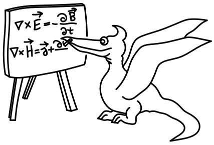


Seriál: Pohyb nabitých částic v elektrických a magnetických polích

Abychom pochopili chování plazmatu jako celku, je zapotřebí se seznámit s procesy, které probíhají na úrovni jednotlivých částic. V této kapitole se budeme zabývat pohybem nabitých částic v magnetizovaném plazmatu, což nás dovede k principu udržení plazmatu za pomocí magnetických polí.

Nejprve uvažujme nabitou částici pohybující se v homogenním statickém magnetickém poli paralelním s osou z, na kterou nepůsobí žádné další síly. Pohybová rovnice této částice bude obecně

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{m}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \,,$$

v našem jednoduchém případě můžeme rozepsat pohybovou rovnici do složek a získat tak systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{e}{m} v_y B \,,\\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -\frac{e}{m} v_x B \,,\\ \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= 0 \,.\end{aligned}$$

Pohyb ve směru magnetického pole zůstává rovnoměrný přímočarý, kolmé složky lze separovat pomocí derivace

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e}{m}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} B = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_x \,.$$

To je známý typ diferenciální rovnice – lineární harmonický oscilátor, s řešením

$$\begin{aligned}x(t) &= -r_\mathrm{L} \sin(\Omega_\mathrm{L} t + \varphi_0) + x_\mathrm{s} \,,\\ y(t) &= r_\mathrm{L} \cos(\Omega_\mathrm{L} t + \varphi_0) + y_\mathrm{s} \,,\end{aligned}$$

kde x_s a y_s jsou souřadnice středu obíhané kružnice a φ_0 je fáze, kterou můžeme položit rovnu nule, tj. částice se bude pohybovat po šroubovici o poloměru r_L s úhlovou frekvencí Ω_L, kde

$$\begin{aligned}\Omega_\mathrm{L} &= \frac{qB}{m} \,,\\ r_\mathrm{L} &= \frac{v_\perp}{\Omega_\mathrm{L}} \,,\\ v_\perp &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \,.\end{aligned}$$

Tento pohyb se nazývá Larmorova rotace, r_L je obvykle označován jako Larmorův poloměr a Ω_L Larmorova frekvence. Z povahy pohybu je zřejmé, že zatímco podél siločar se částice může pohybovat volně, ve směru kolmém na magnetické siločáry je její pohyb omezený.

Jako druhý případ budeme uvažovat přítomnost statického homogenního elektrického pole $\boldsymbol{E}$, jehož směr bude kolmý na pole magnetické – bude mít nenulovou složku ve směru y. Soustava pohybových rovnic se tedy změní na

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{e}{m}v_y B\,,\\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -\frac{e}{m}\left(E + v_x B\right)\,,\\ \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= 0\,.\end{aligned}$$

Stejným postupem jako v předchozím případě dojdeme k diferenciální rovnici pro v_x

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e}{m}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}B = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2\left(v_x - \frac{E}{B}\right)\,.$$

Tato rovnice má tedy oproti předchozímu případu ještě partikulární řešení

$$v_x = v_\perp \cos(\Omega_\mathrm{L} t + \varphi_0) + \frac{E}{B}\,,$$

kde konstantní člen se nazývá *driftová rychlost* a tento drift se obvykle označuje jako $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ *drift*. Všimněte si, že driftová rychlost vůbec nezávisí na hmotnosti či náboji částice, jen na velikosti elektromagnetických polí. Její směr je kolmý na magnetické i elektrické pole. Pro elektrické pole v obecném směru na pole magnetické se dá dojít k výrazu

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\,.$$

Místo elektrické síly můžeme do pohybové rovnice dosadit libovolnou jinou sílu (např. gravitační) a dospět tak k formulaci pro obecný driftový pohyb

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{q}\frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\,.$$

Všechny drifty, které nejsou vyvolané elektrickou silou, mají směr závislý na náboji částic, proto v plazmatu budou driftovat elektrony jedním směrem a ionty opačným, což povede k separaci náboje. Prostorový náboj způsobuje vznik elektrického pole (viz poslední úloha předchozího dílu seriálu), které v konečném důsledku nastartuje $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ drift a umožní částicím pohyb napříč siločárami magnetického pole. Tento nepříjemný mechanismus značně znesnadňuje udržení plazmatu v magnetických pastích.

Zvláště zajímavé jsou drifty způsobené gradienty a zakřivením magnetického pole. Pokud je magnetické pole zakřivené s poloměrem zakřivení R_k, působí na částice pohybující se podél siločar odstředivá síla, která způsobuje drift

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_\mathrm{od} &= \frac{mv_\parallel^2}{R_\mathrm{k}}\boldsymbol{r} = \frac{mv_\parallel^2\boldsymbol{R}_\mathrm{k}}{R_k^2}\,,\\ \boldsymbol{v}_R &= \frac{mv_\parallel^2}{qB^2}\frac{\boldsymbol{R}_\mathrm{k}\times\boldsymbol{B}}{R_k^2}\,.\end{aligned}$$

Pokud má velikost magnetického pole gradient (např. ve směru y) kolmý na směr pole, musíme zvolit jiný postup k získání driftové rychlosti. Vyjdeme z neporušené trajektorie částice a gradient budeme považovat za poruchu. Spočtěme sílu, která působí na částici

$$F_y = -qv_x B(y) = -qv_\perp \cos \Omega_\mathrm{L} t \left(B_0 + q\frac{v_\perp}{\Omega_\mathrm{L}} \cos \Omega_\mathrm{L} t \frac{\partial B}{\partial y} \right) .$$

Zde jsme použili Tayolorova rozvoje magnetického pole

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + y\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y} .$$

Nyní musíme tuto sílu vystředovat přes jeden Larmorův oběh. První člen s $\cos \Omega_\mathrm{L} t$ bude po vystředování nulový (odpovídá neporušenému pohybu), střední hodnota $\cos^2 \Omega_\mathrm{L} t$ je $1/2$, získáme tedy sílu

$$\overline{F}_y = \mp \frac{1}{2} q r_\mathrm{L} v_\perp \frac{\partial B}{\partial y} ,$$

čemuž odpovídá drift

$$\overline{v}_{\nabla \boldsymbol{B}} = \pm \frac{1}{2} q r_\mathrm{L} v_\perp \frac{\boldsymbol{B} \times \nabla B}{B^2} .$$

Tento drift je opět kolmý jak na magnetické pole, tak na jeho gradient, který samotný drift způsobuje.

Posledním pohybem, kterým se budeme zabývat, je pohyb způsobený gradientem magnetického pole, který je rovnoběžný s jeho směrem. Vzhledem k typické vlastnosti driftu, tj. že je vždy kolmý na působící sílu i magnetické pole, bychom žádný drift neočekávali, přesto zde dochází k zajímavému jevu. Nejprve uvedeme definici magnetického momentu částice

$$\mu = \frac{m v_\perp^2}{2B} .$$

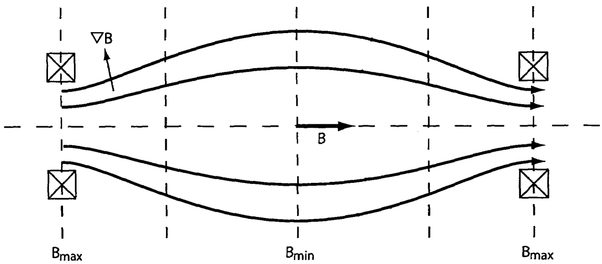
Tento moment se při pohybu částice nemění, tj. je to invariant pohybu. Důkaz tohoto tvrzení zde neuvádíme, protože je poněkud zdlouhavý. Zvídavý čtenář tak alespoň není ochuzen o možnost odvodit si ho sám. Pokud se částice pohybuje mezi místy, kde se mění velikost magnetického pole, musí se měnit i velikost jeho paralelní rychlosti, má-li být μ konstantní. Vzhledem k tomu, že magnetické pole nekoná práci, a tedy nemění celkovou kinetickou energii částice, dochází tak k přesunu energie mezi složkou kinetické energie odpovídající kolmé rychlosti a odpovídající paralelní rychlosti. Touto úvahou docházíme ke vztahu pro paralelní rychlost

$$\frac{1}{2} m v_\parallel^2 + \mu B = \mathrm{konst} .$$

Pokud se tedy částice bude pohybovat z místa se slabým magnetickým polem do oblasti s vyšším magnetickým polem, bude se postupně snižovat její paralelní rychlost. Může se dostat do bodu, kdy její paralelní rychlost klesne na nulu, protože veškerou svoji kinetickou energii transformuje do kolmé složky. Částice se díky tomu odrazí a bude se vracet zpět do oblasti s nízkým magnetickým polem. Tomuto jevu se říká magnetické zrcadlo a je principem jednoduchých lineárních magnetických pastí, které se dají realizovat pomocí dvou souosých magnetů (viz. obr. 1). Taková past ovšem není schopná zachytit všechny částice, ale pouze ty, které mají vhodný poměr paralelní a kolmé rychlosti. Kvalita pasti je daná parametry B_max a B_min, tj. velikostí magnetického pole na kraji a uprostřed pasti. Částice se v pasti zachytí, pokud splní podmínku

$$\frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} \leq \frac{B_{\min}}{B_{\max}}\,,$$

kde dané rychlosti jsou rychlostmi uprostřed pasti, tj. v místě s nejmenším magnetickým polem. Částice, která tuto podmínku nesplní (tj. nachází se ve *ztrátovém kuželu* rychlostního prostoru), dokáže překonat past a nezůstane v ní zachycena. Bohužel, tím, jak se nabité částice mezi sebou srážejí, migrují v rychlostním prostoru a postupně se dostanou až do ztrátového kuželu. To je hlavní slabina lineárních pastí, která obvykle způsobuje rychlý únik částic.



Obr. 1: Magnetické zrcadlo tvořené dvěma magnety se společnou osou

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.