} = 2{,}24\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Paolo se tedy pohybuje vzhůru – znaménko zrychlení je záporné.

Vzhledem k tomu, že Franceska je na začátku nahoře a Paolo v půlce výšky rampy l, gondoliér Jacopo nemůže ani jednomu z nich udělit počáteční rychlost, která by efektivně zmenšila nároky na výšku rampy. Její minimální výšku tak získáme jako

$$l = \frac{a_\mathrm{F} t^2}{2}\,,$$

neboť víme, že Franceska je na začátku nahoře a po uplynutí doby $t = \tau = 60\,\mathrm{s}$ bude právě dopadat na palubu gondoly. Číselně získáváme závratnou hodnotu $l = 4\,032\,\mathrm{m}$.

Nyní rozebereme případ, kdy Franceska je na pravé kladce, Paolo na levé. Analogickou úvahou získáme soustavu lineárních rovnic

$$m_\mathrm{P} a_\mathrm{P} = m_\mathrm{P} g - T\,,$$
$$m_\mathrm{F} a_\mathrm{F} = m_\mathrm{F} g - 2T\,,$$
$$a_\mathrm{P} = -2a_\mathrm{F}\,,$$

jejímž řešením je $a_\mathrm{P} = 5{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a $a_\mathrm{F} = -2{,}65\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Vidíme, že zrychlení Paola a_P má kladné znaménko, v momentě, kdy je Paolo na palubě gondoly a Franceska ve výšce l, může gondoliér udělit Paolovi určitou počáteční rychlost (zkuste si explicitně spočítat její velikost!) takovou, že se v půlce plavby bude nacházet přesně v maximální výšce l s nulovou rychlostí. Minimální výšku gondoly l tak získáme jako

$$l = \frac{a_\mathrm{P} t^2}{2}\,,$$

kde $t = \tau/2 = 30\,\mathrm{s}$. Číselně vychází $l = 2\,385\,\mathrm{m}$, tedy nižší hodnota než v prvním případě. Paolo a Franceska tak nejspíš budou nakonec muset jít pěšky…

Pavel Irinkov
`pavel@fykos.cz`