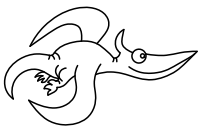
Úvodem

Milí řešitelé,

je tu nejen jaro a blížící se Velikonoce, ale i pátá série FYKOSu. Shodou okolností (ale klidně předstírejme, že šlo o záměr) zde převažují úlohy s tématikou vody, ale neminou vás ani hrátky s plutoniem a jiné vylomeniny. Někteří vyvolení z vás se již můžou těšit na nadcházející jarní soustředění, které jistě bude stát za to, takže brzy na viděnou.

Organizátoři



Zadání V. série

Termín uploadu: 9. 4. 2013 20.00
Termín odeslání: 8. 4. 2013

Úloha V.1 ... vaříme oceány

2 body

Odhadněte, kolik energie by bylo potřeba na odpaření všech pozemských oceánů.

Úloha V.2 ... molekuly

2 body

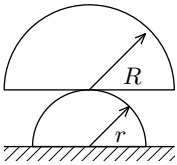
Předpokládejme, že při vypaření kapalinového tělesa o povrchu S dochází k jeho přeměně na jednotlivé molekuly, které lze považovat za elementární kapalinová tělíska, jejichž úhrnný povrch je ale podstatně větší než povrch původního tělesa. Znáte-li skupenské teplo vypařování vody $L = 2{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}}$ a povrchové napětí vody (energie připadající na plošnou jednotku povrchu kapaliny) $\alpha = 7{,}2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, odhadněte velikost jejích molekul.

Úloha V.3 ... plážové válení

4 body

Mějme dva půlválce ležící na sobě jako na obrázku. Spodní má poloměr r a horní poloměr R. Pro jaký poloměr R s pevným r je soustava stabilní?

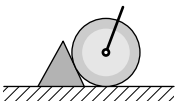
Bonus V případech, kdy je soustava stabilní (pokud vychýlíme vrchní válec z rovnovážné polohy, tak začne provádět malé kmity), s jakou periodou bude kmitat?



Úloha V.4 ... zašpalkovat

4 body

Může zašpalkované letadlo pustit motory na zemi na plný tah a zůstat na místě? Pokuste se o obecné vyjádření uvažující různé materiály kola, špalku i podlahy. Změní se to, bude-li špalek vysoký akorát na dotek kola?



Úloha V.5 ... skladník Вова

4 body

Skladník Вова měl ve svém sibiřském příbytku přímotop s příkonem 2 kW po pradědečkovi jako jediný zdroj vytápění. Když se na podzim začalo trochu ochlazovat, rozhodl se po dlouhé době přímotop zapnout, ale zjistil, že již nefunguje. Вова byl celý nešťastný, protože se mu nechtělo utrácet celé své úspory za nový přímotop. Když si pak dal něco na zahřátí a zahnání deprese,

napadl ho geniální nápad: ve skladu, kde pracuje, se válejí tuny hřejivého plutonia 237. Kolik plutonia si má Вова odnést do svého příbytku, aby nahradil dosloužívší přímotop a v následující zimě neumrzl? Předpokládejte, že plutonium je téměř čisté a má doma dost olověného nádobí po prapraprapraprababičce, takže dokáže zachytit veškerou vycházející energii.

Úloha V.P ... Praha pod vodou

4 body

Vzpomeňte si na velké povodně z roku 2002. Odhadněte, kolik vody pojme pražské metro při povodních. Důležité rozměry jako velikosti souprav, počet stanic, celkovou délku tubusů metra a další si najděte na internetu.

Úloha V.E ... Vypař se!

8 bodů

Určete, jak závisí rychlost vypařování vody na povrchu, který tato kapalina zaujímá. Experiment proveďte alespoň pro pět různých vhodných nádob. Zamyslete se nad dalšími faktory, které mohou rychlost vypařování vody ovlivnit. Upozorňujeme, že experiment je velmi vhodné nechat probíhat po delší dobu (několik dní), proto ideálně začněte o hodně dřív než pár hodin před uzávěrkou.

Úloha V.S ... seriálová

6 bodů

a) Z adresy `http://fykos.cz/rocnik26/4-compass.dat` si stáhněte data naměřená Langmuirovou sondou na tokamaku COMPASS. Vykreslete voltampérovou charakteristiku a určete hodnotu plovoucího potenciálu.
b) Při znalosti povrchu sondy ($A = 6\,\mathrm{mm}^2$) a složení plazmatu (deuterium) zanalyzujte voltampérovou charakteristiku a získejte hodnotu elektronové teploty a hustoty.
c) Napište krátký oslavný hymnus popisující vynález Langmuirovy sondy.

Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... antieinsteinovská

2 body; průměr 1,87; řešilo 46 studentů

Napište nám, jaký je váš nejoblíbenější fyzik/fyzička, kromě Einsteina. Co udělal/a? Proč je podle vás tak skvělý/á? Proč by měl/a být známý/á? Rozepište se o jeho/jejích objevech a životě. *Karel propadl historickým okénkem.*

Po světě chodí a chodilo mnoho vynikajících fyziků, takže vybrat z nich svého největšího oblíbence nemusí být snadný úkol. Alespoň pro mě to představovalo skoro horší dilema, než si vybírat zákusek v cukrárně. Nakonec jsem dospěla k tomu, že jak svým přínosem pro vědu, tak svým životem je mi sympatická Marie Curie-Sklodowská a že o Feynmanovi, Newtonovi a dalších se toho od vás ostatních doufejme dočtu až hanba, takže jsem s konečnou platností zůstala u této dámy.

Marie Curie-Sklodowská se narodila 7. listopadu 1867 v polské Varšavě, většinu života však strávila ve Francii, kde při studiích na Sorbonně poznala svého manžela Pierra Curie, se kterým se věnovala badatelské činnosti až do jeho smrti, po které s vědeckou prací dále pokračovala sama. Zemřela 4. července 1934 na důsledky ozáření.

Na jejím životopise je fascinující, že může být velmi hezky založen na větě: „Byla první ženou, která...“ Začneme poměrně zvolna výrokem, že byla první ženou, která složila přijímací zkoušky na fakultu fyziky a chemie zmiňované pařížské univerzity, což se pravděpodobně jednou některé poštěstit muselo. Že se však nejednalo o náhodu dokázala v roce 1903, kdy jako první žena na světě získala doktorát z fyziky za práci na zkoumání tehdy relativně nedávno objeveného jevu radioaktivity. Vše korunovala o necelý rok později, když za tento výzkum spolu se svým manželem a Henri Becquerelem získala Nobelovu cenu za fyziku, a jelikož se jednalo o teprve třetí ročník udílení Nobelových cen, tak jistě nepochybujete o tom, že ani v tomto ji žádná jiná žena nepředběhla. V roce 1906 se stala první profesorkou Sorbonny, což byl ovšem bohužel důsledek tragické smrti jejího muže, po kterém se stala vedoucí katedry. Její poslední prvenství tohoto typu, které zde bude zmíněno, je to, že jako první a zatím stále jediná žena spočívá v pařížském Pantheonu.

Podíváme-li se na její přínosy na poli fyziky a chemie, pak základem je nepochybně právě radioaktivita. Její objev měl sice na svědomí Henri Becquerel v roce 1896, nicméně Marie Curie-Sklodowská se svým manželem určila její pravděpodobnou příčinu jako rozpad nestabilních atomových jader. Velké úsilí věnovala zkoumání rud uranu (některé vzorky odebrala i v Jáchymově). Její snaha najít vysvětlení toho, proč uran samotný poskytuje méně ionizujícího záření než některé jeho rudy, vedlo k objevení nových prvků, radia a polonia. Za objev a separaci radia získala druhou Nobelovu cenu, tentokrát za chemii v roce 1911, a dodnes je jediným člověkem, který dostal tuto cenu za fyziku i chemii. Také se zabývala možností léčby rakoviny pomocí ionizujícího záření, takže určitě i díky ní se metody založené na tomto principu dnes v lékařství úspěšně používají. Ač výše uvedené trochu svádí k tomu, abychom považovali Marii Curii-Sklodowskou za mimořádnou ženu, myslím, že mnohem lepší je brát ji jako zcela mimořádnou osobnost, která vědě zasvětila téměř celý svůj život.

Komentáře k došlým řešením

Jak napsal jeden z vás: „Vyzdvihnout pouze jednoho fyzika prostě nejde. Žili v jiných dobách, každý věděl něco jiného a něčím jiným se zabýval. Postupně v dílčích krocích dovedli vědu do dnešního stavu.“ Přestože s tím nelze polemizovat, čtyřiceti čtyřem z vás se svého oblíbence vybrat podařilo a vaše řešení pojednávala o celkem čtyřiadvaceti různých fyzicích.

Nejvíce sympatií si získal Feynman, kterého si vybralo osm lidí, takže zhruba 18 % ze všech, kteří jste tuto úlohu poslali. V těsném závěsu skončil Tesla se šesti „body“, Hawking utrhl krásné čtyři, Newton získal tři a Kepler, Archimedes a Curie-Sklodowská mají svorně po dvou. Největší skupinu tedy tvořili fyzikové, kteří byli soukromým favoritem pouze jedné osoby, takže to alespoň bylo poměrně rozmanité čtení. Patřila mezi ně známá jména jako Pascal, Volta, Watt, Planck, ale pak i specialitky v podobě vědců, o kterých běžně neslyšíte, mezi ně patří například Zdeněk Kopal, Alfred Wegner, Ernst Mach a Michio Kaku.

Došlá řešení byla vesměs docela čtivá, takže případné bodové ztráty byly většinou způsobeny tím, že neprošla zcela základním testem googlitelnosti (nic proti inspiraci z jakéhokoliv zdroje, ale pokud se text z valné části až zázračně shodoval s Wikipedií, tak to bylo zohledněno).

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha IV.2 ... vesmírná skleróza

2 body; průměr 1,90; řešilo 52 studentů

Jaký je poměr objemu Země ku objemu Měsíce? Vypočítejte jej pouze ze znalosti, že poměr jejich hmotností je přibližně 81 a že intenzita gravitačního pole je na povrchu Země přibližně šestkrát vyšší než na povrchu Měsíce. *Karel prohýřil celou noc záludnými kvízy.*

K povrchu Měsíce je náš testovací bod přitahován silou šestkrát menší než na Zemi. Uvědomíme si, jak se počítá intenzita gravitačního pole. Je to vlastně síla, která působí na testovací těleso jednotkové hmotnosti, jinak řečeno

$$K = \frac{F_\mathrm{g}}{m}\,,$$

kde gravitační sílu F_g umíme spočítat ze známého vzorce

$$F_\mathrm{g} = G\frac{mM}{R}\,.$$

Můžeme tedy napsat

$$G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2} = 6G\frac{M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}^2}\,.$$

Dále se podíváme na druhou informaci, víme, že poměr hmotností je 81. Hmotnost vystupuje ve výše uvedeném vzorci, tak jej jenom přepíšeme

$$\left(\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{M}}\right)^2 = \frac{M_\mathrm{Z}}{6M_\mathrm{M}} = \frac{81}{6}\,.$$

Teď si stačí uvědomit, že se jedná o koule a pokud známe poměr jejich poloměrů, stačí vyjádřit poloměr ze vzorce pro výpočet objemu koule, který je $V = 4\pi R^3/3$. Pokud si R vyjádříme a dosadíme do poměru, pak po vykrácení konstant můžeme napsat

$$\frac{V_\mathrm{Z}}{V_\mathrm{M}} = \left(\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{M}}\right)^3 = \left(\frac{81}{6}\right)^{\frac{3}{2}}\,,$$

což je po dosazení přibližně 50 (přesněji 49,6).

Vypočítanou hodnotu poměru můžeme srovnat i s reálnými údaji. Reálný objem Měsíce je $2{,}195\,8 \cdot 10^{10}\,\mathrm{km}^3$, Země $1{,}083\,2 \cdot 10^{12}\,\mathrm{km}^3$. Dáme-li tyto hodnoty do poměru, získáme výsledek 49,3. S naším výpočtem, který bral v úvahu pouze přibližné poměry jsme se příliš nesekli.

Jana Poledníková
janap@fykos.cz

Úloha IV.3 ... kačenka ve vaně

3 body; průměr 1,23; řešilo 26 studentů

Na trajektu máme nezabrzděné auto, které stojí rovnoběžně s jeho osou. Trajekt se houpe harmonicky na vlnách, tj. $\varphi(t) = \Phi \sin(\omega t)$. Maximální úhlová výchylka trajektu je Φ. Jak daleko od kraje můžeme zaparkovat auto, aby nám nemohlo spadnout do moře? Uvažujte, že maximální výchylka se pomalu zvětšuje z nuly na hodnotu Φ.

Napadlo Lukáše a Jáchyma, když se zamýšleli nad fyzikou každodenní hygieny.

Najprv si popíšeme pohyb auta na trajekte. Môžeme považovať auto za hmotný bod. Keďže je nezabrzdené, pohybuje sa po palube trajektu bez trenia. Ako vyplýva zo zadania, uhol sklonu paluby φ (uhol medzi rovinou paluby a vodorovnou rovinou) závisí od času harmonicky, teda

$$\varphi(t) = \Phi \sin(\omega t)\,,$$

kde Φ je maximálna uhlová výchylka trajektu a ω je uhlová frekvencia nakláňania.

Popisovať pohyb auta vzhľadom na more by bola iba komplikácia. Budeme preto popisovať pohyb auta v sústave spojenej s trajektom, kde sa auto pohybuje iba na priamke. Na auto nám pôsobí *tiažová sila* $\boldsymbol{G}$ (pôsobí šikmo, keďže je trajekt naklonený o uhol φ) a *normálová sila* (sila od podložky, má vertikálny smer). Nesmieme zabudnúť, že sústava spojená s trajektom nie je inerciálna, a preto nám v nej budú na auto pôsobiť aj zdanlivé, fiktívne, *zotrvačné sily* (odstredivá sila, Coriolisova sila a sila, v dôsledku uhlového zrýchlenia). Našťastie sú zotrvačné sily v našom prípade oproti tiažovej a normálovej sile zanedbateľné. Prečo? Ak by sa trajekt nakláňal prudko sem-tam, tak by boli zotrvačné sily badateľné a nahadzovalo by to s nami na palube. V tomto prípade nám postačí uvažovať nakláňanie trajektu na miernych vlnách. Pri búrlivom mori by sme neuvažovali, či nám vypadlo auto z trajektu, ale či sa nám trajekt nepotopil. Tým sa nám problém zjednodušil.

Tiažová sila bude mať vždy vertikálnu zložku, ktorú bude stále kompenzovať normálová sila (aby sa nám auto neprepadlo pod palubu). Preto nás bude zaujímať iba horizontálny pohyb, a teda horizontálna zložka tiažovej sily. Na auto pôsobí horizontálna sila

$$F_x = -G \sin(\varphi(t)) = -mg \sin(\varphi(t))\,.$$

Ako už bolo spomenuté, uvažujeme mierne vlny. To znamená, že uhol naklonenia trajektu φ je malý ($1\,\mathrm{rad} \gg \varphi$), takže v našom prípade môžeme použiť aproximáciu sínusu ($\sin x \approx x$) a dostaneme

$$F_x = -mg\Phi \sin(\omega t)\,.$$

Sila nám určuje zrýchlenie v danom smere

$$F_x = ma_x = -mg\Phi \sin(\omega t)\,.$$

Vidíme, že táto rovnica nám niečo pripomína. Podobná závislosť zrýchlenia a_x od času je aj v prípade kmitov.

Riešime teda diferenciálnu rovnicu

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -g\Phi \sin(\omega t)\,.$$

Prvou separáciou premenných a integráciou dostaneme závislosť rýchlosti od času

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{g\Phi}{\omega}\cos(\omega t) + v_0\,.$$

Výsledok si môžeme overiť spätnou deriváciou. Máme tu neznámu rýchlosť v_0. Môžeme to interpretovať tak, že okrem kmitavého pohybu sa auto ešte rovnomerne pohybuje jedným smerom. V zadaní sa písalo, že uvažujeme, že sa maximálna uhlová výchylka trajektu pomaly zväčšovala z nuly na Φ. Na začiatku auto stálo v pokoji na palube. Nie je žiaden dôvod, prečo by sa malo auto začať rovnomerne pohybovať smerom dopredu, či dozadu, takže uvedená rýchlosť v_0 bude nulová (zo symetrie ☺).

Druhou separáciou premenných a integráciou dostaneme závislosť polohy od času

$$x = \frac{g\Phi}{\omega^2}\sin(\omega t) + x_0\,.$$

Z rovnakých dôvodov (ako v prípade rýchlosti) nie je žiaden dôvod, prečo by malo auto kmitať okolo iného miesta ako miesta, kde stálo na začiatku. Preto i vzdialenosť x_0 bude nulová. Auto bude vykonávať kmity s amplitúdou A

$$A = \frac{g\Phi}{\omega^2}$$

a uhlovou frekvenciou ω. Z toho vyplýva, že auto musíme dať od okraja ďalej, ako je vzdialenosť A, ak nechceme, aby nám spadlo do mora.

Musíme spomenúť, že uvedený vzťah nám vyšiel pre malé výchylky (aproximácia sínusu) a nízku uhlovú frekvenciu (zanedbanie zotrvačných síl).

Jakub Kocák
jakub@fykos.cz

Úloha IV.4 ... rána kladivem

4 body; průměr 2,05; řešilo 21 studentů

Pokud udeříte kladivem do jednoho konce kovové tyče (jejíž průměr je mnohem menší než její délka), začnou se okolo ní šířit zvukové vlny. Narýsujte a co nejpřesněji popište, jak se bude s časem měnit tvar vlnoploch v rovině tyče. Mezi vašimi obrázky by měly být znázorněny vlnoplochy, a to v okamžicích, kdy se vlna dostala na druhý konec tyče a kdy se po odrazu vrátila opět do místa úderu. Nezapomeňte konstrukci popsat. Uvažujte pouze podélné kmity tyče. Poměr rychlosti šíření zvuku v tyči a ve vzduchu je $\beta = v_{\mathrm{tyc}}/v_{\mathrm{vzduch}} \approx 10$.

Lukáš se prohraboval starými archivy.

Na riešenie použijeme Huygensov princíp. Ten tvrdí, že každý bod *vlnoplochy* sa stáva malým zdrojom guľových vĺn, ktoré ďalej vysielajú žiarenie. Obalom miest, kam sa dostane za malý čas toto vlnenie, je nová vlnoplocha. Čo to ale je vlnoplocha? Nám bude stačiť pracovné chápanie, že sú to práve tie body, kde sa nachádzajú maximá výchylky.[1,2]

[1] Správna definícia hovorí, že vlnoplocha je množina bodov s rovnakou fázou. Uvidíme ale, že tu by nám niečo takéto nebolo veľmi užitočné a len by sme zbytočne zavádzali ďalší pojem *fázy*.

[2] A o akej výchylke to vlastne hovoríme? Zvuk je len zmena tlaku vzduchu, takže môžeme popisovať napríklad výchylky tlaku. Hustota je rovnako dobrý popis, ale náš ušný bubienok reaguje práve na tlak vzduchu.

Aby nám vzniklo vlnenie, potrebujeme zdroje. V tomto prípade je zdroj reprezentovaný rázom v tyči. Ráz ide po tyči tam a spať a tam. Kde sa nachádza, spôsobí rozvlnenie okolitého vzduchu. Fyzikálne sa to dá dobre predstaviť tak, že tyč sa v mieste rázu mierne deformuje, a tým rozhýbe vzduch.

Máme teda zdroj, ktorý sa hýbe rýchlosťou v_{tyc}. To, že je táto rýchlosť väčšia ako rýchlosť zvuku vo vzduchu, je veľmi dôležité. V každom mieste vytvorí guľovú vlnoplochu, ktorá sa postupne rozširuje do priestoru. Vieme, že jej polomer rastie s rýchlosťou v_{vzduch}.

Prvá vec, ktorú si môžeme všimnúť je, že celý problém má rotačnú symetriu okolo tyče. Preto sa nemusíme zaoberať popisom v celom priestore, ale stačí nám ľubovoľná rovina obsahujúca tyč. Skutočný obraz by sme dostali rotáciou našich vlnoplôch okolo tyče.

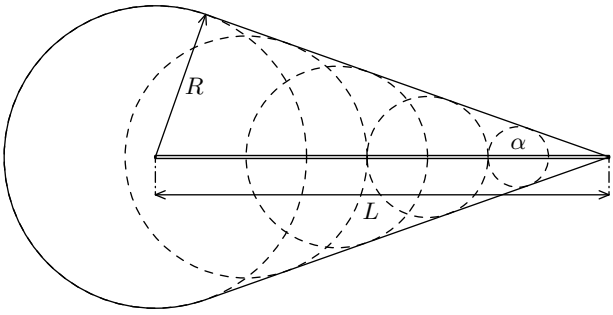
Skúmajme moment, v ktorom ráz prvýkrát dorazí na druhý koniec tyče. Polomer kružníc, ktoré predstavujú body s rovnakou fázou pochádzajúce od zdrojov na tyči, porastie lineárne so vzdialenosťou od tohoto konca.[3] Nech úder do tyče nastal v okamihu 0 a vlna cestovala tyčou čas Δt. Vieme, že určite platí

$$\Delta t = \frac{L}{v_{\text{tyc}}}\,,$$

kde sme L označili dĺžku tyče. Kružnica vychádzajúca z konca tyče, do ktorého sme udreli, sa zatiaľ stihla nafúknuť na polomer

$$R = v_{\text{vzduch}}\Delta t = v_{\text{vzduch}}\frac{L}{v_{\text{tyc}}} = \frac{L}{\beta}\,.$$

Obálka ostatných postupne zmenšujúcich sa kružníc predstavuje trojuholník, ako je zrejmé z náčrtku postupne zmenšujúcich sa kruhových vĺn. Tento trojuholník má v čase Δt vrchol práve vo vrchole tyče. Opäť z náčrtku vidíme, že trojuholník sa na kruhovú vlnu (tú, ktorá vznikla v čase 0) napája hladko. Teda strana trojuholníka je dotyčnica ku kružnici s polomerom R. Nakreslime si teda celú situáciu (pre ilustratívnosť volíme $\beta = 3$), naznačiac aj vrcholový uhol trojuholníka.



Obr. 1: Tvar vlnoplôch v čase Δt

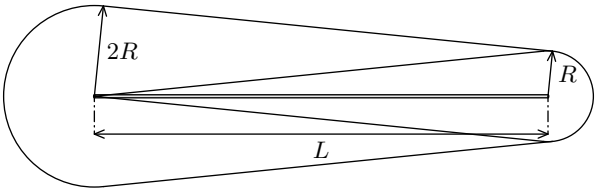
Keďže vyznačený priemer je kolmý na dotyčnicu ku kružnici, uhol α môžeme vyjadriť jednoducho

$$\sin\alpha = \frac{R}{L} = \frac{1}{\beta}\,.$$

[3] Tu práve prichádza do hry Huygensov princíp. Namiesto textu vám ale odporúčam vziať si papier, nakresliť si kružnicu a aplikovať Huygensov princíp. Uvidíte, že výsledkom je len nafúknutá pôvodná kružnica.

V momente Δt sa ráz otočí a vráti sa späť. Vlna, ktorá existovala v čase Δt, sa bude ďalej nafukovať, čo si najlepšie predstavíme na nafukovaní pôvodných zdrojov vlnenia umiestnených na tyči. V čase $2\Delta t$ sa pôvodná kružnica zväčší na polomer $2R$, ostrý vrchol sa zmení na kružnicu s polomerom R a spája ich dotyčnicová priamka so sklonom α.

Naviac sa vytvára obdoba trojuholníka zakončeného kružnicou. Podobne ako pri pohybe od času 0 do Δt. Keď tieto dva obrazce nakreslíme, dostávame pre zadanú hodnotu $\beta = 10$



Obr. 2: Tvar vlnoplôch v čase $2\Delta t$

Toto je teda hľadaný tvar vlnoplochy. To, čo sme tu opísali, sú vlastne vrcholy vlniek, ktoré doputovali do naznačených miest. Fáza hovorí o istej vnútornej premennej, ktorá sa vyskytuje pri matematickom popise a na ktorej závisí výchylka (pre harmonický oscilátor je fáza rovná ωt, kde ω je uhlová frekvencia). V naznačených miestach teda predpokladáme rovnakú výchylku a snažili sme sa popisovať čelo vlny. Teda tam by bolo práve maximum výchylky (nezabúdajme, že hovoríme o tlaku).

Máme ešte jeden problém, rozdvojenie vlnoplochy. Ak sa vám to zdá neprirodzené, zdá sa vám dobre. Naša analýza totiž jednoducho uvažovala o šírení vzruchu dopredu a nafukovaní vlnoplochy podľa Hugyensovho princípu. Ak by sme chceli byť presnejší, museli by sme ísť o úroveň nižšie a pozrieť sa na vlnovú rovnicu. V skutočnosti totiž vzruch nepostupuje iba dopredu, ale zanecháva za sebou nenulové výchylky. S týmito výchylkami by potom interferovala vlna od vzruchu vracajúceho sa späť.

Kvalitatívne môžeme povedať, že vonkajší tvar tak, ako sme ho opísali, bude zachovaný (náš popis nehovorí nič o vnútrajšku, pre vonkajšiu obálku funguje dobre). Trojuholník, ktorý vzniká vo vnútri, bude v blízkosti rázu stále viditeľný, práve vytvorené kruhové vlny totiž majú najvyššiu výchylku, a teda len tak ľahko nezinterferujú so slabými zvyškovými vlnami.

V blízkosti rozdvojenia vlnoplochy sú ale obe vlny približne rovnako silné, a tu by nastávala interferencia. V mieste napojenia vnútorného trojuholníka na kružnicu s polomerom R by teda nebola viditeľná tak jasne, ako je na obrázku. Toto všetko je diskusia nad rámec toho, čo sme požadovali od vašich riešení. Tak sa nestrachujte, môžete akurát dostať bonus.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

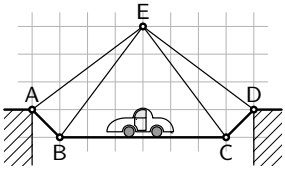
Úloha IV.5 ... stavme mosty

4 body; průměr 2,00; řešilo 31 studentů

Mějme dvourozměrnou část jednoduché mostní konstrukce jako na obrázku tvořenou z tyčí spojených v bodech A, B, C, D a E. *Zjistěte, které tyče jsou namáhány tlakem a které tahem a jak velkými silami, pokud jsou tyče nehmotné a na tyči* BC *stojí autíčko o hmotnosti* m. *Délky tyčí určete z obrázku.*

Bonus *Uvažujte, že všechny tyče mají konstantní délkovou hustotu* λ.

Karel vzhlížel k zuřivým mostním konstrukcím.



Každý z kloubů mostu je v klidu, a tedy celková výsledná síla na něj působící je nulová. Tento fakt nám dává do vztahů síly působící na tyče. Označme T_{XY} sílu, kterou je stlačována tyč spojující body XY. Pak například tyč AE působí na kloub E silou velikosti T_{AE}. Tato síla působí rovnoběžně s tyčí AE směrem od ní. Auto působí na tyč BC tíhovou silou mg. Ta se rozkládá do kloubů B a C rovnoměrně, tedy $mg/2$ směrem dolů na každý z nich. Na klouby A a D pak působí reakční síla od země.

Počítejme rovnou bonusový případ. Řešení základní úlohy pak bude pouze dosazení $\lambda = 0$. Tíha každé tyče se rozkládá rovnoměrně do jejích koncových bodů. Tyč AE tedy navíc působí na kloub E silou $5\lambda g/2$ směrem dolů. Hmotnost celého mostu i s autem je pak $(26+2\sqrt{2})\lambda+m$.

Jelikož toto jsou jediné síly působící na klouby, můžeme přejít k výpočtu. Všimněme si, že most je osově souměrný, a proto stačí problém vyřešit pro levou polovinu mostu. Jelikož se jedná o vektorové rovnice, bude nejsnazší si je zapsat po složkách ve vodorovném a svislém směru. Pro svislý směr dostáváme pro klouby A, B a E

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5}T_{\mathsf{AE}} + \frac{1}{\sqrt{2}}T_{\mathsf{AB}} + (13+\sqrt{2})\lambda g + \frac{mg}{2} - \frac{5}{2}\lambda g - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda g = 0\,, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{\mathsf{AB}} - \frac{4}{5}T_{\mathsf{BE}} - \frac{mg}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2} + 3\right)\lambda g = 0\,, \\ \frac{3}{5}T_{\mathsf{AE}} + \frac{4}{5}T_{\mathsf{BE}} - 5\lambda g = 0\,. \end{aligned}$$

Vodorovná složka sil působících v kloubu E se vyruší automaticky ze symetrie. Vodorovná složka v kloubu B je

$$\frac{1}{\sqrt{2}}T_{\mathsf{AB}} - \frac{3}{5}T_{\mathsf{BE}} - T_{\mathsf{BC}} = 0\,.$$

Kdybychom řekli, že kloub A je pevně zasazen v zemi, reakce od země by právě vyrušila působení od mostu i ve vodorovném směru, a tedy by vodorovná složka síly byla automaticky vyvážená. Ovšem čtyři rovnice, které v tuto chvíli máme, nemají jednoznačné řešení. Z fyzikálního hlediska si to můžeme přestavit tak, že země může tlačit klouby A a D k sobě libovolnou silou a jediným důsledkem bude, že se bude měnit napětí v tyčích. To by nastalo třeba při změnách teplot. Abychom tomu zabránili, řekneme, že body A a D nejsou pevně uchyceny ve vodorovném směru. To nám přidává poslední rovnici

$$-\frac{4}{5}T_{\mathsf{AE}} - \frac{1}{\sqrt{2}}T_{\mathsf{AB}} = 0\,.$$

Vyřešením této soustavy pěti lineárních rovnic získáme

$$\begin{aligned} T_{\mathsf{AB}} &= -\frac{2\sqrt{2}}{7}m - \frac{2}{7}\left(2+21\sqrt{2}\right)\lambda g\,, \\ T_{\mathsf{AE}} &= \frac{5}{14}m + \frac{5}{14}\left(21+\sqrt{2}\right)\lambda g\,, \\ T_{\mathsf{BC}} &= -\frac{1}{8}m - \frac{1}{8}\left(51+\sqrt{2}\right)\lambda g\,, \\ T_{\mathsf{BE}} &= -\frac{15}{56}m + \frac{5}{56}\left(7-3\sqrt{2}\right)\lambda g\,. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že tyč AE bude vždy namáhaná tlakem, zatímco tyče AB a BC budou vždy namáhané tahem. Tyč BE je pro malá λ a tedy i základní případ namáhaná tahem. Ovšem pokud

$$\lambda > \frac{3}{7-3\sqrt{2}}m\,,$$

je tyč BE namáhaná tlakem.

Jáchym Sýkora
jachym@fykos.cz

Úloha IV.P ... Mrazík

5 bodů; průměr 2,91; řešilo 35 studentů

V pohádce Mrazík vyhodil Ivan loupežníkům kyje do takové výšky, že spadly až za půl roku. Jak vysoko by je musel vyhodit, aby dopadly za takovou dobu? Vytvořte první a druhý hrubý odhad. Zdůvodněte, proč jsou tyto odhady nejspíš řádově špatné. Co jste všechno zanedbali? Z jakých důvodů je celkově nesmyslné, aby kyje dopadly na prakticky stejné místo po půl roce? Nebraňte se proudu kritiky na tuto klasickou pohádku! *Lukáš si vzpomněl na Mrazíka.*

Budeme řešit pohyb jednoho z kyjů. Zkusme nejprve naivně předpokládat, že Ivan vyhodil kyj v homogenním gravitačním poli v bezodporovém prostředí. Ivánek hází kolmo nahoru z výšky, kterou označíme jako nulovou, s nějakou počáteční rychlostí v_0, kterou budeme chtít určit. Rovnice pro svislý vrh vzhůru pak vypadají

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,, \tag{1}$$

$$v = v_0 - gt\,, \tag{2}$$

kde h je výška kyje v čase t, v je jeho aktuální rychlost a g je tíhové zrychlení. Čas, za který mají kyje dopadnout, je půl roku $T \doteq 15{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{s}$. Z druhé rovnice pak můžeme určit původní rychlost kyje, protože víme, že ve chvíli návratu by měly mít kyje stejnou rychlost, ale opačného směru.

$$-v_0 = v_0 - gT \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{gT}{2} \approx 8 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \approx \frac{c}{4}\,,$$

kde $c \doteq 3{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je rychlost světla ve vakuu. Z výsledku je patrné, že bychom už správně měli využít pro výpočet speciální teorii relativity, protože kyj by měl být vyhozen relativistickou rychlostí. Ovšem než se zběsile vrhneme do relativistických řešení, tak si můžeme vyzkoušet vypočíst, do jaké výšky by dle výše uvedeného výpočtu měl kyj vystoupit. Buď si rovnou vzpomeneme, že nejvyššího bodu dosáhne kyj v čase $T_{\max} = v_0/g = T/2$, nebo si uvědomíme,

že v okamžiku obratu je rychlost nulová a vypočteme tento čas z rovnice (2), nebo si to můžeme ukázat složitěji tak, že rovnici (1) doplníme na čtverec

$$h = -\frac{1}{2}g\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t\right) \quad \Rightarrow \quad h = -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\,.$$

Výška bude maximální v okamžiku, kdy závorka umocněná na druhou má nejmenší hodnotu, tedy v okamžiku, kdy je nulová. Pokud čas $T_{\max}$ dosadíme do (1), pak dostáváme $h_{\max} = gT_{\max}/2 \approx 3 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}$, tedy (pokud uvážíme, že poloměr Země je $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$) že se jedná řádově o $5 \cdot 10^7$ násobek poloměru Země. V dalších jednotkách je to pak $2 \cdot 10^3\,\mathrm{AU}$ či 0,03 ly. Je tedy zřejmé, že gravitační pole, ve kterém se kyj pohybuje, ve skutečnosti nebude homogenní, a proto náš původní předpoklad vůbec neplatí, takže se ani vylepšováním speciální teorií relativity nemusíme zabývat.

Již víme, že budeme muset uvažovat, že se jedná o vrh v radiálním gravitačním poli Země. Vrh je prováděn kolmo vzhůru, což by mělo vést k tomu, že se kyj bude pohybovat po degenerované elipse na úsečku, jejíž jeden konec by se nacházel v těžišti Země. Nebudeme raději moc spekulovat nad tím, jak by pak mohl dopadnout kyj opět na stejné místo pod stejným úhlem, protože bychom po chvíli stejně došli k tomu, že je to příliš podezřelé, a to zejména kvůli sklonu osy zemské rotace a dalším pohybům Země v průběhu roku. Keplerův třetí zákon platí i pro takto zdegenerovanou elipsu. Napišme si ho ve tvaru

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_\mathrm{Z}}{4\pi^2}\,,$$

kde a je délka hlavní poloosy, což je v našem případě polovina délky úsečky, po které se pohybuje kyj[4], $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$ je gravitační konstanta, $M_\mathrm{Z} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ hmotnost Země. Pokud bychom mohli zanedbat dobu, kterou by kyj měl strávit v rámci své oběžné doby pod povrchem Země, tak opravdu můžeme použít ve vztahu čas T. Vyjádřeme si hlavní poloosu

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM_\mathrm{Z}}{4\pi^2}T^2} \approx 1{,}4 \cdot 10^9\,\mathrm{m} \approx 200R_\mathrm{Z} \approx 9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{AU}\,.$$

Vzhledem k tomu, že je poloosa více jak dvousetnásobkem poloměru Země, tak opravdu můžeme relativně dobře použít zanedbání času. Navíc v části pod Zemí by se kyj měl hýbat nejrychleji, a tedy strávit tam jenom relativně krátký čas. Ovšem – měli bychom se zamyslet, do jaké největší vzdálenosti od Země se kyj dostane. Od jejího jádra by to měl být dvojnásobek a, což je řádově 400 poloměrů Země. Zamyslíme se nad tím, jestli opravdu v celé oblasti bude mít hlavní roli gravitace Země, nebo i dalších těles. Proto se podívejme na soustavu Země – Slunce. V této soustavě se nachází 5 bodů, ve kterých se vyrovnávají gravitační a odstředivé síly. Jedná se o takzvané Lagrangeovy či librační body. Nás v této chvíli zajímá zejména poloha bodu L_1, který je Zemi nejblíže. Proč? Protože pokud se může nějaká družice dostat od Země za bod L_1, tak se může stát oběžnicí Slunce nebo střídavě obíhat Zemi a Slunce (pokud nemá energii tak velkou, že dokonce ze soustavy unikne). Dá se vypočítat či najít[5], že se nalézá zhruba $1{,}5 \cdot 10^9$ m od Země. Vzhledem k tomu, že se kyj má dostat až do vzdálenosti $2{,}7 \cdot 10^9$ m, pak není opět

[4] Musíme poznamenat, že v místě obratu kyje, tedy v těžišti Země, bychom museli umístit něco, od čeho by se kyj mohl dokonale pružně odrazit, kdežto cestu až k těžišti bychom mu museli vyhloubit. Takže se jedná vlastně o hypotetickou a dost abstraktní situaci.

[5] `http://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte`

splněna vstupní podmínka výpočtu. Správně bychom měli uvažovat i gravitační vliv Slunce a tím by se úloha značně zkomplikovala. Proto nadále budeme pracovat s tímto odhadem, ale budeme si uvědomovat, že by musel být ještě opraven.

Zkusme se zaměřit na výpočet rychlosti, kterou by musel Ivan kyje hodit. Jako první nástřel můžeme odhadnout, že musí jít o rychlost někde mezi 1. kosmickou rychlostí[6], což je oběžná rychlost po kruhové dráze na úrovni povrchu Země $v_1 \doteq 7{,}9\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, a 2. kosmickou rychlostí, což je úniková rychlost z povrchu Země, tj. kyje by se vůbec nevrátily $v_2 \doteq 11{,}2\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Už tím bychom měli docela pěkný řádový odhad. Pokud bychom chtěli dostat nějakou přesnější hodnotu, tak můžeme využít nějakého programu či programovacího jazyka a průběh vrhu si numericky nasimulovat. V tom případě, při použití trochu přesněji zadaných hodnot, než je uvedeno zde, dostáváme hodnotu rychlosti hodu[7] jako $v_{\mathrm{kyj}} \doteq 11\,168\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a hodnotu druhé kosmické rychlosti jako $v_2 \doteq 11\,181\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Hodnoty se liší pouze o něco málo víc než jedno promile, což ukazuje další problematickou část pohádky a to, že by Ivan musel do urychlení kyje vložit přesně definovanou sílu, protože jinak by kyje dopadly v úplně jinou dobu, nebo by rovnou úplně uletěly.

Nadále budeme pracovat s rychlostí v_{kyj}, která je vlastně kvůli odporovým silám spodním odhadem toho, na jakou rychlost by Ivan kyje musel urychlit. Zamysleme se nad tím, jakou kinetickou energii by musel Ivan do kyjů vložit. Uvažujme jeden $m \doteq 20\,\mathrm{kg}$ kyj.

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{kyj}}^2 \approx 1{,}2\,\mathrm{GJ}$$

Ivan by tedy do jednoho kyje musel dát přes gigajoule své energie.

S jakým zrychlením musel Ivan kyje urychlovat? Uvažujme, že je urychloval rovnoměrně a že je velmi vysoký, a tak je urychloval $h_i = 2\,\mathrm{m}$.

$$h_i = \frac{1}{2} a \tau^2\,, \quad v_{\mathrm{kyj}} = a\tau \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_{\mathrm{kyj}}^2}{2h_i} \approx 3 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,$$

kde jsme označili jako τ čas urychlování kyje. Ivan by tedy musel pohybovat svou paží s takto nemožně velkým zrychlením, přičemž celé urychlování by trvalo $\tau \approx 3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$. Při takto agresivním urychlování by se nejspíš kyj sám rozbil svou setrvačností.

Zaměřme se teď na odpor vzduchu, který jsme dosud přecházeli, byť jsme si uvědomovali, že bude hrát značnou roli. Použijeme Newtonův vztah pro odpor vzduchu

$$F = \frac{1}{2} C \varrho S v^2\,,$$

kde C je součinitel odporu daný tvarem tělesa, který bývá většinou mezi 0,1 a 1,2 a v našem případě ho budeme považovat[8] za 0,5, $\varrho = 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu, S je plocha průřezu tělesa ve směru pohybu, která může být u kyje řádově $S \approx 0{,}1\,\mathrm{m^2}$. Zkusme dosadit, jaká by pak měla být odporová síla na počátku pohybu v případě, že by byl kyj urychlen „pouze“ na rychlost v_{kyj}. Síla je pak $F \doteq 4 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$, což by pro $20\,\mathrm{kg}$ kyj znamenalo zrychlení zhruba $2 \cdot 10^5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$,

[6] Důvodem, proč je jasné, že by rychlost kyje měla být vyšší než tato, je už to, že velká poloosa dráhy kyje je větší, navíc ho vypouštíme přímo vzhůru.

[7] K výpočtu byl použit program Wolfram Mathematica. Kód je k nalezení na `http://fykos.cz/rocnik26/4-p.nb` a `http://fykos.cz/rocnik26/4-p.cdf`. Ve formátu .nb si můžete kód i upravovat, pokud vlastníte Wolfram Mathematicu, kdežto v .cdf se na něj můžete alespoň podívat a přehrávač .cdf můžete stáhnout zdarma na `http://www.wolfram.com/cdf/`.

[8] Ve skutečnosti se mění v průběhu letu, jak se kyj otáčí, ale stejně nám jde pouze o řádový odhad.

což by kyj teoreticky zabrzdilo v první sekundě[9], resp. ještě dříve, takže konstantnost odporu si v úvahách dovolit nemůžeme a kyje by musely vyletět nejspíše s řádově vyšší rychlostí. Ovšem musíme si uvědomit, že hustota vzduchu s výškou klesá, a zejména, že když je rychlost nižší, tak klesá i odporová síla. Navíc s takto vysokými rychlostmi v atmosféře narážíme na limity použité rovnice, protože jsme v rychlostech řádově nad rychlostí zvuku ve vzduchu. Newtonova rovnice se tudíž ani nedá spolehlivě použít.

Laskavá čtenářka si pak už sama dopočte, že by energie dodaná na počátku kyji stačila na jeho zahřání o více jak několik tisíc stupňů Celsia a s ohledem na odpor vzduchu by se tedy kyj po cestě nejspíš uhořel (stejně jako se to často stává malým meteoritům).

Závěrem můžeme říci, že Mrazík by se měl z hlediska výuky fyziky zakázat, nebo používat pouze jako odstrašující případ.

Komentář k došlým řešením

Častým nedostatkem v řešení bylo nedostatečné zdůvodnění, proč je vlastně všechno, co počítáte, nesmysl, a hlavně nevypočtení nějakých hodnot, které by vaši domněnku podpořily. Případně, když už se objevilo nějaké číslo s nějakou jednotkou, tak kde vlastně? Je potřeba uvést výpočet nebo zdroj, odkud údaj pochází.

Bylo mnoho zajímavých a sem tam i originálních myšlenek, jak aféru „Ivanovy kyje“ shodit ze stolu. Málokdo se ale asi na Mrazíka podíval pořádně, protože připomínka k tomu, že kyjů dopadl značně vyšší počet, než vyletěl do vesmíru, byla zaznamenaná pouze jednou. Chtěl bych ale vyzdvihnout zpracování Samuela Kočiščáka, který neváhal a na video použil videoanalýzu v programu Tracker, takže k různým faktickým připomínkám přidal i tu, že by let kyjů s naměřenou počáteční rychlostí trval pouze asi 5 sekund.

Velká část řešitelů si uvědomila, že kyje by pravděpodobně v průběhu letu atmosférou shořely, ale bohužel značná část psala o tom, že by uhořely až v průběhu dopadu. To zní velice nepravděpodobně, vzhledem k tomu, že pokud uvážíme odpor vzduchu, tak při stoupání by musely mít kyje daleko vyšší rychlost a tím pádem i vyšší odpor. Je pravdou, že by proletěly rychleji, ale pokud by měly uhořet, tak by spíše uhořely už při výstupu.

Část řešitelů se zaměřila na to, jak dostat kyje zpátky v rámci Sluneční soustavy. Zajímavý byl nápad vyhodit kyje kolmo na rovinu oběhu Země kolem Slunce tak, aby oběžná rychlost kyjů kolem Slunce byla totožná s oběžnou rychlostí Země (po jejich vzdálení od Země). To by bylo ještě „realistické“ teoretické řešení. Horší byly nápady úplně zanedbat gravitaci Země a Slunce a hodit je skrz Slunce bez ohledu na to, že by, pokud již neshořely předtím, kyje určitě shořely. Nemluvě o tom, že při vzdalování od Země by jejich rychlost klesala, pak zase stoupala při přibližování Slunci, pak zase klesala při vzdalování a pak se kyje zase urychlily u Země. Takže předpoklad rovnoměrného pohybu by byl opravdu značně přestřelený.

Dalším přístupem, který se pro odhad rychlosti pohybu kyje objevil, byl výpočet mezní rychlosti v atmosféře. Ten má několik vad. Nejdřív by totiž Ivan musel hodit řádově vyšší rychlostí, než je mezní, aby kyje získaly nějakou dostatečnou výšku, ale tím zase narážíme na přiblížení, které bylo učiněno, a to, že hustota atmosféry je přibližně konstantní, což opět nemůže platit vzhledem k tomu, jak dlouho se kyje mají pohybovat. Ale je to jinak zajímavý odhad, který vychází řádově blíže než aproximace homogenním gravitačním polem ve vakuu.

[9] První vteřina je zde zmíněná čistě účelově. Atmosféru bychom mohli hodně hrubě považovat za vysokou 10 km s hustotou vzduchu jako je u hladiny moře. Je to hodně hrubé přiblížení, ale pro odhad nám to stačí. Vzhledem k rychlosti, s jakou by kyje měly opustit Ivanovu ruku, tedy skrz atmosféru projde za právě jednu sekundu.

Závěrem bychom ještě uvedli velké upozornění – pokud máme pohyb hmotného bodu ve vzduchoprázdnu a pokud tam nemáme žádné další síly, tak se tento hmotný bod musí nutně pohybovat po kuželosečce, což bývá nejčastěji elipsa či hyperbola. Může to být teoreticky úsečka či parabola. Ale rozhodně se nemůže stát to, že vyšleme družici „kopnutím“ nahoru a ona nám sama začne obíhat po kruhové trajektorii v nějaké výšce nad Zemí. K tomu musí mít družice motory, aby upravily její kurz po vynesení do požadované výšky. Také si jen tak samy od sebe neřeknou, že spadnou. Jedině pokud se srazí nebo pokud klesají z důvodu tření o atmosféru. Nemluvě o tom, jak je občas zveličována geostacionární dráha... Ano, je to význačná dráha, ale jen protože družice na ní oběhne Zemi jednou za den. Jinak může družice obíhat v úplně libovolné výšce, která je dostatečně velká, aby nedrhla o atmosféru a která je dostatečně nízká, aby byla ve sféře gravitačního vlivu Země.

P.S.: Není to jenom Mrazík, co má vadnou fyziku. Jen si poslechněte ty souboje ve vesmíru se zvukovými efekty ve Star Wars nebo se podívejte, co provádějí Tom a Jerry...

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha IV.E ... nástěnkový boj brček

8 bodů; průměr 4,83; řešilo 18 studentů

Když si vezmete běžné plastové brčko (slámku) a otřete ho kapesníkem, dokážete brčko nabít tak, že bude dokonce držet na některých stěnách a nástěnkách díky svému náboji. Vysvětlete jev a odhadněte, jak velký náboj dokážete na brčku vytvořit.

Nápověda *Hodilo by se použít dvě brčka.* *Karlovi došly magnety a připínáčky.*

Snadno si s pár brčky a ubrouskem můžeme vyzkoušet, že jevy popsané v zadání fungují. Brčko je nevodič. Při tření brčka například ubrouskem přeskočí mezi brčkem a ubrouskem pár elektronů a na brčku se tak vytvoří náboj. Když brčko přiblížíme třeba ke zdi, tak se povrchové atomy polarizují tak, že na povrchu zdi se vytvoří parciální náboj opačného znaménka než na brčku, díky kterému tam brčko drží (nám drželo na zdi asi hodinu, říká se ale, že tam může vydržet i přes týden). Když tedy dáme dvě brčka k sobě, tak je jasné, že se budou odpuzovat. Zkusme odhadnout, jak velký náboj se na nich vytvoří.

Odhady

Náš experiment bude velice jednoduchý. Nabijeme dvě brčka, jedno z nich upevníme a druhé budeme lehce prsty přidržovat a zjišťovat, v jaké vzdálenosti d nad prvním brčkem bude mít stabilní polohu, tj. v jaké vzdálenosti se vyrovnají tíhová F_G a odpudivá elektrostatická F_e síla. Tíhovou sílu určíme jednoduše $F_G = mg$, kde m je hmotnost brčka a g tíhové zrychlení. Elektrostatickou sílu můžeme odhadnout několika způsoby, získané odhady na závěr porovnáme.

Nejdříve budeme uvažovat náboj na brčku jako bodový náboj (má to k tomu sice daleko, ale odhad je od toho, že to je odhad). Elektrostatická odpudivá síla má pak klasický Coulombovský tvar

$$F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}\,,$$

kde ε_0 je permitivita vakua. Uvažujeme, že na obou brčkách je stejný náboj. Když to dáme do rovnosti s tíhovou silou, dostaneme pro náboj odhad

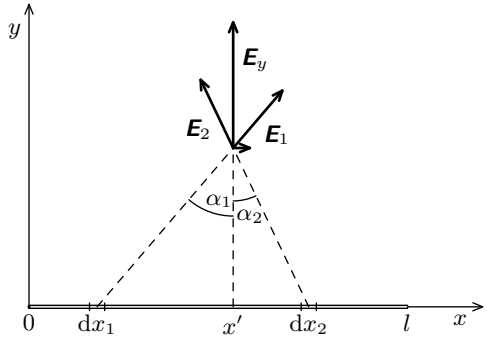
$$q_1 = d\sqrt{4\pi mg\varepsilon_0}\,.$$

Dále můžeme brčko délky l považovat za nekonečně dlouhou rovnoměrně nabitou tyčku s délkovou hustotou náboje $\tau = q/l$. S využitím Gaussova zákona určíme intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti d od tyčky

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 dl}\,.$$

Po vynásobení q dostaneme hledanou sílu, kterou dáme opět do rovnosti s tíhovou a vyjádříme náboj

$$q_2 = \sqrt{2\pi\varepsilon_0 dlmg}\,.$$



Obr. 3: Dvě rovnoměrně nabité tyče konečné délky

Nakonec můžeme brčka považovat za dvě tyče rovnoměrně nabité délkovou hustotou náboje $\lambda = \mathrm{d}q/\mathrm{d}x = q/l$. Na lepší odhad se asi ani nezmůžeme, protože nerovnoměrné a nestejné rozložení náboje, které je při každém pokusu trochu jiné, popsat nedokážeme. Odvození vzorce pro sílu, kterou se tyče odpuzují, není úplně triviální, nicméně šikovný středoškolák si na něm může vyzkoušet integrování. Tak tedy sledujme obrázek 3: nejprve si vypočítáme intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti d od jedné rovnoměrně nabité tyče. Budeme počítat y-ovou složku intenzity – budeme z ní potom počítat sílu v y-ovém směru. Uvažujme bod, který má x-ovou souřadnici x'. Od malých elementů tyče $\mathrm{d}x_1$ a $\mathrm{d}x_2$ do y-nové složky intenzity přispívají $\cos\vartheta_1 \mathrm{d}E_1$ a $\cos\vartheta_2 \mathrm{d}E_2$, kde význam úhlů je zřejmý z obrázku. Celkovou intenzitu získáme, když tyto elementy zintegrujeme přes celou tyč

$$\begin{aligned} E_y &= \int \mathrm{d}E_y = \int_0^{x'} \cos\alpha_1 \mathrm{d}E_y + \int_{x'}^{l} \cos\alpha_2 \mathrm{d}E_y = \\ &= \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^{x'} \frac{1}{[(x'-x)^2+y^2]^{3/2}}\mathrm{d}x_1 + \int_{x'}^{l} \frac{1}{[(x-x')^2+y^2]^{3/2}}\mathrm{d}x_2\right) = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(\frac{l-x'}{\sqrt{(l-x')^2+y^2}} - \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y^2}}\right)\,. \end{aligned}$$

Teď dáme do vzdálenosti d od této tyče další, úplně stejnou, tyč. Odpudivou sílu (která míří ve směru y), kterou na sebe budou působit, spočítáme takto

$$\begin{aligned} F &= \int \mathrm{d}F = \int E_y \mathrm{d}q = \int_0^l E_y \lambda \mathrm{d}x = \\ &= \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \int_0^l \left(\frac{l-x'}{\sqrt{(l-x')^2+y^2}} - \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y^2}} \right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 l^2} \left(\sqrt{1+\frac{l^2}{d^2}} - 1 \right) . \end{aligned}$$

Nyní můžeme, jako předtím, dát tuto sílu do rovnosti s tíhovou a určit náboj:

$$q_3 = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 m g l^2}{\sqrt{1+\frac{l^2}{d^2}} - 1}} .$$

Měření

Zvážili a změřili jsme několik brček a z měření určili hmotnost m a délku nabité části brčka l: $m = (0{,}52 \pm 0{,}02)$ g, $l = (14{,}0 \pm 0{,}5)$ cm. Dále jsme měřili, v jaké výšce nad jedním nabitým brčkem se pro druhé nabité brčko vyrovná tíhová a elektrostatická odpudivá síla: $d = (2{,}3 \pm 0{,}5)$ cm.

Z těchto údajů jsme spočítali hodnotu náboje, chybu jsme určili podle zákona šíření nejistot.[10] Chyba měřidel (vah a pravítka) je v tomto případě zanedbatelná.

$$\begin{aligned} q_1 &= (17 \pm 4)\,\mathrm{nC}\,, \\ q_2 &= (38 \pm 3)\,\mathrm{nC}\,, \\ q_3 &= (32 \pm 5)\,\mathrm{nC}\,. \end{aligned}$$

Výsledky se v rámci nejistot sice neshodují, ale jsou velmi podobné – všechny tři odhady pro řádový odhad postačí. Dle očekávání je ten třetí, tedy nejpřesnější, mezi zbylými dvěma – tj. brčko bude pravděpodobně něco mezi bodovým nábojem a nekonečně dlouhou nabitou tyčkou.

Komentář k došlým řešením

Vaše řešení šla rozdělit to dvou druhů – ta, v kterých byl náboj odhadnut dobře, a ta, v kterých nebyl. Řada z vás sestavila nějakou pěknou aparaturu na měření – pověsila brčka na provázky a měřila, jak moc se odpuzují, nebo jak drží na zdi či nástěnce. Líbila se nám řešení Miroslava Hanzelky a Terezy Uhlířové, která byla pěkně zpracovaná a nic podstatného tam nechybělo.

Chybu v odhadu lze často odhalit už selským rozumem – náboj na brčku pravděpodobně nebude menší než elementární náboj a ani nebude v řádech coulombů. Napětí mezi brčkem a zdí nebude v řádech tisíců voltů, když v zásuvce je efektivní hodnota 230 V. Proto se vždycky

[10] Pokud je veličina y funkcí několika veličin x_i: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a známe chybu Δx_i každé z těchto veličin, lze chybu veličiny y vypočítat ze vztahu $\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}$.

zamyslete, jestli vaše řešení dává smysl. Také pořádně popište, jak jste experiment prováděli – záhadná krabička „měřič náboje“ je nepřesný popis :).

A na závěr, bohužel to byla častá výtka, dávejte si pozor na správně zapsaný výsledek, nejlépe ve tvaru „veličina = (číslo±chyba) jednotka“. Chybu zaokrouhlete na jednu nebo dvě platné číslice (první nenulové) a podle toho i výsledek, například $(43{,}545\,829\,1 \pm 1{,}755\,485\,2) \doteq (44 \pm 2)$, $(145{,}486\,574\,61 \pm 28{,}485\,78) \doteq (150 \pm 30)$, $(85{,}016\,555\,485 \pm 0{,}521\,781\,6) \doteq (85{,}0 \pm 0{,}5)$.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha IV.S ... seriálová

6 bodů; průměr 0,75; řešilo 8 studentů

a) *Za použití vztahu pro srážkovou frekvenci z minulého dílu seriálu odvoďte vzorec pro difuzní koeficient klasické difuze a spočtěte jeho hodnotu pro typické plazma v tokamaku (viz první díl seriálu).*

b) *Odvoďte vztah určující závislost frakce zachycených částic (tj. poměr zachycených částic ku celkové populaci) na poměru hlavního a malého poloměru plazmatu r/R_0.*

Robin.

a) S využitím následujících vztahů

$$D = \frac{r_\mathrm{L}^2}{\tau}\,,$$
$$r_L = \frac{\sqrt{kT_\mathrm{e} m_\mathrm{e}}}{|q_\mathrm{e} B|}\,,$$
$$\tau = 1/\nu_\mathrm{ie} = \frac{16\pi\varepsilon_0^2 m_\mathrm{e}^2 \left(\frac{kT_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}\right)^{3/2}}{ne^4}$$

dospějeme k finálnímu výrazu

$$D = \frac{ne^2\sqrt{m_\mathrm{e}}}{16\pi\varepsilon_0^2 B^2 \sqrt{kT_\mathrm{e}}}\,.$$

Po dosazení typických hodnot plazmatu ve středu tokamaku ($n = 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}$, $B = 2\,\mathrm{T}$, $T_\mathrm{e} = 1\,000\,\mathrm{eV}$) dospějeme k hodnotě

$$D = 1{,}2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Tato hodnota je ještě nižší, než je uvedeno v textu. Ve skutečnosti hraje největší roli difuze na okraji plazmatu, kde je menší magnetické pole a hlavně výrazně nižší teplota. Navíc vztah uvedený v seriálu je jen přibližný.

b) Toroidální magnetické pole není konstantní, ale jak vyplynulo z úvahy o banánových orbitech částic, klesá směrem od osy torusu

$$B = B_0 \frac{R_0}{R}\,,$$

kde index 0 značí hodnoty veličin uprostřed poloidálního řezu komory (tj. R_0 je hlavní poloměr tokamaku). Poměr maximálního pole v komoře (tj. na místě nejblíž ose torusu) ku minimálnímu tedy bude

$$\frac{B_\mathrm{min}}{B_\mathrm{max}} = \frac{R_0 + a}{R_0 - a}\,,$$

kde a je malý poloměr tokamaku. Za použití podmínky pro ztrátový kužel odvozené v předešlých dílech seriálu dospějeme k meznímu poměru rychlostí

$$\frac{v_{||0}}{v_{\perp 0}} < \sqrt{\frac{2a}{R_0 - a}}\,.$$

Pro izotropní Maxwellovské rozdělení částic je frakce zachycených částic f daná tvarem rychlostního prostoru a můžeme ji vyjádřit pomocí poměru složek rychlostí částice, která je přesně na hranici ztrátového kužele

$$f = \frac{v_{||0}}{v_0}\,.$$

Za použití vztahu pro složky rychlosti $v^2 = v_{||}^2 + v_\perp^2$ vyjádříme

$$\left(\frac{v_{||}}{v}\right)^2 = \frac{\left(\frac{v_{||}}{v_\perp}\right)^2}{1 + \left(\frac{v_{||}}{v_\perp}\right)^2}$$

a po několika úpravách dostaneme výraz pro f

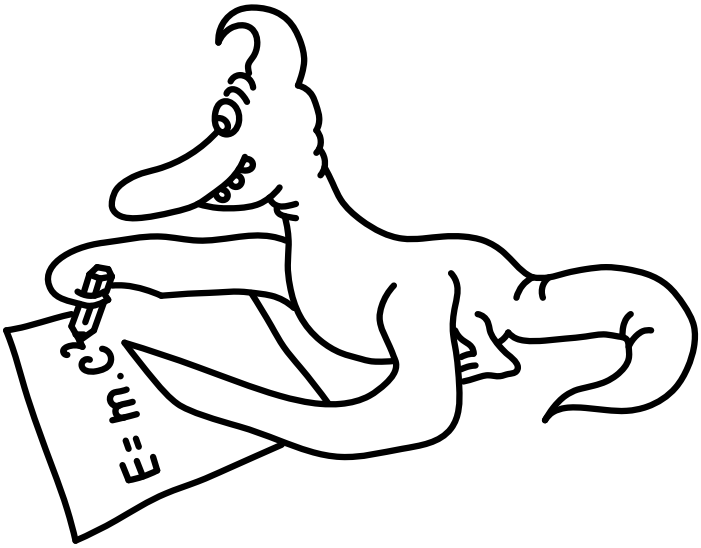
$$f = \sqrt{\frac{2a}{R_0 + a}},$$

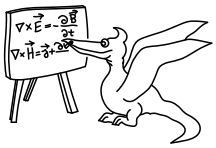
neboli

$$f = \sqrt{\frac{2}{1+\varepsilon}}\,,$$

kde $\varepsilon = R/a$ je poměr hlavního a malého poloměru tokamaku.

Michael Komm
robin@fykos.cz

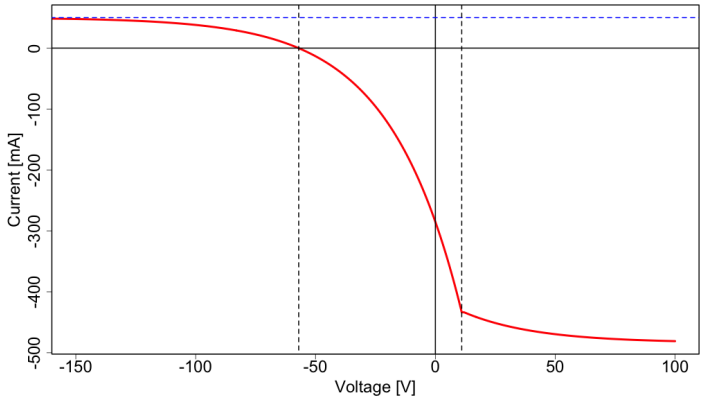




Seriál: Sondová diagnostika plazmatu

V minulých dílech seriálu jsme popsali vlastnosti plazmatu vycházející z teoretického rozboru chování nabitých částic. V praxi se ale o chování plazmatu dozvídáme nejvíce z experimentálního pozorování. V tomto díle se budeme věnovat jedné z nejstarších diagnostických metod zkoumání plazmatu za pomocí Langmuirovy sondy.

Langmuirova sonda je pojmenována po průkopníkovi fyziky plazmatu Irvingovi Langmuirovi, který jí poprvé úspěšně zkonstruoval a použil roku 1924. Ve své nejjednodušší variantě se jedná o kus drátu ponořený do plazmatu. Na sondu se aplikuje proměnlivé předpětí a měří se proud, který na ni dopadá. Výsledkem tohoto měření je tzv. voltampérová charakteristika. Jejím zpracováním je možné odvodit základní parametry plazmatu – hustotu a elektronovou teplotu. Jakkoliv je měření s Langmuirovou sondou relativně snadné, interpretace výsledků (zvláště pro magnetizované plazma) je předmětem neutuchajících diskusí od dvacátých let až do současnosti. V následujícím textu rozebereme pouze základní model fungování sondy.



Obr. 4: Idealizovaná voltampérová charakteristika Langmuirovy sondy.

Ideální voltampérová charakteristika je zobrazená na obr. 4. Pro záporná napětí na sondu dopadá pouze kladný proud iontů, který je prakticky konstantní a nazývá se *iontový saturační* proud. Se zvyšujícím se napětím přibývá elektronů, které mají dostatek energie na to, aby na sondu dopadly. Při určitém potenciálu se proudy iontů a elektronů vyrovnají, takže celkový proud je nulový. Tento potenciál se nazývá *plovoucí potenciál*. Při dalším zvyšování sondového předpětí elektronový proud dále narůstá až do momentu, kdy se potenciál sondy bude rovnat *potenciálu plazmatu* (hodnotě elektrického potenciálu v neporušeném plazmatu). Při tomto potenciálu je sonda plně otevřená elektronovému proudu, který se opět saturuje. V experimentu se saturace elektronového proudu pozoruje velice obtížně, sondy mají tendenci vysávat elektrony úměrně svému předpětí.

Při teoretickém rozboru voltampérové charakteristiky budeme sondu považovat jednoduše za vodič o daném povrchu A a potenciálu φ. Z teorie plynů vyplývá, že proud částic (např. elektronů) na takový objekt bude

$$I_\mathrm{e} = \frac{1}{4} q_\mathrm{e} n_\mathrm{e} A \bar{v}_\mathrm{e} \,,$$

kde n_e je hustota elektronů, q_e jejich náboj a $\bar{v}_\mathrm{e}$ jejich střední rychlost. Za předpokladu, že elektrony mají Maxwellovské rozdělení rychlostí, kterému odpovídá teplota T_e, můžeme střední rychlost vyjádřit a dostat vztah

$$I_\mathrm{e} = \frac{1}{4} q_\mathrm{e} n_\mathrm{e} A \sqrt{\frac{8kT_\mathrm{e}}{\pi m_\mathrm{e}}} \,.$$

Plazma je ale soubor nabitých částic, a proto bude důležitou roli hrát rozdíl potenciálu plazmatu a potenciálu sondy. Pokud bude sonda na menším potenciálu, než je potenciál plazmatu, bude od sebe elektrony odpuzovat a část jich nebude mít dostatečnou energii na to, aby tento rozdíl potenciálu překonala a na sondu dopadla. Pokud budeme toto předpětí na sondě snižovat, elektronový proud postupně klesne na nulu. Nejmenší energie elektronu, který je schopný dopadnout na sondu o daném potenciálu φ, je

$$\frac{1}{2} m_\mathrm{e} v_\mathrm{min}^2 = e(\varphi - \varphi_0) \,,$$

kde φ_0 je potenciál plazmatu, jehož hodnotu obvykle neznáme. Mezní rychlost v_min je tedy rovna

$$v_\mathrm{min} = \sqrt{\frac{2e(\varphi - \varphi_0)}{m_\mathrm{e}}} \,.$$

Existence této minimální rychlosti změní průměrnou rychlost dopadajících, která je dle definice

$$\bar{v} = \frac{\int_{v_\mathrm{min}}^{\infty} f(v) v \mathrm{d}v}{\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \mathrm{d}v} \,,$$

kde $f(v)$ je rozdělovací funkce rychlostí elektronů. Opět za předpokladu Maxwellovského rozdělení rychlostí můžeme po několika úpravách dospět ke vztahu

$$I_\mathrm{e} = \frac{1}{4} q_\mathrm{e} n_\mathrm{e} A \sqrt{\frac{8kT_\mathrm{e}}{\pi m_\mathrm{e}}} \mathrm{e}^{\frac{e(\varphi-\varphi_0)}{kT_\mathrm{e}}} \,.$$

Pro potenciál sondy menší než potenciál plazmatu bude sonda přitahovat ionty. V jednoduchém přiblížení můžeme uvažovat, že na sondu dopadnou všechny ionty, které překročí hranici tzv. *sheathu*, tj. oblasti prudkého poklesu potenciálu v blízkosti sondy (tuto oblast jsme rozebírali v prvním díle seriálu při odvození Debyeovy délky). Takový iontový proud nebude záviset na předpětí sondy. Z teorie sheathu vyplývá, že ionty překračují jeho hranici se střední rychlostí rovnou zvukové rychlosti. Iontový proud tedy bude

$$I_\mathrm{i_{sat}} = q_\mathrm{i} n_\mathrm{i} A c_s = q_\mathrm{i} n_\mathrm{i} A \sqrt{\frac{kT_\mathrm{e} + kT_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}}} \,.$$

Nyní využijeme předpokladu kvazineutrality, tj. $n_\mathrm{e} = n_\mathrm{i}$, a izotermálnosti $T_\mathrm{e} = T_\mathrm{i}$, která je v okrajovém plazmatu v tokamaku přibližně splněna, a můžeme zapsat finální vztahy pro iontový a elektronový proud

$$I_{\mathrm{i}_\mathrm{sat}} = -Zq_\mathrm{e}n_\mathrm{e}A\sqrt{\frac{2kT_\mathrm{e}}{m_\mathrm{i}}}\,, \tag{3}$$
$$I_\mathrm{e} = \frac{1}{4}q_\mathrm{e}n_\mathrm{e}A\sqrt{\frac{8kT_\mathrm{e}}{\pi m_\mathrm{e}}}\mathrm{e}^{\frac{e(\varphi-\varphi_0)}{kT_\mathrm{e}}}\,,$$

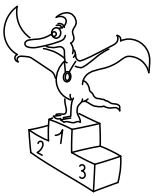
kde Z charakterizuje náboj iontů. Zkombinováním obou vztahů můžeme dospět k finálnímu výrazu pro elektronový proud

$$I_\mathrm{e} = -\frac{I_{\mathrm{i}_\mathrm{sat}}}{2\sqrt{\pi}Z}\sqrt{\frac{m_\mathrm{i}}{m_\mathrm{e}}}\mathrm{e}^{\frac{e(\varphi-\varphi_0)}{kT_\mathrm{e}}}\,. \tag{4}$$

Výše uvedené vztahy dávají postup, jak z voltampérové charakteristiky odvodit hustotu a elektronovou teplotu:

1. Z grafu charakteristiky zjistíme hodnotu iontového saturačního proudu. K tomu nám poslouží oblast záporných napětí, kde se celkový proud nemění.
2. Od charakteristiky odečteme iontový saturační proud. Tím získáme odhad čistě elektronového proudu na sondu.
3. Celou charakteristiku vydělíme velikostí iontového saturačního proudu, čímž nám saturační proud vypadne ze vztahu (4). Nyní proud zlogaritmujeme a v oblasti, kde má tento zlogaritmovaný signál lineární charakter, provedeme lineární fit.
4. Ze směrnice fitu určíme hodnotu elektronové teploty.
5. Z velikosti iontového saturačního proudu při znalosti elektronové teploty za použití vztahu (3) určíme hustotu.

Je nutné podotknout, že výše uvedený postup je pouze přibližný a zanedbává celou řadu mechanismů, které ale ve výsledku mohou vést k významně rozdílným naměřeným hodnotám. Jedním z nich je sekundární elektronová emise, která mění velikost měřeného proudu, v magnetizovaném plazmatu hraje roli Larmorovská rotace iontů, která zvětšuje efektivní plochu sondy (iontový Larmorův poloměr má obvykle podobnou velikost jako sonda). Přesto je tato diagnostika populární hlavně díky své snadné realizaci.



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kompletní výsledky najdete na `http://fykos.cz`.

Kategorie prvních ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**IV**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	4	3	4	4	5	8	6	**38**	*100*	**159**
1.	*Jiří Jarošík*	G J. Vrchlického, Klatovy	4	4	0	1	2	2	6	0	**19**	*59*	**94**
2.	*Anna Kufová*	G M. Koperníka, Bílovec	4	4	0	1	1	3	3	0	**16**	*52*	**82**
3.	*Klára Stefanová*	G B. Němcové, Hradec Králové	4	4	1	1	1	3	–	–	**14**	*67*	**60**
4.	*František Zajíc*	G, Nymburk	4	4	–	–	–	2	–	–	**10**	*80*	**39**
5.	*Lukáš Kotlaba*	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	4	4	–	–	–	–	–	–	**8**	*66*	**37**
6.	*Marek Otýpka*	G, Židlochovice	4	4	–	–	–	1	–	–	**9**	*64*	**35**
7.	*Jaroslav Cerman*	G a SOŠ, Jilemnice	2	4	–	–	1	–	–	–	**7**	*60*	**33**
8.–9.	*Filip Šmejkal*	G Uherské Hradiště	4	4	–	–	1	2	–	–	**11**	*42*	**30**
8.–9.	*Petr Vitovský*	G Uherské Hradiště	–	4	–	–	–	2	–	–	**6**	*67*	**30**
10.	*Diana Miezgová*	G Liptovský Hrádok	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*65*	**26**
11.	*Jakub Kolář*	Reálné G a ZŠ, Prostějov	4	–	–	1	–	–	3	–	**8**	*49*	**22**
12.–13.	*Petr Šimůnek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	4	–	–	1	–	2	–	–	**7**	*40*	**19**
12.–13.	*Milan Zongor*	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	4	4	–	–	–	–	–	–	**8**	*48*	**19**
14.	*Pavel Kůs*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*81*	**17**
15.	*Karel Chládek*	G, Lanškroun	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*40*	**16**
16.	*Pavel Grepl*	G J. Wolkera, Prostějov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*37*	**13**
17.–19.	*Šimon Jelínek*	G, Mostecká, Chomutov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*69*	**11**
17.–19.	*David Pokorný*	G, Bučovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*65*	**11**
17.–19.	*Ondřej Poláček*	G F. Palackého, Val. Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*69*	**11**
20.	*Vojtěch Kaprál*	G J. Wolkera, Prostějov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*38*	**10**

Kategorie druhých ročníků

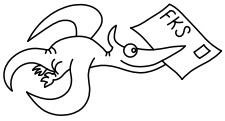
	jméno *Student Pilný*	škola MFF UK	1 4	2 4	3 3	4 4	5 4	P 5	E 8	S 6	IV **38**	% *100*	Σ **159**
1.	*Filip Ayazi*	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	4	2	1	2	5	7	–	**23**	*77*	**118**
2.	*Martin Kihoulou*	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	4	2	2	2	2	3	3	–	**18**	*74*	**105**
3.	*Tomáš Fiala*	G, SOŠ a VOŠ, Ledeč n. Sáz.	0	4	1	3	3	3	–	2	**16**	*71*	**98**
4.	*Mikuláš Zindulka*	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	–	4	1	4	3	–	–	–	**12**	*75*	**85**
5.	*Jozef Bucko*	G PdC, Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	**84**
6.	*Jakub Dolejší*	G B. Němcové, Hradec Králové	4	4	1	–	3	2	–	–	**14**	*74*	**74**
7.	*Erik Döme*	G Hubeného, Bratislava	4	4	–	–	1	3	4	–	**16**	*66*	**69**
8.	*Tomáš Kremel*	G J. Škody, Přerov	4	4	–	–	3	–	–	–	**11**	*75*	**58**
9.	*Pavel Blažek*	G a ZUŠ, Šlapanice	4	4	1	–	–	3	–	–	**12**	*74*	**52**
10.–11.	*Václav Skála*	G J. Vrchlického, Klatovy	4	4	–	–	–	2	–	–	**10**	*67*	**51**
10.–11.	*Miloslav Staněk*	G a ZUŠ, Šlapanice	4	4	–	–	–	4	–	–	**12**	*86*	**51**
12.	*Ondrej Bohdal*	G Jura Hronca, Bratislava	–	4	–	–	–	–	–	–	**4**	*76*	**47**
13.	*Štěpán Štěpán*	Jiráskovo G, Náchod	–	4	–	–	–	–	–	–	**4**	*84*	**37**
14.	*Jakub Dvořák*	G, Botičská, Praha	4	4	1	–	–	3	–	–	**12**	*72*	**36**
15.	*Dušan Stěhule*	G B. Němcové, Hradec Králové	4	4	–	–	1	1	–	–	**10**	*78*	**35**
16.	*Zdeněk Turek*	G a SOŠ, Rokycany	–	4	–	–	–	–	–	–	**4**	*79*	**33**
17.	*Petr Doležal*	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*82*	**32**
18.	*Jakub Maruška*	G Andreja Vrábla, Levice	4	4	–	–	–	–	–	–	**8**	*63*	**26**
19.	*Petr Smísitel*	G, Bučovice	–	4	–	–	–	–	–	–	**4**	*86*	**25**
20.	*Marek Liška*	G a SOŠPg, Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*83*	**24**
21.–22.	*Petr Buchal*	G, Mimoň	4	–	–	–	–	–	–	–	**4**	*70*	**23**
21.–22.	*Samuel Kočiščák*	G Poštová, Košice	4	4	1	4	2	6	2	–	**23**	*72*	**23**
23.	*Radovan Zeman*	G, Uničov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*88*	**21**

Kategorie třetích ročníků

	jméno *Student Pilný*	škola MFF UK	1 2	2 2	3 3	4 4	5 4	P 5	E 8	S 6	IV **34**	% *100*	Σ **143**
1.	*Jakub Kvorka*	G, Dubnica n. Váhom	2	2	2	–	3	4	5	1	**19**	*77*	**103**
2.	*Patrik Turzák*	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*99*	**87**
3.	*Jiří Guth*	G, Jírovcova, České Budějovice	2	2	2	4	3	–	–	–	**13**	*86*	**70**
4.	*Radka Štefaníková*	G O. Havlové, Ostrava-Poruba	2	2	1	3	2	3	6	–	**19**	*63*	**69**
5.	*Peter Hojnoš*	G Školská, Spišská Nová Ves	2	2	2	1	1	–	2	–	**10**	*60*	**65**
6.	*Lukáš Knob*	G, Kojetín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*86*	**62**
7.	*Markéta Vohníková*	PORG, Praha	2	1	1	–	1	3	6	–	**14**	*64*	**61**
8.	*Daniel Slezák*	Svobodná chebská škola	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*75*	**52**
9.	*Petr Kepčija*	G, Jírovcova, České Budějovice	2	2	–	1	2	–	–	–	**7**	*66*	**49**
10.	*Mark Daniel*	G Párovská, Nitra	2	2	0	–	–	–	4	–	**8**	*56*	**47**
11.	*Viktor Skoupý*	G, Moravská Třebová	2	2	–	–	–	1	–	–	**5**	*66*	**44**
12.	*Lucie Valentová*	G, Boskovice	1	3	–	–	1	4	4	–	**13**	*57*	**37**
13.	*Adam Přáda*	G, Ostrov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*83*	**33**
14.	*Michal Belina*	G Volgogradská, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*48*	**30**
15.–16.	*Martin Šípka*	G Kežmarok	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*58*	**25**
15.–16.	*Martin Wirth*	První české G, Karlovy Vary	–	2	–	–	1	3	–	–	**6**	*76*	**25**
17.	*Martin Jurček*	G, Studentská, Havířov	–	2	2	3	3	–	–	2	**12**	*67*	**22**
18.–19.	*Jaroslav Hofierka*	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*81*	**21**
18.–19.	*Vendula Kotyzová*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*44*	**21**
20.	*Jiří Jaskowiec*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*56*	**19**
21.	*Václav Dvořáček*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*72*	**18**
22.	*Tomáš Zahradník*	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*74*	**17**

Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno *Student Pilný*	**škola** MFF UK	**1** 2	**2** 2	**3** 3	**4** 4	**5** 4	**P** 5	**E** 8	**S** 6	**IV** **34**	% *100*	Σ **143**
1.	*Miroslav Hanzelka*	G, Česká Lípa	2	2	3	2	4	5	8	1	**27**	*90*	**124**
2.	*Jakub Šafin*	G, P. Horova, Michalovce	2	1	3	4	3	5	5	0	**23**	*80*	**110**
3.	*Jakub Bahyl*	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*71*	**77**
4.	*Tereza Uhlířová*	G, Omská, Praha	2	2	1	1	2	2	8	–	**18**	*73*	**76**
5.	*Lubomír Grund*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*69*	**75**
6.	*Peter Šišan*	G PdC, Piešťany	2	2	2	3	2	3	4	–	**18**	*65*	**74**
7.	*David Matejov*	G, Dubnica n. Váhom	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*78*	**63**
8.	*David Siegert*	G, Klášterec n. O.	–	2	0	–	–	–	–	–	**2**	*76*	**55**
9.	*Vít Nosek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*83*	**50**
10.	*Veronika Dočkalová*	G, Elgartova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	**46**
11.	*Michal Buráň*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*78*	**31**
12.–13.	*Tomáš Gonda*	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*97*	**30**
12.–13.	*Erik Hendrych*	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*91*	**30**
14.–15.	*Lukáš Fusek*	G Uherské Hradiště	2	2	–	–	–	3	–	–	**7**	*66*	**29**
14.–15.	*Filip Murár*	G, Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*85*	**29**
16.	*Michal Červeňák*	G Púchov	–	–	–	–	–	–	7	–	**7**	*69*	**27**
17.	*Tomáš Kello*	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*85*	**22**
18.	*Lukáš Timko*	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*75*	**21**
19.–21.	*Jakub Doležal*	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*64*	**18**
19.–21.	*Ivana Monková*	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*60*	**18**
19.–21.	*Tomáš Turlík*	G J. A. Raymana, Prešov	–	2	–	–	–	–	–	–	**2**	*60*	**18**



FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.