Úloha II.1 ... z Prahy do Brna

2 body; průměr 1,74; řešilo 74 studentů

Centra měst Drážďan a Vídně jsou od sebe vzdálena zhruba $d = 370\,\mathrm{km}$ vzdušnou čarou po Zemi. O co kratší by byla vzdálenost mezi nimi, pokud bychom mohli jít přímým tunelem skrz Zemi? Zanedbejte rozdíl nadmořských výšek, ve kterých jsou města položena. Na závěr můžete srovnat i délku cesty, kterou byste mezi městy jeli autem.

Nápověda *Aby byla tato úloha jednoduchá, je zde nápověda. Goniometrické funkce můžeme pro malé úhly aproximovat (tedy přiblížit) jako*

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}\,,$$

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}\,,$$

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}\,,$$

kde úhel dosazujeme v radiánech. Toho můžeme využít pro vyjádření neznámé v rovnici, kde vystupuje jak samotný úhel, tak i obsažený v nějaké goniometrické funkci.

Karel chtěl zase něco vytunelovat.

Vzdálenost měst s_p po povrchu lze vyjádřit pomocí vzorce pro délku kruhového oblouku

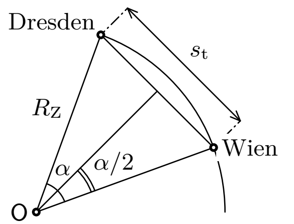
$$s_\mathrm{p} = R_\mathrm{z}\alpha\,,$$

kde R_z je poloměr Země a α je úhel, který vytínají spojnice měst se středem Země. Z tohoto vztahu můžeme snadno vyjádřit

$$\alpha = \frac{s_\mathrm{p}}{R_\mathrm{z}}\,.$$

Vzdálenost měst s_t při cestě hypotetickým tunelem lze za znalosti úhlu α vyjádřit jako (viz obrázek 1)

$$s_\mathrm{t} = 2R_\mathrm{z}\sin\frac{\alpha}{2}\,. \tag{1}$$



Obr. 1: Tunel z Drážďan do Vídně

Pro zjednodušení můžeme pro malé úhly aproximovat sinus prvními dvěma členy Taylorovy řady, tedy

$$\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}\,.$$

Po dosazení této aproximace do vztahu (1) vychází

$$s_\mathrm{t} \approx 2R_\mathrm{z}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}\right) = R_\mathrm{z}\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{24}\right) = R_\mathrm{z}\left(\frac{s_\mathrm{p}}{R_\mathrm{z}} - \frac{s_\mathrm{p}^3}{24R_\mathrm{z}^3}\right) = s_\mathrm{p} - \frac{s_\mathrm{p}^3}{24R_\mathrm{z}^2}\,,$$

a tedy

$$\Delta s = s_\mathrm{p} - s_\mathrm{t} = \frac{s_\mathrm{p}^3}{24R_\mathrm{z}^2}\,.$$

Po dosazení $s_\mathrm{p} = 370\,\mathrm{km}$ a $R_\mathrm{z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ vychází $\Delta s = 52\,\mathrm{m}$.

Odhadnout dobu cesty mezi těmito dvěma městy je záludné, neboť je potřeba znát průměrnou rychlost jízdy. Co ale můžeme snadno vyjádřit, je relativní změna doby jízdy při jízdě tunelem za předpokladu, že průměrná rychlost jízdy na povrchu je stejná jako průměrná rychlost jízdy tunelem

$$\frac{\Delta t}{t_\mathrm{p}} = \frac{\frac{\Delta s}{v}}{\frac{s_\mathrm{p}}{v}} = \frac{\Delta s}{s_\mathrm{p}}\,.$$

Po dosazení vychází $\Delta t/t_\mathrm{p} = 0{,}014\,\%$, což je naprosto zanedbatelná hodnota. Pokud by průměrná rychlost činila např. $v = 100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, pak by rozdíl doby jízdy při cestě po povrchu a tunelem činil zhruba $\Delta t = 1{,}9\,\mathrm{s}$, což při celkové době jízdy 3 hodiny 42 minut nehraje opravdu žádnou roli.

Nakonec můžeme srovnat vzdálenost měst při cestě tunelem se vzdáleností měst při cestě po silnici. Podle webu `http://mapy.cz` je nejkratší cesta z Drážďan do Vídně dlouhá 438 km. Zjišťujeme tedy, že „klikatost“ silnice má na délku cesty mnohem větší vliv než to, že je Země kulatá.

Zdeněk Jakub
`zdenekjakub@fykos.cz`