

KAREL KOLÁŘ A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XXV. ročník – 2011/12



Copyright © Karel Kolář, 2012
Copyright © **MATFYZPRESS**, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze, 2012

ISBN 978-80-7378-230-6



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	14
Zadání experimentálních úloh	62
Řešení experimentálních úloh	64
Seriál o astrofyzice	87
Kapitola 1: Úvod	87
Kapitola 2: Vzdálenosti a základní fyzikální vlastnosti	95
Kapitola 3: Hvězdný zvěřinec	101
Kapitola 4: Kdysi dávno v jedné galaxii.	107
Kapitola 5: Aktivní galaxie	113
Kapitola 6: Kupy galaxií a výlet do kosmologie	119
Řešení úloh ze seriálu	127
Akce FYKOSu	147
Podzimní soustředění v Zelené Lhotě	147
Jarní soustředění v Josefově	148
Tři dny s aplikovanou fyzikou	149
Den s experimentální fyzikou 2012	151
FYKOSí Fyziklání 2012	152
Fykosí Fyziklání Online 2012	153
Pořadí nejlepších řešitelů	154



Předmluva

Milá čtenářko či milý čtenáři!

Do rukou se Ti dostala knížka, která shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v jeho XXV. ročníku, který probíhal ve školním roce 2011/12.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol v ČR. Je organizován především studenty a zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK a také zaměstnanci Ústavu teoretické fyziky. Snaží se zaujmout studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm sešitků, v nichž nalezne šest sérií po osmi úlohách, z nichž dvě jsou „rozcvičkové“, jedna více problémová, jedna experimentální a jedna tzv. seriálová. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které znáte z hodin fyziky. Vyžadují mnohdy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídká je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení ať už klasickou poštou, nebo přes internet. Opravovatelé pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro řešitele připravujeme i další akce. Bezesporu nejpobulárnějšími jsou dvě týdenní soustředění v některém z malebných koutů české země. Jejich účastníci si užijí atraktivní program, založený na dopoledních matematických nebo fyzikálních přednáškách a odpoledních hrách v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na zajímavá místa.

Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR, resp. Ústav jaderného výzkumu v Řeži. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště, kde se dělá opravdová fyzika.

V tomto ročníku jsme se též vrátili k vícedenní akci myšlenkou navazující na Týden s aplikovanou fyzikou.

Proběhl již šestý ročník tradičního FYKOSího Fyziklání, soutěže pětičlenných týmů v řešení zajímavých úloh na čas. Vyhrává ten nejrychlejší počtář. V letošním roce se soutěže zúčastnilo 48 družstev z ČR i ze Slovenska. To je pro nás dostatečným důkazem, že zájem o fyziku a přírodní vědy mezi mladými lidmi stále ještě existuje.

V návaznosti na FYKOSí Fyziklání jsme se rozhodli uspořádat první ročník

internetové týmové soutěže Fyziklání online, která hned v prvním ročníku zaznamenala velký úspěch. Soutěž byla díky její elektronické formě otevřena všem zájemcům nejenom středoškolákům, pro které však byla zejména vytvořena. Prvního ročníku se zúčastnilo 57 středoškolských a 6 jiných týmů. To svědčí o zajímavosti soutěže, a proto se z ní stane nejspíše další tradiční FYKOSí akce.

Úspěšně se rozvíjí i náš bratrský fyzikální korespondenční seminář pro základní školy – Výfuk. Letos proběhl (1 ± 1), tedy první ostrý, celkem druhý, ročník. Úhrnně se jej zúčastnilo téměř osm desítek žáků. Mladší sourozenec FYKOSu má zřejmě co nabídnout (nejen) mladším sourozencům našich řešitelů.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXV. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítili čtenáře k samostatnému zamýšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy je Seriál o astrofyzice, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci knížky se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud Tě FYKOS zaujme natolik, že by ses chtěl stát účastníkem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>
 e-mail: fykos@fykos.cz

A jak vypadal XXV. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 122 studentů ze 78 středních škol z České a Slovenské republiky. Přehled škol podle úspěšnosti jejich studentů uvádíme níže. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 1812 došlých řešení a udělili 4463 bodů.

Pořadí škol

Škola	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
G Ludovíta Štúra, Trenčín	6	53	320
G P. de Coubertina, Tábor	4	75	299
G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	3	87	261
G J. Škody, Přerov	4	58	230
G Poštová, Košice	1	178	178
Gymnázium Oty Pavla, Praha	1	134	134
G, Námestie SNP, Piešťany	1	129	129
G, Nymburk	3	43	128
G, Školská, Dubnica nad Váhom	1	125	125
G, Masarykovo nám., Třebíč	1	125	125



Zadání teoretických úloh

Úloha I.1 ... Pepiččina žárovička

2 body

Pepička si koupila žárovičku, dva přepínače a klubko drátu. Jak má žárovičku a přepínače zapojit, aby změnou polohy kteréhokoli přepínače žárovička vždy změnila stav mezi svítí/nesvítí? Jak by to bylo, kdyby chtěla Pepička takto zapojit víc než dva přepínače? *(řešení str. 14)*

Úloha I.2 ... plavec v řece

2 body

Plavec se snaží přeplavat řeku, v níž teče voda rychlostí $v_r = 2$ km/h. Sám přitom plave rychlostí 1 m/s. Po jaké dráze a jakým směrem musí plavat, aby se nejméně namohl? V jakém místě a za jak dlouho vyplave na druhý břeh? A co aby jeho dráha byla nejkratší? Šířka řeky je $d = 10$ m. *(řešení str. 14)*

Úloha I.3 ... hustilka

4 body

Jakou teplotu má vzduch, který foukáme do duše kola? Duši hustíme na 3 atmosféry, do pumpičky přichází vzduch o teplotě 20°C . *(řešení str. 15)*

Úloha I.4 ... drrrrr

4 body

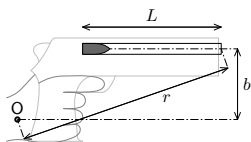
Mezi dvěma opačně nabitými deskami se sem a tam odráží vodivá kulička zanedbatelných rozměrů. S jakou frekvencí se pohybuje? Napětí mezi deskami je U . Při nárazu se kulička nabije na náboj velikosti Q shodný s polaritou desky. Koeficient restituice je k .

Bonus: Odpovídá výkon na tomto rezistoru energetickým ztrátám při nárazech?

Poznámka: Koeficient restituice je poměr kinetických energií po nárazu a před ním. *(řešení str. 16)*

Úloha I.5 ... zpětný ráz

4 body



Obr. 1

Při výstřelu z pistole zpětný ráz pistolí trhne a střela vyletí jiným směrem, než kam původně mířila hlaveň. O jak velký úhel se jedná? Uvažujte, že vliv gravitace je po celou dobu výstřelu kompenzován svaly v ruce a bod otáčení je v zápěstí. Znáte moment setrvačnosti pistole s rukou vzhledem k bodu otáčení, hmotnost a ústřední rychlost projektilu a vzdálenosti popsané v obrázku. Hodnoty těchto veličin můžete zkusit odhadnout a výsledek číselně dopočítat. *(řešení str. 18)*

Úloha I.P ... zeměkrychle

5 bodů

Představte si, že by Země měla tvar krychle. Udržela by si takový tvar? Případně jak asi dlouho by si ho mohla udržet? Na čem by to záviselo? Jak by se na ní žilo? Co by se dělo lidem jdoucím po jejím obvodu – jakou gravitační sílu by pocítovali?

*(řešení str. 20)***Úloha II.1 ... chromohrátky**

2 body

Jak by vypadala duha, kdyby místo deště ze sladké vody přšel třeba olej, kyselina sírová nebo sklo?

*(řešení str. 22)***Úloha II.2 ... zelený skřítek**

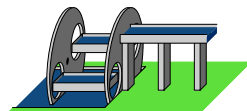
2 body

Co uvidí člověk, když si stoupne na konec duhy?

*(řešení str. 23)***Úloha II.3 ... výtah pro lodě**

4 body

V jednom skotském městečku si postavili výtah pro lodě. Jde o dvě velké vany plné vody na koncích dlouhého ramena, které je uprostřed zavěšeno. Do vany najede loď a pomocí motoru se začne s ramenem otáčet. Jaký výkon musí mít motor, aby takto loď zvedl?

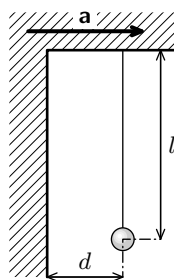
*(řešení str. 23)*

Obr. 2: Lodní výtah

Úloha II.4 ... kulička ve vlaku

4 body

Mějme svislou desku a ve vzdálenosti d od ní kuličku o hmotnosti m na závěsu délky l . V určitém okamžiku se celá soustava začne pohybovat se zrychlením a ve směru kolmém na desku. Určete podmínku pro velikost zrychlení, aby se kulička desky dotkla, a za jak dlouho k tomu dojde, víte-li, že vzdálenost d není větší než jedna pětina l .

(řešení str. 25)**Úloha II.5 ... Mikulášovy kučery**

4 body

Lidský vlas má u některých lidí tendenci zaujmout zakroucený tvar. Uvažujme vlas, který má v klidovém stavu dané parametry podobně jako stočená pružinka (poloměr, sklon, materiálové konstanty). Spočítejte, jak se vlas prodlouží, když ho nejprve položíme vodorovně na stůl a potom ho pověsíme svisle dolů. Uvažujte hodně stočený vlas, tj. s malým sklonem.

(řešení str. 26)

Obr. 3

Úloha II.P ... výtahová

5 bodů

Je možné, že se při pádu výtahu člověk před jistou smrtí zachrání dobře časovaným výskokem? Zjistěte, při jaké největší rychlosti pádu by to bylo možné (rychlost

výtahu těsně před dopadem, při které již cestující zahynou si vyhledejte nebo odhadněte). (řešení str. 27)

Úloha III.1 ... Wattův regulátor

2 body

Mějme dvě těžké kuličky. Každá z nich je připojena tyčkou do kloubu (z opačných stran). Obě koule se mohou vychylovat pouze v jedné svislé rovině. Celou soustavou začneme otáčet okolo svislé osy procházející kloubkem. Jak závisí odchylka tyček na úhlové rychlosti? (řešení str. 28)

Úloha III.2 ... projížďka po řece

2 body

Představme si řeku přehrazenou hrází. Aby mohly lodě překonávat celý splavný vodní tok, jsou v rámci hráze umístěna zdymadla. Uvažujte, že na řece, která má průtok $Q = 200 \text{ m}^3/\text{s}$, je umístěné zdymadlo, které funguje mezi dvěma vodními hladinami před a za hrází s výškovým rozdílem $H = 4 \text{ m}$ a má rozměry $s = 100 \text{ m}$ a $d = 20 \text{ m}$. Kolik lodí denně může zdymadlo přepravit z nižší nádrže do vyšší (pokud je bere vždy po jedné), pokud maximální průtok vody do a ze zdymadla je $Q_z = 250 \text{ m}^3/\text{s}$? (řešení str. 29)

Úloha III.3 ... train à grande vitesse

4 body

Trat má poloměr oblouku R , vlak má těžiště ve výšce H nad kolejemi s rozchodem D . Jakou maximální rychlostí může po takovéto trati jet vlak, pokud požadujeme, aby se mohl kdykoli zastavit, aniž by spadl na bok? Za jakých podmínek je maximální rychlost neomezená?

Poznámka Zanedbejte síly působící mezi jednotlivými vagony a šířku vagonu vzhledem k poloměru oblouku. (řešení str. 30)

Úloha III.4 ... těžký úděl

4 body

Při řezání stromů musí zahradník počítat s leccakými problémy. Uvažujme větev připojenou k nepružnému lanu (tj. tuhost roste nade všechny meze) přes kladku. Dole stojí dva brigádníci, kteří jistí větev, aby nespadla do bazénu. Větev spadne volným pádem z výšky h , než se provaz napne. Za určitých okolností brigádníci držící druhý konec lana vyjedou tak vysoko, že narazí do kladky. Stanovte podmínky, za jakých bude řezání bezpečné.

Nápověda Uvažujte nejprve chování dvou hmotností na ledě, které jsou spojeny nepružným lanem a mají různé rychlosti. (řešení str. 31)

Úloha III.5 ... zemnicí roviny

5 bodů

Mějme dvě nekonečně velké vodivé roviny, které jsou obě uzemněné a vzdálené od sebe l . Mezi nimi je umístěn bodový náboj velikosti q ve vzdálenosti x od horní roviny. Určete náboj indukovaný na spodní rovině. (řešení str. 33)

Úloha III.P ... zkroťte Gaiu

5 bodů

Navrhňte způsob, jak přeměnit rotační energii Země na elektrickou energii. Fantazii se meze nekladou, konstruktéři jsou schopní a postaví všechno.

(řešení str. 34)

Úloha IV.1 ... schody z Chrudimi

2 body

Eskalátory v metru na náměstí Míru mají n schodů a pohybují se rychlostí v . Spočítejte, kolik schodů ve skutečnosti vyšlapete, pokud po nich jdete rychlostí v_1 :

a) po směru jízdy, b) proti směru jízdy. Při pohybu proti směru uvažujte, že $v_1 > v$.

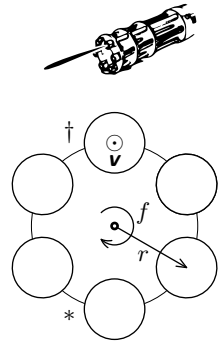
(řešení str. 35)

Úloha IV.2 ... Gatling

2 body

Stroj byl původně navržen pro distribuci semen do země, ale ukázal se jako mnohem užitečnější pro distribuci olova do nepřátel (rotační kulomet). Spočítejte, kde vzhledem k hlavní Gatlingu hrozí nebezpečí zasažení kulkou. Ráže je d , počet hlavních n , vzdálenost osy hlavně od osy hřídele je r , otáčky všech hlavních jsou f , kadence výstřelů je F a ústředná rychlost střel v .

(řešení str. 36)



Obr. 4: Gatling zepředu, * nabíjení, † výstřel

Úloha IV.3 ... kámen letí

3 body

Hodíme kulatý kámen o hmotnosti m z výšky h nad hladinou do rybníka o hloubce d . Přibližně za jak dlouho spadne na dno (od okamžiku puštění)? Jak se výsledek změní, když kámen nebude kulatý, ale placatý?

(řešení str. 36)

Úloha IV.4 ... Stavinoha

4 body

Model rakety má motůrek, jenž dává konstantní tah, dokud má palivo o počáteční hmotnosti m_p . Prázdná raketa váží m_0 a motor palivo spaluje lineárně s časem. Do jaké výšky může raketa vyletět, letí-li v homogenním gravitačním poli a zanedbáme-li odpor vzduchu?

(řešení str. 38)

Úloha IV.5 ... únik plynu

4 body

Spočítejte, kolik procent své hmotnosti za rok ztratí zemská atmosféra, pokud uvážíte, že končí 10 km nad zemí, po celé své výšce má konstantní tlak (stejný jako u hladiny moře), je tvořena ideálním plynem o teplotě 300 K, splňuje Maxwellovo rychlostní rozdělení a gravitace se v jejím objemu nijak neprojevuje.

(řešení str. 39)

Úloha IV.P ... účet za topení

5 bodů

V některých bytovkách se teplá voda ohřívá centrálně pro všechny její obyvatele. V zásobníku je během dne udržována konstantní teplota vody. Šetřiví obyvatelé však ohřev na noc vypínají, voda tedy do rána vystydně a poté se opět musí ohřát. Odhadněte (na základě vyhledaných údajů), kolik energie se tímto ušetří, a navrhněte obyvatelům lepší způsoby, jak ušetřit při zachování komfortu.

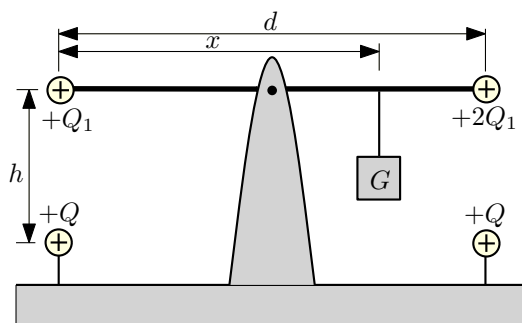
*(řešení str. 41)***Úloha V.1 ... šumivý prášek**

2 body

Hodíme-li do sklenice s vodou šumivý prášek, tak nejprve leží na dně a potom se zvedne. Proč?

*(řešení str. 43)***Úloha V.2 ... elektrická rovnováha**

2 body



Obr. 5

Na obrázku 5 je nevodivá tyč délky d zanedbatelné hmotnosti, otočná kolem svého středu. Na obou koncích tyče jsou připevněny malé vodivé koule zanedbatelných hmotností s kladnými náboji Q_1 a $2Q_1$. Tyč je vyvážena závažím o tíze G podle obrázku. Ve vzdálenosti h přímo pod každou z koulí je pevně umístěna koule s kladným nábojem Q .

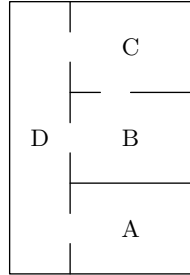
- Určete vzdálenost x , pro niž je tyč vodorovná a je v rovnováze.
- Pro jakou hodnotu h bude tyč v rovnováze a nebude přitom vůbec zatěžovat čep, na němž je upevněna?

*(řešení str. 43)***Úloha V.3 ... putování faraonů**

3 body

Aleš bydlí ve čtyřpokojevém bytě, jehož půdorys si můžete prohlédnout na obrázku. Mára se ale rozhodl, že Alešův byt zamoří nepříjemnými mravenci faraony.

Faraoni po bytu šíleně rychle pobíhají a to ještě navíc šíleným způsobem – můžete uvažovat, že jednou za pět minut se 60% mravenců přesune do sousedních místností a jenom 40% jich zůstává pobíhat ve stejné místnosti, co předtím. Přitom se rovnoměrně rozbíhají do sousedních místností (když má místnost dvoje dveře, tak 30% jich přeběhne do jedné a 30% do druhé, když má troje dveře, tak se rozdělí po 20%). A to se opakuje každých pět minut (uvažujte jenom kroky přesně po pěti minutách). Faraonům se v bytě líbí, a tak neutíkají ven. Na druhou stranu se faraoni nemají šanci jinak dostat do bytu než propašováním, a to dělá jenom Mára, takže jinak ani faraoni v bytu nepřibývají.



- a) Když Mára zlomyslně umístí 1000 faraonů do předsíně (D), kolik faraonů bude v jednotlivých místnostech po pěti minutách? Kolik jich bude po deseti minutách a po patnácti minutách?
- b) Pokud jsme našli v místnostech počty mravenců $N_A = 12$, $N_B = 25$, $N_C = 25$ a $N_D = 37$, jak byli mravenci rozmístěni před pěti minutami?

Bonus Kolik mravenců by bylo v místnostech po hodně dlouhé (prakticky nekonečné) době, když by Mára rozmístil faraony jako v bodu a)? Závísí to na tom, jak Mára mravence rozmístil? A nejrůznější otázka – ustálí se počet mravenců na jedné hodnotě, nebo bude oscilovat?

(řešení str. 44)

Úloha V.4 ... maminka a kočárek

5 bodů

Maminka má kočárek o hmotnosti m a je s ním pevně spojena vláknem délky l , které je na počátku natažené. Mezi maminkou i kočárkem a podlahou, na které oba stojí, je nenulový koeficient smykového tření f . Maminka začne kočárek táhnout po přímce konstantní rychlostí v , která je kolmá na počáteční polohu vlákna. Popište trajektorii kočárku v závislosti na parametrech úlohy. Maminku i kočárek považujte za hmotné body. Doporučujeme úlohu numericky simulovat.

(řešení str. 47)

Úloha V.5 ... lovec v2

4 body

O kolik musíme zvýšit výkon motoru na jednoho chyceného ptáka za sekundu, pokud nad vagonem vztyčíme síť, do níž chytáme nebohé ptáky? Vlak jede rychlostí v , pták váží m , jeho rychlost je w , úhel nalétnutí do sítě je φ a síť má plochu S . Předpokládejte, že mezi jednotlivými záchyty se síť vrátí vždy do klidové polohy.

(řešení str. 49)

Úloha V.P ... světelný meč

5 bodů

Navrhňte konstrukci světelného meče, aby byl sestrojitelný za současného poznání vědy a techniky a přitom vypadal i fungoval podobně jako ten autentický ze Star Wars.

(řešení str. 50)

Úloha VI.1 ... tref svojí družici

2 body

Máme malý míček o poloměru r těsně nad míčem o poloměru R . Nejspodnější bod spodního míče je ve výšce h nad zemí. Oba míčky pustíme. Do jaké nejvyšší výšky může vystoupit horní míček? Uvažujte, že všechny srážky jsou dokonale pružné. Bez újmy na bodech můžete považovat hmotnost horního míčku za zanedbatelnou. *Bonus* Postup zobecněte na N míčků. (Stále můžete uvažovat, že hmotnost míčku výše je zanedbatelná oproti míčku pod ním.) *(řešení str. 54)*

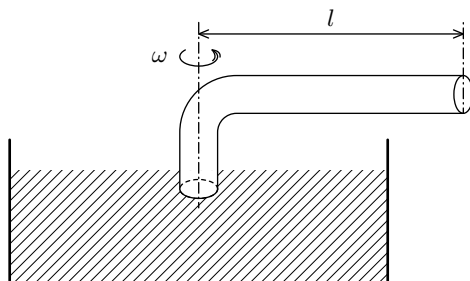
Úloha VI.2 ... kosmická stanice

2 body

Odhadněte, jakou minimální energii musíme dodat kosmické stanici, abychom ji dostali na oběžnou dráhu. Můžete pracovat s hodnotami pro mezinárodní kosmickou stanici ISS, která obíhá Zemi ve výšce cca $h = 350$ km a má celkovou hmotnost přibližně $m = 450$ tun. Vysvětlete, proč je odhad minimální a vyjmenujte alespoň některé fyzikální skutečnosti, které vedou k tomu, že je skutečná spotřeba raket významně vyšší. *(řešení str. 55)*

Úloha VI.3 ... čerpadlo

4 body



Obr. 6: Trubice ponořená ve vodě

Mějme zahnutou trubici délky l plnou vody, jejíž spodní konec je ponořen do nádoby (obrázek 6). Trubicí otočíme jednou za čas T . Pod jakým tlakem je nasávána voda z nádoby? Viskozitu vody a tlak sloupce vody ve svislé části zanedbejte. *(řešení str. 56)*

Úloha VI.4 ... kroule

4 body

Jaká část povrchu ledové kry tvaru koule trčí nad hladinu? Hustota mořské vody je 1025 kg/m^3 , hustota ledu 917 kg/m^3 . *(řešení str. 58)*

Úloha VI.5 ... běh na přednášku z eugeniky

4 body

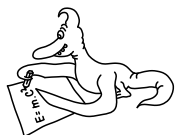
Aleš sedí pod kopcem u stanu a surfuje na internetu na svém tabletu, když tu si náhle všimne, kolik je hodin, a uvědomí si, že vlastně chtěl jít na přednášku. Už

je tak pozdě, že bude muset celou cestu běžet a nebude moct zastavit, ani aby se vydýchal. Proto se samozřejmě okamžitě rozběhne svou maximální běžeckou rychlostí v do kopce, který má rovnoměrné stoupání α . Po chvíli (čas T) si ale uvědomí, že má v kapse cihlu a že tu cihlu chtěl nechat u stanu. Aleš od sebe umí cihlu hodit jedinež rychlostí w . Pod jakým úhlem má cihlu v tom okamžiku vyhodit, aby dopadla na kamaráda, co si právě sedl na jeho místo? Může se stát, že nedohodí? Aleš je hodně rychlý, a proto neuvažujte jeho reakční dobu a ani dobu, kterou vám zabere řešení úlohy. (řešení str. 59)

Úloha VI.P ... paprsky X

4 body

Při prosvěcování prstů silným světlem je možno vidět jednotlivé cévy, ale zbytek tkáně se zdá homogenní. Vysvětlete, proč cévy vidět jsou, zatímco kosti ne. (řešení str. 60)

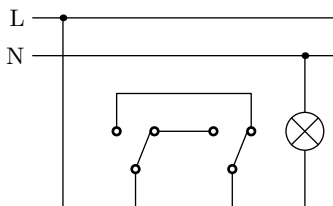


Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... Pepiččina žárovka

Pepička si koupila žárovku, dva přepínače a klubko drátu. Jak má žárovku a přepínače zapojit, aby změnou polohy kteréhokoli přepínače žárovka vždy změnila stav mezi svítí/nesvítí? Jak by to bylo, kdyby chtěla Pepička taktó zapojit víc než dva přepínače?

Nejprve vyřešíme úlohu se dvěma přepínači. Řešení je značně praktické, neboť se často stane, že chceme ovládat jednu žárovku ze dvou míst tak, aby se při každém přepnutí změnil stav svítí/nesvítí. Tohoto bychom využili třeba na schodišti, kdy při cestě nahoru zapneme světlo na úpatí schodiště a po jeho zdolání ji zase chceme vypnout, jenže už v prvním patře. Tomuto zapojení říkají elektrikáři schodišťové zapojení (z výše uvedených důvodů). Podívejte se na obrázek 7 a zjistíte, že obvod bude fungovat přesně tak, jak potřebujeme.

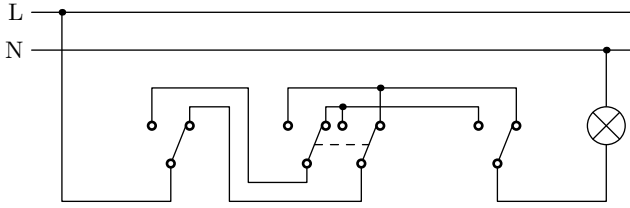


Obr. 7: Dvojice schodišťových vypínačů

Pokud bychom chtěli přidávat další přepínače do tohoto zapojení tak, aby se zachovala požadovaná vlastnost, nevystačili bychom si už s pouhými přepínači, některé z nich by už musely být provázané. Představme si, že žárovka svítí – jeden obvod tedy musí být uzavřen dvěma původními přepínači A, B. Pokud bychom tento stav třetím přepínačem (nazvěme ho C) chtěli změnit, museli bychom přepínačem C tento obvod rozpojit. Potom by ale změna poloh prvních dvou vypínačů nezpůsobila žádnou změnu, neboť obvod, jimi dvěma uzavřený, byl rozpojen přepínačem C. Přepínače by se tedy musely navzájem ovlivňovat, při přepnutí jednoho bychom zároveň museli změnit polohu druhého, například tak, jak je na znázorněno na obrázku 8.

Úloha I.2 ... plavec v řece

Plavec se snaží přeplavat řeku, v níž teče voda rychlostí $v_r = 2$ km/h. Sám přitom plave rychlostí 1 m/s. Po jaké dráze a jakým směrem musí plavat, aby se nejméně



Obr. 8: Trojice schodišťových vypínačů

namohl? V jakém místě a za jak dlouho vyplave na druhý břeh? A co aby jeho dráha byla nejkratší? Šířka řeky je $d = 10$ m.

Protože plavec plave stále stejně rychle bez ohledu na to, kam ho unáší proud, tak potřebuje plavat co nejkratší dobu, aby se co nejméně namohl. To znamená, že v soustavě spojené s pohybující se řekou bude plavat kolmo na břeh.

Protože koná vzhledem k zemi dva na sobě nezávislé rovnoměrné přímočaré pohyby, výsledkem jejich složení bude opět přímka, která bude se břehem, od kterého vyplaval, svírat úhel

$$\alpha = \arctg\left(\frac{v_p}{v_r}\right) = 61^\circ,$$

kde v_p označuje rychlost plavce. Na druhý břeh vyplave za čas $t = d/v_p = 10$ s. Proud ho přitom snese o vzdálenost

$$s = tv_r = d \frac{v_r}{v_p} = 5,5 \text{ m}.$$

Abyste jeho dráha byla nejkratší, musí vyplavat kolmo na druhém břehu. Přitom aby plaval kolmo na břeh, musí mít složka v_p rovnoběžná se břehem stejnou velikost (ale opačný směr) jako v_r . Vzhledem k řece tedy musí plavat tak, aby vektor jeho rychlosti svíral s proudem úhel

$$\beta = \arccos\left(\frac{v_r}{v_p}\right) = 56^\circ.$$

K tomu, abychom zjistili, za jak dlouho vyplave, potřebujeme znát složku rychlosti v_p , která je kolmá na břeh. Snadno ji dopočteme z Pythagorovy věty jako $v_n = \sqrt{v_p^2 - v_r^2}$. Čas, za který vyplave, je

$$t = \frac{d}{v_n} = \frac{d}{\sqrt{v_p^2 - v_r^2}} = 12 \text{ s}.$$

Úloha I.3 ... hustilka

Jakou teplotu má vzduch, který foukáme do duše kola? Duši hustíme na 3 atmosféry, do pumpičky přichází vzduch o teplotě 20°C .

Duši hustíme tak, že vzduch v hustilce nejprve velmi rychle stlačíme a pak přefoukneme do duše. Ve skutečnosti musíme dosáhnout tlaku o něco vyššího, než jaký je v duši, aby k přesunu vzduchu došlo. Zároveň se vzduch v průběhu ochlazuje od okolí. To závisí na teplotě hustilky, která se většinou dost zahřeje. Jelikož se vliv těchto jevů neodvažujeme odhadnout, spokojíme se s tím, že hustilka už je zahřátá a otvor pro přepouštění vzduchu je dostatečně velký, aby nebylo třeba tlaku o moc většího než 3 atmosféry.

Jelikož je stlačení velmi rychlé, můžeme daný děj považovat za adiabatický. Pro něj platí známý vztah

$$pV^\kappa = \text{konst},$$

kde p je tlak plynu, V je jeho objem a κ je Poissonova konstanta pro vzduch. Zároveň musí být po celou dobu splněna stavová rovnice plynu

$$pV = nRT,$$

kde n je látkové množství plynu, R je univerzální plynová konstanta a T je termodynamická teplota plynu. Označíme-li počáteční hodnoty indexem 0 a koncové hodnoty indexem 1, získáme tyto tři rovnice:

$$p_0 V_0^\kappa = p_1 V_1^\kappa, \quad (1)$$

$$p_0 V_0 = nRT_0, \quad (2)$$

$$p_1 V_1 = nRT_1. \quad (3)$$

Rovnici (1) upravíme na

$$\frac{V_1}{V_0} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (4)$$

Podílem rovnic (3) a (2) a krátkou úpravou získáme

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} T_0$$

a dosazením z (4)

$$T_1 = \frac{p_1}{p_0} \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} T_0.$$

Protože vzduch stlačujeme na 3 atmosféry, platí $p_1/p_0 = 3$, dále $\kappa = 1,4$ a $T_0 = 293\text{ K}$. Dosadíme do vzorce a získáme

$$T_0 = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{1,4}} \cdot 293\text{ K} \approx 401\text{ K} \approx 128^\circ\text{C}.$$

Až se příště spálíme o hustilku, nebudeme se divit.

Úloha I.4 ... drrrrr

Mezi dvěma opačně nabitými deskami se sem a tam odráží vodivá kulička zanedbatelných rozměrů. S jakou frekvencí se pohybuje? Napětí mezi deskami je U . Při nárazu se kulička nabije na náboj velikosti Q shodný s polaritou desky. Koeficient restituice je k .

Bonus: Odpovídá výkon na tomto rezistoru energetickým ztrátám při nárazech?

Poznámka: Koeficient restituice je poměr kinetických energií po nárazu a před ním.

Keďže sa guľôčka nabije na náboj rovnakej polaroty ako doska, do ktorej narazí, po každom náraze je naďalej urýchľovaná elektrickým poľom. Takto ale nezískava energiu neustále, po zopár nárazoch sa jej pohyb stane takmer periodický. Guľka totiž pri náraze stráca energiu, a hodnota tejto energie závisí od rýchlosti. Čím ide rýchlejšie, tým má väčšiu kinetickú energiu, a teda aj o viac energie príde. Takto bude získavať energiu z potenciálového rozdielu a zrýchľovať, až pokiaľ sa nedostane do ustáleného stavu, v ktorom pri zrážke stratí rovnakú energiu, akú získa pri prechode medzi doskami. Na rovnakej rýchlosti by sa ustálila aj v prípade, ak by najprv išla prirýchlo.

Označíme si rýchlosť tesne pred dopadom v a po odraze u . Koeficient reštitúcie je definovaný ako

$$k = \frac{\frac{1}{2}mu^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{u^2}{v^2}.$$

Teraz vieme vypočítať ustálenú rýchlosť, napríklad tú pred dopadom

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = UQ.$$

Čo vyjadruje, že guľôčka získa na napätí rovnakú energiu, akú stratí pri náraze. Rýchlosť v už len vyjadríme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2(1 - k) &= UQ \\ v &= \sqrt{\frac{2UQ}{m(1 - k)}}. \end{aligned}$$

Ako vyzerá pohyb medzi doskami? Ak sú tieto dosky dostatočne veľké v porovnaní s medzerou medzi nimi, tak môžeme elektrické pole považovať za homogénne, a takéto pole pôsobí na guľôčku konštantnou silou. Pohyb je teda jednoducho rovnomerne zrýchlený. Ak si označíme vzdialenosť dosiek d , a uvedomíme si, že priemerná rýchlosť je aritmetický priemer u a v (je to kvôli konštantnému zrýchleniu, premyslite si!), čas prechodu medzi doskami bude

$$t = \frac{d}{(u + v)/2} = \frac{2d}{u + v}.$$

Frekvencia je obrátená hodnota periódy, a v našom prípade perióda zahrňuje pohyb tam a späť, teda je dvojnásobok času t .

$$f = \frac{1}{2t} = \frac{u+v}{4d}$$

Teraz už len dosadíme za rýchlosť

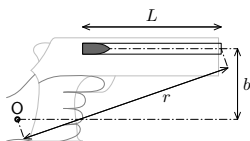
$$f = \frac{1 + \sqrt{k}}{4d} v = \frac{1 + \sqrt{k}}{4d} \sqrt{\frac{2UQ}{m(1-k)}} = \sqrt{\frac{UQ}{8md^2} \left(\frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \right)}.$$

Tu síce vystupujú parametre, ktoré neboli v zadaní, no jednoduchou úvahou zistíme, že tam skutočne majú byť, a nedajú sa vyjadriť. Obe veličiny, hmotnosť aj vzdialenosť dosiek, vieme meniť nezávisle od zvyšných zadaných parametrov, takže vieme vyrobiť dve situácie, ktoré sa líšia len napr. hmotnosťou guľôčky, ktorá teda nemôže byť kombináciou už zadaných veličín ako napätie, prenášaný náboj či koeficient reštitúcie.

V bonuse určite zanedbáme všetky straty energie okrem tých, ktoré nastávajú pri zrážke, kvôli koeficientu reštitúcie. Tu potom jasne vidíme, že výkon, ktorý dodáva zdroj poskytujúci napätie U , sa mení len na stratový výkon pri nárazoch. Presvedčiť sa o tom dá aj priamo počítaním týchto dvoch výkonov, všetko potrebné už máme vyjadrené. Stačí len náboj prenesený za čas t (takto totiž vyzerá definícia prúdu) vynásobiť napätím U , a tento výkon porovnať so stratou kinetickej energie pri jednom náraze delenou časom t , aby sme opäť dostali výkon (čo, ako si môžeme všimnúť, je nakoniec len rovnica vyjadrujúca rovnosť získanej a stratenej energie, z ktorej sme vychádzali na začiatku).

Vidíme teda, že ak si všímame len vonkajší výkon a prúd, správa sa takýto rezistor ako skutočný odpor. Skôr ako však bežíme na patentový úrad, mali by sme si so sklamaním všimnúť, že jeho voltampérová charakteristika nie je priamka. Prúd $I = Q/t = Qf$ závisí od napätia nie lineárne, ako by sa na správny rezistor patrilo, ale komplikovanejšie, kvôli čomu klesá odpor s druhou odmocninou napätia. Analógia so skutočným rezistorom je teda možná len čiastočne.

Úloha I.5 ... zpětný ráz



Obr. 9

Při výstřelu z pistole zpětný ráz pistolí trhne a střela vyletí jiným směrem, než kam původně mířila hlaveň. O jak velký úhel se jedná? Uvažujte, že vliv gravitace je po celou dobu výstřelu kompenzován svaly v ruce a bod otáčení je v zápěstí. Znáte moment setrvačnosti pistole s rukou vzhledem k bodu otáčení, hmotnost a ústovou rychlost projektilu a vzdálenosti popsané v obrázku. Hodnoty těchto veličin můžete zkusit odhadnout a výsledek číselně dopočítat.

Nejprve bychom se měli zamyslet, co se při výstřelu děje. Kulka v hlavni postupně zrychluje a na pistoli působí reakční síla. Protože ale osa otáčení není v ose hlavně,

tak její moment není nulový. Dále ještě na pistoli působí gravitační síla, ale ta je dle zadání plně kompenzována svaly v ruce.

Nejprve určíme, jakou rychlostí se bude pohybovat hlaveň v okamžiku výstupu kulky z hlavně. Jako v mnoha dalších případech můžeme i zde použít zákony zachování. Protože celkový moment sil, který působí na pistoli s rukou, je nulový (pistole je před výstřelem v klidu), zachovává se moment hybnosti celé soustavy. Budeme jej uvažovat vzhledem k ose otáčení O , mohli bychom uvažovat libovolný jiný, ale tento je nejvhodnější. Označíme-li v_{ust} ústovou rychlost projektilu o hmotnosti m , z druhého Newtonova zákona dostáváme

$$mbv_{\text{ust}} = I\omega_O,$$

kde ω_O je úhlová rychlost otáčení pistole okolo zápěstí v okamžiku, kdy náboj opouští hlaveň, a I je moment setrvačnosti pistole vzhledem k ose otáčení. Proto pro rychlost konce hlavně v_{\perp} platí

$$v_{\perp} = \frac{mbr}{I}v_{\text{ust}}. \quad (5)$$

Tuto rychlost budeme muset nakonec vektorově přičíst k ústové rychlosti projektilu, avšak ještě musíme určit, o kolik se „nadvzdne“ hlaveň během výstřelu.

Nyní se tedy pokusme určit úhel otočení hlavně okolo bodu O během zrychlování náboje. V každém okamžiku musí platit zákon zachování momentu hybnosti, tj. vztah (5). Můžeme nyní použít definici rychlosti, tj. že jde o poměr změny polohy a uplynulého času

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = v_{\perp} = \frac{mbr}{I}v_{\text{ust}} = \frac{mbr}{I} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

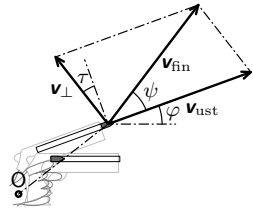
kde Δx je posunutí náboje v hlavni a Δy je posunutí konce hlavně. Z tohoto vidíme (po vynásobení Δt), že změna polohy konce hlavně je přímo úměrná změně polohy náboje, proto i celkové posunutí konce hlavně H je přímo úměrné poloze náboje a platí

$$H = \frac{mbr}{I}L.$$

Pro úhel otočení (v radiánech) platí

$$\varphi = \frac{R}{r} = \frac{mbL}{I}.$$

Nyní již musíme pouze dát dohromady všechny vlivy. Celá situace je uvedena na obrázku 10. Protože je rychlost pohybu pistole vzhledem k rychlosti pohybu kulky malá, nebude mít téměř vliv na velikost rychlosti v_{fin} , ale bude mít vliv na její směr. Průmět rychlosti v_{\perp} do směru kolmého k ose hlavně je $v_{\perp} \cos \tau$, ale



Obr. 10: Směr výletu kulky

podíváme-li se na obrázek ze zadání 1, tak zjistíme, že $\sin \tau = b/r$, tj. $\cos \tau = \sqrt{1 - b^2/r^2}$. Změna směru výstřelu odpovídající tomuto vlivu je rovna

$$\psi \approx \sin \psi = \frac{v_{\perp} \sqrt{1 - b^2/r^2}}{v_{\text{ust}}} = \frac{mbr}{I} \sqrt{1 - b^2/r^2} = \frac{mb}{I} \sqrt{r^2 - b^2}.$$

Celková změna směru letu δ je rovna součtu úhlu otočení koltu a odchylce způsobené právě nenulovou rychlostí otáčení koltu. Platí

$$\delta = \varphi + \psi = \frac{mb}{I} \left(\sqrt{r^2 - b^2} + L \right).$$

Nyní ještě zkusme odhadnout hodnoty jednotlivých parametrů. Pro hodnoty $m = 2 \text{ g}$, $b = 7 \text{ cm}$, $r = 20 \text{ cm}$, $L = 15 \text{ cm}$ a $I = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ dostáváme $\delta = 4,72 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0^{\circ}1'37''$. Odchylka je velmi malá, což bychom očekávali, ale při střelbě na 100 m vzdálený cíl je takto vzniklá odchylka rovna 4,7 cm, což pro odstřelovače již nemusí být zanedbatelné.

Úloha I.P . . . zeměkrychle

Představte si, že by Země měla tvar krychle. Udržela by si takový tvar? Případně jak asi dlouho by si ho mohla udržet? Na čem by to záviselo? Jak by se na ní žilo? Co by se dělo lidem jdoucím po jejím obvodu – jakou gravitační sílu by pocítovali?

Představy o různých tvarech Země patří k lidstvu odedávna. Vždyt lepší představu máme teprve několik století, a i tak se najde jistě mnoho těch, kdo by rádi popustili uzdu fantazii. Tvar Země ve tvaru krychle tak i v dnešní době má své místo ve světě umění, fotografie, výtvarnictví. Obliba krychlovité Země se usídlila i v databázích fotobank typu Fotolia i sociálních systémů typu Flickr – sluneční hodiny ve tvaru Krychlozemě zdobí australské město i poličky některých nadšenců.

Země má velké štěstí, že z „placky“ jsme přešli na představu jednodušších těles a nepředstavujeme si ji běžně jako jehlan, dodekaedr nebo nepravidelnou planetku z hlavního pásu Sluneční soustavy. Ale proč tomu vlastně je tak, jak tomu je? Proč velká tělesa jako Země nebo Venuše získala hezký „geoidní“ tvar, zatímco malá tělesa si udržují nepravidelnost brambory?

Země nemůže nikdy na dlouho (tedy z pohledu vesmíru) nosit slušivý tvar různých geometrických těles, ale vždycky hezky zkonverguje (přiblíží se) ke svému geoidu. Je to tím, že je prostě dostatečně hmotná. Stačí si představit třeba něco pořádně těžkého z běžné praxe – čím těžší chcete postavit dům, tím pevnější musí být základy. A těmi základy je Země, proto se také dům udrží – dokáže nést svou vlastní váhu. U malé planetky v rozměrech kilometrů jsou přitažlivé síly v úplně jiných řádech než u Zeměkoule/Zeměkrychle. . . Ale kdybychom tedy Zemi dnes vymodelovali a nechali ji svému osudu – chudák, dostala by ostré hrany a zbylá sedmička planet by s ní asi chvíli nemluvila – jak by se nám asi žilo?

Kdo si myslí, že „dobře“, asi ještě nikdy nezkoušel roztočit kostku od Člověče, nezlob se. Už jen takový malý detail na úvod – víte, jak je taková osa rotace šestistěně nestabilní? Rotovala by Země podél osy od vrcholu k vrcholu, nebo podél osy

vedoucí středem stěn? Z hlediska mechaniky to vyjde nastejno, protože momenty setrvačnosti vůči tzv. hlavním osám rotace jsou stejné, z čehož pak plyne, že i momenty vůči jakékoli ose procházejícím středem krychle budou stejné (pro homogenní dokonalou krychli). A vzhledem k tomu, že obvykle mají tělesa tendenci rotovat kolem osy, vůči které mají extrémální moment setrvačnosti, tak zrovna v případě krychle jsou osy rovnocenné. Je tedy více než pravděpodobné, že by se prostě čas od času stalo (vlivem nějakého vychýlení, např. srážkou s meteoritem), že by se osa rotace Země změnila. To by změnilo tvar tíhového pole (tvořeného gravitačním a odstředivým zrychlením) a v případě nějaké „dobře mířené“ a silné srážky by se mohly i silně posunout „póly“ naší Zeměkrychle, což by obyvatelům také komplikovalo život.

V zásadě jde o to, že gravitační pole Zeměkrychle by rozhodně nevypadalo jako skorohogenní, jak jej obvykle my jako obyvatelé Země pocítujeme. Gravitační síla F závisí na rozmístění hmoty, o hustotě $\varrho(\mathbf{r}')$ kolem bodu \mathbf{r} , jenž nás zajímá, jako

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = G \iiint_{\text{Zeměkrychle}} \varrho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} d^3 r',$$

který lze analyticky přiblížit v případě krychle metodou polyhedronů [1] nebo řešit numericky. Výsledkem je pole mající stejnou symetrii jako krychle, v němž se vektor gravitačního zrychlení odchyluje od směru ke středu Zeměkrychle až o 7° (vždy na kružnicích ležících na povrchu o poloměru čtvrtiny délky hrany se středem ve vrcholech), což je způsobeno lokálním nahromaděním hmoty – gravitační pole cítí vrchol a uhýbá tak směrem k jeho „středu“ od středu Země. Pětačtyřicetistupňové facety, do nichž by případný poutník stoupal, aby dosáhl hrany nebo vrcholu, by tak velmi zásadně měnily směr, kterým by poutník při uklouznutí padal. Poutník by stoupal do „různě“ prudkého kopce, ale čím blíže vrcholu, tím bude kopec příkřejší. Gravitační zrychlení na vrcholu směřuje do středu Země, a tedy „skutečných“ 45° stoupání není téměř v lidských silách.

Na druhou stranu, čím dále jsme od středu Země, tím slabší je pole, a proto se poutník cítí lehčí, a to až o 30%. Tedy není to nakonec zas tak nemožné stoupání, o to nebezpečnější. Nebezpečnost cesty záleží také na přesnosti zemské hrany, zda je zaoblená na centimetrových rozměrech, přesná na průměr atomu, nebo je kilometrový oblý „kopec“. Tak jako tak by poutník, jenž by na hraně uklouzl, uklouzl do docela pěkných problémů, a to kvůli výše zmíněné odchylce vektoru gravitačního pole od normálového vektoru povrchu.

Kvůli zmíněné odchylce také – což by zajímalo každého živého tvora možná ze všeho nejvíc - by ani atmosféra neobjímala Zeměkrychli všude, ale vytvořila by jen jakési ostrůvky kolem středů stěn Země a směrem k sedlovým rovinám by řídla a řídla. Jak by pak bylo možné komunikovat mezi vzniklými 6 enklávami? Jak by lidé létali z jedné stěny na druhou? Byly by to v podstatě lety do vesmíru. . .

Tvar Země by také měl zásadní vliv na rozmístění teplot, skokový východ a západ slunce v celé enklávě najednou a hlavně chod ročních období. Záleží na smyslu rotace, ale pokud by osa směřovala podobně jako dnes, což by vůbec nemusela, zachoval by se jakýsi typ arktického dne a noci. Podnebí v „severní“ a „jižní“ en-

kláve by odpovídalo podnebí na severním a jižním pólu, v ostatních enklávách by podnebí odpovídalo přibližně rovníkovému.

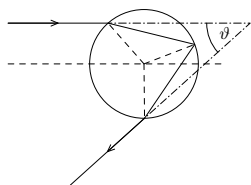
Jak dlouho by si taková Zeměkrychle udržela tvar krychle? V tomto směru není úloha exaktně zadaná, protože neznáme „přesnost“ přiblížení. Proces je však determinovaný, rozpouštěním nejprve vrcholů a později hran, přetečením hmoty směrem k rovníku. Proces je závislý na materiálovém složení a to je extrémně obtížné modelovat, neboť vnější vrstvy Země jsou spíše pohyblivé a dostředivé zrychlení spolu se zdánlivými silami asi způsobí pohyb litosféry a s tím spojenou geologickou aktivitu. Takže přesun hmoty by byl enormní – přesun různých hustot, teplotní gradienty, projevovaly by se nedokonalosti struktur atd. Protože ale nepozorujeme velké planety nebo hvězdy ve tvaru krychle, které byly na počátku svého života také nekulové, můžeme říci, že ke kolapsu by jistě došlo. Jisté ale je, že za svého života se Země změnit tvář nebojí. Že by si ale vizáž udržela, jí naštěstí pro nás nehrozí.

Reference

- [1] Werner, R. A. Scheeres, D. J. *Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia.* in *Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy* 65, 1997, s. 313–344.

Úloha II.1 ... chromohrátky

Jak by vypadala duha, kdyby místo deště ze sladké vody přšel třeba olej, kyselina sírová nebo sklo?



Obr. 11: Odraz a lom paprsku v kulové kape

Nejdříve krátce popište, jak duha vzniká. Většinou ji vidáme v dešti, na který svítí slunce. Za duhu je zodpovědná ta část světla, která se uvnitř kapky jednou odrazí zevnitř o stěnu a poté kapku opustí (viz obrázek 11). Budeme-li zkoumat úhel ϑ , který svírá paprsek vcházející do kapky a paprsek z ní vycházející, zjistíme, že nemůže překročit určitou hodnotu (ϑ_m) závislou na indexu lomu. Z každé kapky tedy vychází kužel takovýchto paprsků, který má vrcholový úhel ϑ_m . K pozorovateli pak tyto paprsky přicházejí pouze od kapek, které se nacházejí uvnitř kužele o vrcholovém úhlu ϑ_m odvráceného od slunce. Intenzita přicházejících paprsků závisí na úhlu, ze kterého přicházejí. Jak se úhel blíží k ϑ_m , roste intenzita k nekonečnu. Graf na obrázku 12 schematicky znázorňuje tuto závislost. Hranice tohoto kužele je tedy velice jasná. Jelikož je voda (jako v podstatě každý materiál) prostředí opticky disperzní, závisí index lomu na vlnové délce. Čím je vlnová délka větší, tím je menší index lomu. Duha vzniká proto, že kužel, ze kterého přichází odražené modré světlo, je menší než kužel, ze kterého přichází červené světlo. Výrazná hranice je jinde pro každou barvu, a proto vidíme duhu.

Protože vnější barva duhy je červená (s nejmenším indexem lomu), můžeme usoudit, že čím menší je index lomu, tím větší je kužel. Pokud by přšel materiál

o jiném indexu lomu, byl by daný kužel a tedy úhlový poloměr duhy jiný. Pro vyšší index lomu by byla duha menší.

Vzorec pro ϑ_m není příliš složitý a nadšenci si jej mohou odvodit.

$$\vartheta_m = 4 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} - 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}},$$

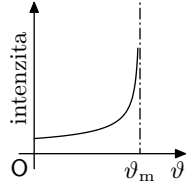
kde n je index lomu.

Pro vodu, která má index lomu 1,33, je $\vartheta_m \approx 42^\circ$. Šedesátiprocentní roztok kyseliny sírové má index lomu 1,41 a $\vartheta_m \approx 32^\circ$. Kdyby přšely kuličky běžného skla o indexu lomu 1,5, byla by duha téměř poloviční – $\vartheta_m \approx 23^\circ$.

Pro upřesnění dodejme, že vzorec výše udává úhel, ve kterém intenzita diverguje a tedy tam vzniká duha. Pro index lomu větší než 1,55 je kužel širší než ϑ_m a duha není na hranici.

Zajímavé je, že pro index lomu větší než 2 již maximum tohoto typu nenastává a duha nevzniká. Kdybychom tedy donutili diamant, aby se zformoval do kuliček a začal přšet, duhu bychom neviděli, protože diamant má index lomu 2,4.

V našem řešení se zabýváme pouze duhou prvního řádu, vznikající díky jednomu odrazu uvnitř kapky. Paprsky, které se uvnitř kapky odrazí vícekrát, dávají vzniknout duhám vyšších řádů, které jsou ale mnohem méně zřetelné. Pro zajímavost uvedeme, že duha druhého řádu (dva odrazy) vzniká pro materiály, jejichž index lomu je menší než 3, tedy i pro diamant.



Obr. 12:
Závislost
intenzity na úhlu
pozorování

Úloha II.2 ... zelený skřítek

Co uvidí člověk, když si stoupne na konec duhy?

Říká se, že poklad; ale už z podstaty věci si člověk na konec duhy stoupnout nemůže. Podrobně je mechanismus vzniku duhy popsán v řešení předchozí úlohy.

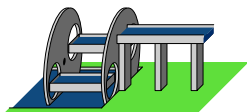
Duha je tedy optický úkaz v atmosféře, který většinou vzniká, když na déšť svítí slunce. Dejme tomu, že člověk stojí na vhodném místě a vidí duhu. Pokud vykročí k jejímu konci, už uvidí jinou duhu (pokud budou stále správné podmínky – slunce a déšť ve správném úhlu). Z principu vzniku duhy si na konec své duhy stoupnout nemůže.

Trochu jiná situace by byla, pokud bychom měli zahradní hadici s rozprašovacím nástavcem, svítlo slunce a my kolem sebe vytvořili „déšť“ – viděli bychom duhu, opět o poloměru 42° , se středem ve špičce našeho stínu. Pak bychom duhu viděli jako celou kružnici, takže bychom její konec ani určit nemohli.

Úloha II.3 ... výtah pro lodě

V jednom skotském městečku si postavili výtah pro lodě. Jde o dvě velké vany plné vody na koncích dlouhého ramena, které je uprostřed zavěšeno. Do vany najede

loď a pomocí motoru se začne s ramenem otáčet. Jaký výkon musí mít motor, aby takto loď zvedl?



Obr. 13: Lodní výťah

Hneď na začiatku si premyslíme, na čo sa použije výkon v motore. Trenie v ložiskách nebudeme nejako extra uvažovať, a teda práca, ktorú bude motor konať, bude čisto proti gravitačnej sile. Ak je ťažisko celého výťahu, zatiaľ bez lode, v nejakej vzdialenosti od osi otáčania, tak sa bude jeho výška meniť a bude treba konať prácu.

Je teda celkom prirodzené postaviť výťah tak, aby aspoň

v nezaťaženom stave bolo ťažisko presne na osi otáčania.

Teraz do komory vpláva plavidlo. Vráta sú pri tom samozrejme otvorené, a teda ostáva hĺbka vody v komore nemenná, len časť tejto vody vytlačí loď von. Vráta sa zavrú a motor ide zdvíhať rameno. Aby sme zistili, aký moment prekonáva, musíme vypočítať posun ťažiska celého výťahu od osi otáčania.

Nejakú masu vody nahradila loď. Potrebovali by sme zistiť hmotnosť tejto vody a polohu jej ťažiska. Stačí si spomenúť na Archimedov zákon v tom hovorenom tvare:

Vztlaková sila pôsobiaca na teleso ponorené v kvapaline je veľkosťou rovná tiaži vody s objemom rovným objemu ponorenej časti telesa.

My samozrejme vztlakovú silu pôsobiacu na teleso, teda loď, poznáme. Musí byť rovná gravitačnej sile, inak by nastalo zrýchlenie vo vertikálnom smere (a loď v záujme pasažierov ani nelieťa, ani sa nepotápa). Zistujeme, že tiaž vytlačenej vody je rovná tiaži lode, a teda sa rovnajú ich hmotnosti.

Pozrime sa teraz na ťažisko nádrže s vodou a loďou. Lahko si premyslíme, že výslednica vztlakovej sily pôsobí do ťažiska tej časti vody, ktorú loď vytlačila (táto vztlaková sila totiž závisí rovnako ako gravitačná len na hmotnosti daného kúsku, no a výslednica gravitačnej sily pôsobí do ťažiska). Taktiež vidíme, že táto výslednica vztlakovej sily pôsobí na rovnakej priamke ako tiaž. Inak by tieto dve sily mali nejaký moment a to by spôsobilo, na veľké nepohodlie pasažierov, otáčanie lode okolo horizontálnej osi.

Celú situáciu si teraz môžeme predstaviť ako súčet (superpozíciu) troch objektov. Komory plnej vody a bez lode, potom lode a nakoniec toho kusu vody, ktorý loď vytlačila, so zápornou hmotnosťou (čo je pekný a často používaný trik). Rozdiel od situácie, keď v komore chýba loď, je súčet lode a záporne vážiaceho kusu vody. Hmotnosť majú dohromady nulovú, všetko teda spolu váži rovnako, ako by tam loď nebola. Ťažisko sa však posunie, a to konkrétne trochu klesne (skúste si rozmyslieť prečo, súvisí to so stabilitou lode), ale len vo vertikálnom smere.

Ako sa posunie ťažisko celého výťahu? Ak sa pozrieme na jeho horizontálnu súradnicu, nič sa nezmení. Chýbajúci kus vody mal totiž pri pohľade zhora ťažisko na rovnakom mieste ako loď. Vo vertikálnom smere sa celkovo ťažisko teda trochu posunie, ale nič to. Gravitačná sila totiž bude pôsobiť na vertikále, ktorá prechádza osou otáčania, a jej moment bude nulový.

Môžeme teda bezpečne tvrdiť, že pri dobrom počiatočnom vyvážení výťahu motor nebude musieť prekonávať žiaden moment gravitačnej sily. Jediný výkon sa

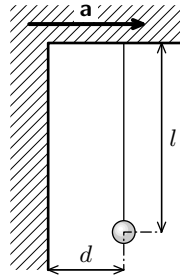
teda spotřebuje na uvedení systému do chodu a boju proti treniu v ložiskách. Koho by zaujímalo viac, celý systém existuje a volá sa *Falkirk Wheel*.

Úloha II.4 . . . kulička ve vlaku

Mějme svislou desku a ve vzdálenosti d od ní kuličku o hmotnosti m na závěsu délky l . V určitém okamžiku se celá soustava začne pohybovat se zrychlením a ve směru kolmém na desku. Určete podmínku pro velikost zrychlení, aby se kulička desky dotkla, a za jak dlouho k tomu dojde, víte-li, že vzdálenost d není větší než jedna pětina l .

Díky zrychlení začne v inerciální soustavě spojené s deskou působit na všechny objekty setrvačná síla. Protože bude mít zrychlení stále stejnou velikost, bude v této soustavě na kuličku působit homogenní silové pole silou

$$F = m\sqrt{a^2 + g^2}.$$



Obr. 14

Kulička se tedy bude chovat podobně, jako by byla v gravitačním poli s tíhovým zrychlením o velikosti $\sqrt{a^2 + g^2}$ a sklonu

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{g}\right)$$

vůči běžnému svislému směru v tíhovém poli Země. Kulička se tedy začne chovat jako kyvadlo, podobně jako v tíhovém poli Země, pouze s jinými parametry.

Díky tomu, že l je několikrát větší než d , můžeme kyvadlo považovat přibližně za matematické. V okamžiku rozjetí se vlaku bude ve své krajní výchylce. Podmínku pro minimální přípustné zrychlení a_{\min} , aby se kulička dotkla desky, získáme tehdy, když druhá krajní poloha bude právě na desce, tj.

$$\beta = 2\alpha_{\min},$$

kde β je úhel svíraný tíhovým zrychlením g a závěsem kuličky v okamžiku dotyku stěny. Dosazením získáme

$$\arcsin\left(\frac{d}{l}\right) = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{a_{\min}}{g}\right) \Rightarrow a_{\min} = g \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right).$$

Kulička se dotkne pro jakékoliv zrychlení a větší než a_{\min} mířící od desky směrem ke kuličce.

Počáteční úhlová výchylka kyvadla je α . Pokud hledaný čas t dosadíme do rovnice vyjadřující úhlovou výchylku kyvadla, získáme úhel vyjadřující, o kolik se odchýlí kyvadlo od své klidové polohy. Tomu odpovídá úhlová výchylka

$$\alpha - \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{g}\right) - \arcsin\left(\frac{d}{l}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{g}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{a^2 + g^2}{l}} T\right).$$

Odtud jen vyjádříme požadovaný čas

$$T = \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}} \arccos \left(1 - \frac{\arcsin(d/l)}{\arctg(a/g)} \right).$$

Úloha II.5 ... Mikulášovy kučery

Lidský vlas má u některých lidí tendenci zaujmout zakroucený tvar. Uvažujme vlas, který má v klidovém stavu dané parametry podobně jako stočená pružinka (poloměr, sklon, materiálové konstanty). Spočítejte, jak se vlas prodlouží, když ho nejprve položíme vodorovně na stůl a potom ho pověsíme svisle dolů. Uvažujte hodně stočený vlas, tj. s malým sklonem.

Protože, dle zadání, má lidský vlas parametry odpovídající pružince, budeme se dále zabývat pouze pružinkou. Naším úkolem je určit, o kolik se prodlouží pružinka vlastní vahou. Víme, že prodloužení pružinky je přímo úměrné jejímu zatížení (konstantu úměrnosti budeme standardně značit k). Abychom mohli vypočítat celkové prodloužení, tak pružinku rozdělíme na N kousků o klidové délce L/N , určíme prodloužení každého z nich a nakonec je všechny sečteme. Budeme předpokládat, že N je veliké.

Označme tuhost celé pružiny k , její délku L a její hmotnost M , pak každý z úseků má hmotnost M/N a k -tý úsek je napínán silou $F_i = Mg(1 - i/N)$, kde g je tíhové zrychlení. Nyní si rozmysleme, jaká je tuhost takového kousku pružiny. Odvodíme si nejprve vztah pro tuhost dvou pružin spojených „za sebou“. Platí

$$\begin{aligned} F_{12} &= F_1 = F_2, \\ \Delta x_{12} &= \Delta x_1 + \Delta x_2, \\ F_i &= k_i \Delta x_i \quad \text{pro } i \in \{1, 2, 12\}. \end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami dostáváme $k_{12}^{-1} = k_1^{-1} + k_2^{-1}$, což v našem případě znamená, že tuhost jednotlivých částí pružinky $k_i = kN$. Tato veličina je pro velká N velká, ale to je očekávaný výsledek, protože jednotlivá prodloužení jsou velmi malá.

Nyní již můžeme přistoupit ke spočítání celkového prodloužení. Platí

$$\Delta x = \sum_{i=1}^N \Delta x_i = \sum_{i=1}^N k_i^{-1} Mg(1 - i/N) = \frac{Mg}{kN} \sum_{i=1}^N (1 - i/N). \quad (6)$$

Sumu můžeme upravit následovně

$$\sum_{i=1}^N (1 - i/N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (N - i) = \frac{1}{N} \cdot \frac{N}{2} ((N - 1) + 0) = \frac{N - 1}{2},$$

kde jsme použili vztah pro součet aritmetické posloupnosti. Nyní již stačí pouze dosadit do vztahu (6) a uvážit, že N je veliké, tj. $N - 1 \approx N$ a pro celkové prodloužení dostáváme

$$\Delta x = \frac{Mg}{kN} \frac{N-1}{2} \approx \frac{Mg}{2k}.$$

Výše uvedený postup pouze obchází nutnost integrování prodloužení přes délku pružinky.

Úloha II.P . . . výtahová

Je možné, že se při pádu výtahu člověk před jistou smrtí zachrání dobře časovaným výskokem? Zjistěte, při jaké největší rychlosti pádu by to bylo možné (rychlost výtahu těsně před dopadem, při které již cestující zahynou si vyhledejte nebo odhadněte).

Při pádu ve výtahu se uplatní mnoho faktorů, které naše přežití ovlivňují. Například ve výtahu padajícím volným pádem budeme pocítovat stav beztíže a odrazit se bude obtížné. Ale na skutečný výtah zase bude působit minimálně odpor vzduchu pod ním a beztíž nebude tak markantní. Už jednoduchou úvahou je jasné, že abychom si pomohli za všech podmínek, musíme vyskočit těsně před koncem pádu tak, že naše celková rychlost bude nulová (když bereme v úvahu to, že naše hmotnost je srovnatelná s hmotností výtahu, musíme umět vyskočit ještě rychleji). To ale pro velké výšky není v lidských silách ani pro ustálenou rychlost pádu. Nechť tedy padáme z menší výšky, kdy aproximace volným pádem nebude vadit. Uvažme také, že se nám podaří odrazit stejně jako na zemi – když pak za těchto lepších podmínek dojdeme k negativnímu výsledku, máme jisté, že při horších tomu bude také tak.

Pokud si nejsme jisti, kde vyskočit, síla našeho odrazu není jediný parametr, který naše eventuální přežití ve výtahu ovlivňuje. Také musíme vzít v úvahu to, kolik prostoru ještě máme pod sebou. Vyšetřujeme tedy závislost konečné rychlosti dopadu člověka na výšce h , ze které výtah začal padat, a bezrozměrném parametru ϱ , který vyjadřuje poměr výšky h_1 , kdy dojde k výskoku, a už definovaného h . Nechť má výtah hmotnost M a my m .

Předpokládejme, že výtah se utrhl z klidu. Tíhovou silou začne být urychlován směrem dolů a v místě, kde bychom se rozhodli vyskočit, bude mít rychlost

$$v = -\sqrt{2g(h - h_1)} = -\sqrt{2gh(1 - \varrho)},$$

kteřou jsme nabrali i my jako pasažéři uvnitř. Mínus uvádíme proto, že jde o pohyb směrem dolů. V okamžiku průchodu výškou h_1 vyskočíme. Jak popíšeme tuto událost? Uvažme analogii s výskokem z klidu. Bez pomůcek tehdy vyskočíme nejvýše h_0 vysoko. Tedy naše svaly vykonaly práci rovnou potenciální energii v této výšce ($E = mgh_0$). Když teď budeme okamžik výskoku popisovat pomocí zákona zachování energie, můžeme ji přičíst k počáteční kinetické energii. Když k tomu přidáme zákon zachování hybnosti, umíme vyjádřit rychlost člověka ve výtahu po

výskoku (v_c). Vyjdeme tedy z

$$(m + M)v = mv_c + Mv_v \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}(m + M)v^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}Mv_v^2.$$

Z první rovnice (ZZH) si nejdřív vyjádříme v_v (rychlost výtahu po výskoku) a dosadíme do zákona zachování energie. Po úpravách nám vyjde, že

$$v_c = v + \sqrt{\frac{2gh_0M}{m + M}} = \sqrt{2g} \left(\sqrt{\frac{Mh_0}{M + m}} - \sqrt{h - h_1} \right).$$

Ze dvou kořenů kvadratické rovnice jsme si vybrali ten, který odpovídá výskoku směrem nahoru. Druhý popisuje odraz dolů, který v této situaci nemá valného smyslu.

Tedž už zbývá jen vypočítat, jakou rychlost budeme mít při dopadu na zem. Uvažujme, že jsme se při výskoku do výtahu stále vešli a dál padáme volným pádem. Už jde v principu jen o svislý vrh vzhůru (nebo dolů, podle toho, jak moc jsme se odrazili). Proto konečná rychlost v_d bude

$$v_d = v_c - gt,$$

kde t je doba, po kterou budeme padat. Tu zjistíme tak, že budeme zkoumat y -ovou souřadnici pohybu. Začínáme z výšky h_1 a padáme do $y = 0$:

$$0 = h_1 + v_c t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Z řešení této rovnice si vybereme kladný kořen, tj. $t = \frac{v_c + \sqrt{v_c^2 + 2gh_1}}{g}$, a po dosazení do rovnice pro rychlost zjišťujeme, že výsledek je

$$v_d = -\sqrt{v_c^2 + 2gh_1} = -\sqrt{2g} \sqrt{\varrho h + \left(\sqrt{\frac{Mh_0}{M + m}} - \sqrt{h(1 - \varrho)} \right)^2},$$

přičemž jsme vztah mezi h a h_1 vyjádřili pomocí ϱ .

Z výsledku vidíme, že nejmenší rychlost, kterou můžeme na zem dopadnout, je taková, kterou bychom nabrali při pádu z výšky výskoku. Docházíme k závěru, že nejvhodnější výška pro výskok je 0 m pro libovolné počáteční h . Pokud bychom totiž vyskočili příliš brzo, dáváme volnému pádu možnost srovnat rozdíl rychlostí po poměrně dlouhou dobu. U malých h si tím dokonce pohoršíme, protože dohromady vyskočíme ještě výše, než odkud jsme začali padat. Nejvíce bychom si pomohli, kdyby výtah padal z výšky přibližně h_0 (přesně h_0 by to bylo, kdybychom nic nevážili). Pro $h > h_0$ se bude rozdíl mezi rychlostí dopadu blížit rychlosti výskoku. Když uvážíme, že člověk by mohl přežít pád ze třetího podlaží a že vyskočí asi do 60 cm, efektivně by si přidal necelé patro navíc. Pád z takto malých výšek navíc proběhne tak rychle, že by si padající ani nestihl uvědomit, že padá. Skákat ve výtahu tedy nemá smysl, lepší je zaujmout nějakou vhodnou polohu.

Úloha III.1 ... Wattův regulátor

Mějme dvě těžké kuličky. Každá z nich je připojena tyčkou do kloubu (z opačných stran). Obě koule se mohou vychylovat pouze v jedné svislé rovině. Celou soustavou začneme otáčet okolo svislé osy procházející kloubkem. Jak závisí odchylna tyček na úhlové rychlosti?

Úlohu nejsnadněji vyřešíme v neinerciální vztažné soustavě rotující společně s regulátorem. Na kuličku působí celkem tři síly – tíhová \mathbf{F}_G , odstředivá \mathbf{F}_O a reakce tyčky \mathbf{F}_T . Pokusme se najít podmínku, kdy budou síly vyrovnané (obrázek 15). Z jednoduché trigonometrie máme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{|\mathbf{F}_O|}{|\mathbf{F}_G|} = \frac{\omega^2 l \sin \alpha}{g},$$

kde g je tíhové zrychlení a l délka tyčky od kloubu ke kuličce.

Nyní už je vidět první řešení $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, označme jej „povislé“. Dále uvažujeme jen $\sin \alpha \neq 0$ a můžeme jím tedy dělit. Úpravou rovnice získáme vztah pro α .

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\omega^2 l}{g} \Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{g}{\omega^2 l} \right). \quad (7)$$

Nezapomeňme, že poslední úpravu můžeme udělat jen s předpokladem

$$\omega^2 l \geq g \quad (8)$$

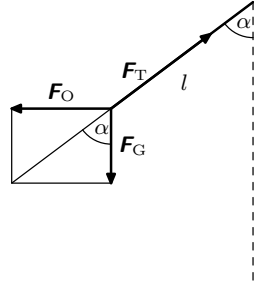
kvůli definičnímu oboru funkce \arccos .

Jak výsledky fyzikálně interpretovat? Povislé řešení je za obvyklých okolností (8) labilní a stabilní výchylka kuliček závisí na rychlosti ω podle (7). Pokud však (8) neplatí, výchylka kuliček pak na rychlosti ω nezávisí ($\alpha = 0$) a regulátor nefunguje.

Úloha III.2 ... projížďka po řece

Představme si řeku přehrazenou hrází. Aby mohly lodě překonávat celý splavný vodní tok, jsou v rámci hráze umístěna zdymadla. Uvažujte, že na řece, která má průtok $Q = 200 \text{ m}^3/\text{s}$, je umístěné zdymadlo, které funguje mezi dvěma vodními hladinami před a za hrází s výškovým rozdílem $H = 4 \text{ m}$ a má rozměry $s = 100 \text{ m}$ a $d = 20 \text{ m}$. Kolik lodí denně může zdymadlo přepravit z nižší nádrže do vyšší (pokud je bere vždy po jedné), pokud maximální průtok vody do a ze zdymadla je $Q_Z = 250 \text{ m}^3/\text{s}$?

Popišme nejdříve, jak jeden takový cyklus přepravy pomocí plavební komory probíhá. V počátečním stavu jsou vrata mezi plavební komorou a dolní nádrží otevřená, hladina vody v komoře je tedy stejně vysoko jako v dolní nádrži. Do



Obr. 15

komory vpluje loď (v našem případě pouze jedna) a vodotěsná vrata se za ní zavřou. V tomto stavu je vodní hladina v komoře nezávislá na výšce vodní hladiny před a za ní. Loď se přiváže ke zdi komory, aby nebyla unášena proudem vody. Dále obsluha otevře průtok mezi komorou a horní nádrží. Komora a horní nádrž se budou chovat jako dvě spojené nádoby, výška jejich hladin se tedy vyrovná (budeme uvažovat, že výšky hladin v obou nádržích jsou konstantní, tedy pouze se mění výška hladiny v komoře). Jakmile jsou hladiny vyrovnané, mohou se otevřít horní vrata komory, loď se odváže a může odplout. Nyní může do komory připlout loď z horní nádrže, což se ale v našem případě neděje. Horní vrata se opět uzavřou, uzavře se i průtok mezi horní nádrží a komorou a naopak se otevře průtok mezi komorou a dolní nádrží. Jakožto ve dvou spojených nádobách, i zde se výšky hladin opět vyrovnají. Nakonec dojde k otevření dolních vrat, uzavření průtoku mezi komorou a dolní nádrží a cyklus se může opakovat.

Jestliže je mezi hladinami výškový rozdíl H a rozměry nádrže jsou s a d , pak je potřeba pro zvýšení hladiny v komoře z dolní hodnoty na horní napustit do nádrže objem $V = Hsd$. Stejný objem je poté třeba při snižování hladiny vypustit. Je-li maximální průtok vody do a ze zdymadla Q_Z , pak se komora napustí (vypustí) za čas

$$t_n = \frac{V}{Q_Z} = \frac{Hsd}{Q_Z}.$$

Průtok řeky v tomto případě není limitující, při napouštění komory vodou z horní části řeky je vždy průtok Q_Z . Jelikož však do blízkosti zdymadla přitéká méně vody, hladina v tomto místě mírně poklesne oproti normálu. Výška hladiny v komoře se pak vyrovná s touto mírně pokleslou hladinou a zpátky do normálního stavu vyšší hladiny se obě tyto hladiny dostanou za chvíli po ukončení napouštění komory.

Během jednoho cyklu se tedy napouštěním a vypouštěním komory spotřebuje doba $2t_n = 64$ s. K tomuto času je navíc třeba přičíst dobu, kterou trvá otevírání a zavírání vrat, vplouvání a odplování lodi, její uvazování a obsluha celého zařízení. Tato doba není zadaná, můžeme ji tedy pouze odhadovat. Jestliže odhadneme celou dobu jednoho cyklu na dvě minuty, pak za den (24 hodin) může zdymadlo přepravit 720 lodí.

Úloha III.3 ... train à grande vitesse

Trat' má poloměr oblouku R , vlak má těžiště ve výšce H nad kolejemi s rozchodem D . Jakou maximální rychlostí může po takovéto trati jet vlak, pokud požadujeme, aby se mohl kdykoli zastavit, aniž by spadl na bok? Za jakých podmínek je maximální rychlost neomezená?

Poznámka Zanedbejte síly působící mezi jednotlivými vagony a šířku vagonu vzhledem k poloměru oblouku.

Jak všichni víme, tratě a silnice mívají klopené zatáčky. Maximální klopení zatáčky určíme jednoduše z podmínky stability při zastavení vlaku. Pokud vlak stojí, tak musí tíhová síla směřovat mezi kolejnice, viz obrázek 16 (v opačném případě by došlo k převrácení a to nechceme). Proto pro úhel sklonu trati vůči vodorovně

rovině platí

$$\alpha \leq \alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{D}{2H}. \quad (9)$$

Dále budeme uvažovat hodnotu α_{\max} , protože tato umožňuje nejvyšší maximální rychlost.

Nyní musíme vyšetřit, kam bude působit výsledná (tíhová a odstředivá) síla, pokud bude vlak projíždět zatáčku o poloměru R rychlostí v . Podrobnější rozkreslení sil a použitých veličin je na obrázku 17.

Z tohoto obrázku je vidět, že maximální velikost odstředivé síly je

$$F_o \leq F_G \operatorname{tg} 2\alpha \leq F_G \operatorname{tg} 2\alpha_{\max}.$$

Nyní použijeme vzorec pro tangens dvojnásobného úhlu¹ $\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha / (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$. Proto platí

$$F_o \leq F_G \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_{\max}}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_{\max}}.$$

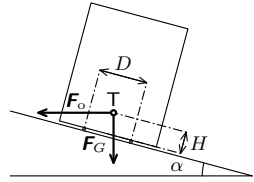
Nyní dosadíme ze vztahu (9), $F_o = Mv^2/R$ a $F_G = Mg$, kde M je hmotnost vagonu.

$$\frac{Mv^2}{R} \leq Mg \frac{D/H}{1 - \frac{1}{4}(D/H)^2},$$

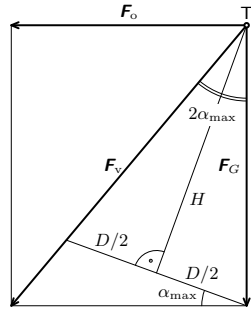
$$v \leq \sqrt{4gR \frac{DH}{4H^2 - D^2}}.$$

Vidíme, že pokud není splněna podmínka $D < 2H$, nebude takto vypočtená rychlost existovat. Zamyslíme-li se podrobněji, zjistíme, že tento výsledek odpovídá případu, kdy i nekonečná odstředivá síla nezpůsobí převrnutí vlaku. Tedy pokud platí $2H < D$, tak pro sklon kolejí $\alpha' = \operatorname{arctg}(D/2H) > 45^\circ$ může vlak projíždět zatáčku libovolnou rychlostí.

Ještě osvětleme, proč byla v zadání poznámka o zanedbání sil mezi vagony a rozměrů vagonu oproti poloměru oblouku. Důvod pro první poznámku je zřejmý – můžeme dosti těžko určit, jakým způsobem na sebe vzájemně působí vagony. Druhá poznámka souvisí s tím, že na vnitřní stranu vlaku působí kvůli menšímu poloměru zatáčení menší dostředivá síla než na vnější stranu a takto můžeme uvažovat pouze jednu působící odstředivou sílu v těžišti.



Obr. 16: Nákres sil působících na vlak v zatáčce



Obr. 17: K diskusi stability v zatáčce

¹Můžeme si jej odvodit ze součtových vzorců pro sinus a cosinus $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ vzájemným vydělením a rozšířením zlomku výrazem $1/\cos^2 \alpha$.

Úloha III.4 . . . těžký úděl

Při řezání stromů musí zahradník počítat s leccakými problémy. Uvažujme větev připojenou k nepružnému lanu (tj. tuhost roste nade všechny meze) přes kladku. Dole stojí dva brigádníci, kteří jistí větev, aby nespadla do bazénu. Větev spadne volným pádem z výšky h , než se provaz napne. Za určitých okolností brigádníci držící druhý konec lana vyjedou tak vysoko, že narazí do kladky. Stanovte podmínky, za jakých bude řezání bezpečné.

Nápověda Uvažujte nejprve chování dvou hmotností na ledě, které jsou spojeny nepružným lanem a mají různé rychlosti.

Rychlost větve v momentě, kdy se lano napne, je $v_0 = \sqrt{2hg}$.

V momentě napnutí se musí vyrovnat rychlosti větve a brigádníků. Jak naznačuje nápověda, jde o zachování hybnosti a nikoliv energie. Tedy brigádníci získají směrem nahoru rychlost $v_1 = m_v v_0 / (m_b + m_v)$, kde m_v a m_b označují hmotnosti větve a brigádníků.

Dále předpokládejme, že větev je lehčí než brigádníci (zajišťovat těžší větev by bylo hloupé). Brigádníci mají tedy směrem dolů zrychlení (je to i zrychlení větve směrem nahoru)

$$a = g \frac{m_b - m_v}{m_b + m_v}.$$

Nechť H_v je výška větve nad zemí, když se napne lano, a H_b je vzdálenost brigádníků od kladky.

Nejprve předpokládejme $H_v > H_b$ (větev je nad hlubokým bazénem), a tak nehrozí, že větev spadne na zem dřív, než si brigádníci „rozbijí držky“ nebo než se jejich výstup zastaví. Čas, který potřebují do zastavení, je $t = v_1/a$. Za tento čas se dostanou do výšky

$$v_1 t - \frac{at^2}{2} = \frac{m_v^2 h}{m_b^2 - m_v^2}$$

a musí platit

$$H_b > \frac{m_v^2 h}{m_b^2 - m_v^2},$$

aby brigádníci nenarazili do kladky.

Za předpokladu $H_b \geq H_v$ může větev narazit do země ještě během výstupu brigádníků a to, když platí

$$H_v < \frac{m_v^2 h}{m_b^2 - m_v^2}.$$

Za takového předpokladu je čas do nárazu větve

$$t_n = \frac{v_1 - \sqrt{v_1^2 - 2aH_v}}{a}.$$

Rychlost brigádníků je pak $v_2 = v_1 - at_n = \sqrt{v_1^2 - 2aH_v}$ a jejich vzdálenost od kladky $H_b - H_v$. Jejich zrychlení je teď g . Analogicky, aby nenarazili, musí platit

$$H_b - H_v > \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2 - 2aH_v}{2g} = \frac{m_v^2 h}{(m_b + m_v)^2} - H_v \frac{m_b - m_v}{m_b + m_v}.$$

V případě, že $m_v > m_b$, platí tytéž vzorce. Tak však pro a dostaneme záporné číslo, a proto v případě $H_v > H_b$ brigádníci určité narazí.

Úloha III.5 ... zemní roviny

Mějme dvě nekonečně velké vodivé roviny, které jsou obě uzemněné a vzdálené od sebe l . Mezi nimi je umístěn bodový náboj velikosti q ve vzdálenosti x od horní roviny. Určete náboj indukovaný na spodní rovině.

Úlohu vyřešíme pomocí dvou mocných nástrojů elektrostatiky, Gaussova zákona a superpozice. Začneme však pekným trikem, který je klíčem ku celému řešení. Představme si myšlenou rovinu rovnoběžnou s oboma vodivými rovinami tak, aby v nej ležal náboj q . Ak sa v situácii zo zadania naindukujú na spodnej rovine celkovo náboj Q , tak z princípu superpozície vieme, že pri pridaní druhého náboja na myšlenú rovinu sa naindukujú znova taký istý náboj, teda spolu $2Q$.

Teraz pridáme na túto rovinu N nábojov, pričom N je veľmi veľa. Dokonca tak veľa, že sa z nej stane celkom homogénne nabitá rovina s plošnou hustotou náboja rovnou

$$\sigma = q \frac{N}{S},$$

pričom N aj S rastú nad všetky medze.

Keďže je plošná hustota takmer konštantná, môžeme situáciu považovať za symetrickú voči posunutiu v rovine, a elektrické pole za homogénne (pretože siločiaru nemajú kam, zo symetrie, ujsť).

Situácia sa teraz veľmi zjednodušila. Máme tri nekonečné roviny, pričom jedna je rovnomerne nabitá. Označme hornú rovinu 1 a dolnú rovinu 2 a ku nim prislúchajúcej indukované plošné hustoty σ_1 a σ_2 .

Malo by byť jasné, aké pole je vonku z týchto dvoch rovín, v priestore naokolo. Roviny sú uzemnené, čo znamená, že pri prenášaní náboja z ich povrchu do nekonečna sa nevykoná žiadna práca. Ak by teda bolo mimo týchto rovín nejaké pole, tak by sme pri pohybe náboja od nich konali prácu. Mimo rovín je teda pole nulové, a nenulová elektrická intenzita sa nachádza len medzi týmito rovinami.

Taktiež vieme, že na oboch rovinách je rovnaký potenciál. Ak označíme intenzity medzi doskami číslami prislúchajúcimi ich rovinám, kladný smer od strednej dosky, tak pri posúvaní náboja z tejto dosky na rovinu 1 pole vykoná prácu

$$W = xE_1.$$

Rovnakú prácu ale musí pole vykonať aj pri prechode na druhú rovinu, nakoľko na nich je rovnaký potenciál, a to potenciál zeme

$$xE_1 = (l-x)E_2 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{l-x}{x} E_2.$$

Teraz už len použijeme Gaussov zákon. Ako plochu uvažujeme valec s obsahom podstavy S , ktorá bude vždy rovnobežná s rovinami. Jeho stenami žiaden tok

netečie, intenzita je s nimi vždy rovnobežná (kolmá na normálu). Pre valec, ktorý pretína len strednú rovinu, platí

$$E_1 S + E_2 S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

$$E_2 = \frac{l\sigma}{x\varepsilon_0}.$$

A pre valec prechádzajúci len spodnou rovinou platí

$$-E_2 S = \frac{\sigma_2 S}{\varepsilon_0}.$$

Pri pridaní N nábojov je na spodnej rovine celkový náboj NQ , a voči plošnej hustote je vo vzťahu

$$\sigma_2 = Q \frac{N}{S} = \frac{Q}{q} \sigma \quad \Rightarrow \quad Q = q \frac{\sigma_2}{\sigma}.$$

Plošnú hustotu σ_2 ale už vyjadrenú máme

$$\frac{l\sigma}{x\varepsilon_0} = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0},$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma} = -\frac{l}{x}.$$

Takže po dosadení dostávame

$$Q = -\frac{l}{x}q.$$

Úloha III.P . . . zkróťte Gaiu

Navrhňte spôsob, jak přeměnit rotační energii Země na elektrickou energii. Fantazii se meze nekladou, konstruktéři jsou schopní a postaví všechno.

Jeden ze způsobů těžení rotační energie Země člověk používá již téměř sto let. Mluvíme o vodních přílivových elektrárnách. Příliv je vždy stejně orientovaný vůči Měsíci. Jelikož se Země otáčí rychleji, příliv se vůči ní pohybuje. Ve skutečnosti ho Země trochu odnáší s sebou: vrchol přílivu předbíhá Měsíc o zhruba 3° . Tím, jak unáší příliv, se Země zpomaluje. Přílivové elektrárny pak získávají energii z toho, že ho v daném místě ještě více posunou.

Podívejme se ještě na další, poněkud fantastičtější způsob. Ukotvíme velmi pevné a dlouhé lano k Měsíci. Na jeho druhý konec připevníme vlak, který pojede po kolejičkách tvaru kružnice se středem v ose rotace Země. Takto ukotvený vlak by stál vůči Měsíci a Země by se pod ním protáčela. Na kola vlaku by pak byly připojené generátory, které by vyráběly elektřinu. Pro zvýšení přenášené síly by se mohlo jednat o zubačku. Pravděpodobně by nebylo nejlepší umístit železnici na rovník, kde by byla rychlost vlaku největší. Rychlost vlaku (a tažného lana) by

zde byla 460 m/s, což přesahuje rychlost zvuku a odpor vzduchu by dělal pořádnou neplechu. Nehledě na to, že by se železnice špatně stavěla přes oceán. Kdybychom chtěli, aby měl vlak rychlost přijemných 10 m/s, museli bychom postavit železnici ve tvaru kružnice o poloměru 140 km se středem na pólu. K tomu by se výborně hodila Antarktida. Problémem by pak už bylo ukotvení v ledu, časté sněžení a především výstřednost dráhy Měsíce (museli bychom použít dostatečně pružné lano). Výkon takové elektrárny by závisel na vlastnostech použitých materiálů. Když nebudeme uvažovat nad vlastnostmi lana, které si netroufáme odhadovat, samotný vlak by byl určitě schopen dodávat pár gigawattů (velmi hrubý odhad).

Zákon zachování momentu hybnosti nám bohužel nedovoluje těžit rotační energii Země, aniž bychom měnili její tvar či hmotnost. Další možností tedy je postavit vysoký výtah do vesmíru a posílat po něm závaží nahoru. Pro dostatečně vysoký výtah by byla práce vykonaná odstředivou silou větší než energie potřebná k překonání gravitačního potenciálu. Dále uvažujeme výtah se základnou na rovníku. Spočítejme, jaká by byla minimální výška výtahu, aby získaná energie byla kladná. Integrál

$$\int_{R_0}^{R_1} \left(m r \omega^2 - \frac{GMm}{r^2} \right) dr = m \left(\frac{1}{2} \omega^2 (R_1^2 - R_0^2) - GM \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) \right),$$

kde R_0 je poloměr Země, R_1 je vzdálenost konce výtahu od středu Země, ω je úhlová rychlost Země, G je gravitační konstanta a M je hmotnost Země, udává, jakou práci vykoná těleso o hmotnosti m při cestě ze Země na horní konec. Položíme-li tento výraz rovný nule a vyřešíme-li pro R_1 , získáme minimální výšku výtahu. Ta vychází přibližně $1,5 \cdot 10^8$ m.

Pro získání co největší možné energie bychom chtěli co nejvyšší výtah. Bohužel v okolí $3,8 \cdot 10^8$ m se pohybuje Měsíc, který by nám výtah mohl bořit. Pro $R_1 = 3 \cdot 10^8$ m by jedno závaží o hmotnosti $m = 1$ kg vyrobilo energii 178 MJ. Pro výkon 1 GW bychom nahoru museli posílat 5,6 kg hmoty za sekundu. V tomto směru by bylo asi nejjednodušší využít vodu, které je v okolí rovníku dostatek. Po dosažení horního konce bychom tam hmotu mohli skladovat, to by nám ale příliš napínalo náš výtah. Proto bychom ji jednoduše vypustili a ona by opustila gravitační pole Země, nebo skončila na Měsíci.

Úloha IV.1 ... schody z Chrudimi

Eskalátory v metru na náměstí Míru mají n schodů a pohybují se rychlostí v . Spočítejte, kolik schodů ve skutečnosti vyšlapete, pokud po nich jdete rychlostí v_1 : a) po směru jízdy, b) proti směru jízdy. Při pohybu proti směru uvažujte, že $v_1 > v$.

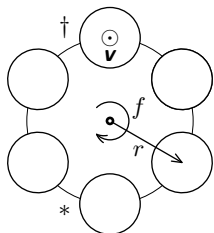
Označme d délku jednoho schodu a $V = v/d$ rychlost eskalátorů ve schodech za sekundu. Podobně označme $V_1 = v_1/d$. Pokud se pohybujeme po směru jízdy, je naše výsledná rychlost vůči vnějšímu pozorovateli rovna $V_a = V_1 + V$, pohybujeme-li se proti směru, je $V_b = V_1 - V$. Čas, za který pak projdeme n schodů, je

$$t_a = \frac{n}{V_1 + V}, \quad \text{resp.} \quad t_b = \frac{n}{V_1 - V}.$$

Kolik ujdeme schodů je pak dáno součinem tohoto času a naší rychlosti vzhledem k schodům, tedy

$$N_a = V_1 \frac{n}{V_1 + V} = n \frac{v_1}{v_1 + v}, \quad \text{resp.} \quad N_b = V_1 \frac{n}{V_1 - V} = n \frac{v_1}{v_1 - v}.$$

Úloha IV.2 ... Gatling



Obr. 18: Gatling
zepředu, * nabíjení,
† výstřel

Stroj byl původně navržen pro distribuci semen do země, ale ukázal se jako mnohem užitečnější pro distribuci oliva do nepřátel (rotační kulomet). Spočítejte, kde vzhledem k hlavní Gatlingu hrozí nebezpečí zasažení kulkou. Ráže je d , počet hlavní n , vzdálenost osy hlavně od osy hřídele je r , otáčky všech hlavní jsou f , kadence výstřelů je F a ústová rychlost střel v .

Podívejme se, jakým směrem se pohybuje kulka těsně po opuštění hlavně. Směrem vpřed se pohybuje rychlostí v , ale zároveň se pohybuje malou rychlostí do strany, protože hlavně, ze které vyletěla, se otáčela. Ve vodorovném směru tedy bude mít obvodovou rychlost hlavně a vyletí ve směru odchýleném o úhel α od osy hlavně.

Obvodová rychlost hlavně je $v_o = 2\pi r f$, kde f jsou otáčky hlavní za sekundu. Abychom dostali výsledek ve snáze zjištělných veličinách, dosadíme $F = n f$, kde F jsou výstřely za sekundu. Pro odchylku od osy dostáváme $\text{tg } \alpha =$

$= v_o/v$, tedy

$$\alpha = \text{arctg} \frac{2\pi r F}{nv}.$$

Pro představu dosadíme přibližné hodnoty reálného Gatlingu: $F = 300 \text{ min}^{-1} = 5 \text{ s}^{-1}$, $r = 6 \text{ cm}$, $n = 6$, $v = 180 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Získáme $\alpha \approx 0,1^\circ$, což na vzdálenosti sta metrů činí odchylku pouhých 17,5 cm. Vzhledem k tomu, že Gatling byl spíše používán stylem „namířme to tam, kde je jich nejvíc“, nikoho to asi příliš netrápilo.

Mimo odchylky do strany je zde i vliv gravitace, která kulku urychluje směrem dolů. Budeme-li dostatečně daleko, stroj na nás nedostřelí.

Úloha IV.3 ... kámen letí

Hodíme kulatý kámen o hmotnosti m z výšky h nad hladinou do rybníka o hloubce d . Přibližně za jak dlouho spadne na dno (od okamžiku puštění)? Jak se výsledek změní, když kámen nebude kulatý, ale placatý?

Na kámen působí během pádu tíhová síla $F_G = mg$, vztlaková síla $F_{vz} = V \rho g$ a odporová síla $F_o = C_x \rho S v^2 / 2$, kde g je tíhové zrychlení, ρ hustota prostředí, ve kterém se kámen pohybuje, C_x součinitel odporu závisející na tvaru kamene a m , V , S a v po řadě hmotnost, objem, průřez a rychlost kamene.

Nejprve zkusíme výsledek odhadnout – víme, že když bude kámen padat, tak se rychle dostane na rychlost, při které bude výslednice na něj působících sil nulová. Budeme tedy mít rovnici $F_G - F_{vz} - F_o = 0$, odkud po dosazení můžeme spočítat mezní rychlost jako

$$v_m = \sqrt{\frac{2g(m - V\rho)}{C_x S \rho}}.$$

Pro orientaci, dosadíme-li hodnoty veličin $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\rho_{vz} = 1,29 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_{vo} = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a odhadneme-li $h = 10 \text{ m}$, $d = 10 \text{ m}$, $m = 0,1 \text{ kg}$, $S = 20 \text{ cm}^2$, $V = 65 \text{ cm}^3$ a $C_x = 0,5$ pro kulatý kámen, tak mezní rychlost ve vzduchu je $v_{mvz} = 40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a ve vodě $v_{mvo} = 0,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Hustota vzduchu je tak malá, že tíhová síla je mnohem větší než vztlaková a odporová. Kamenu bude kvůli tomu trvat docela dlouho, než dosáhne mezní rychlosti – proto pro rozumné výšky je vhodné pád aproximovat jako volný pád v neodporujícím prostředí – čas se potom spočítá jako $t_{vz} = \sqrt{2h/g}$.

Naopak hustota vody je řádově větší než vzduchu a rychlost kamenu se dostane na konstantní velikost poměrně rychle – můžeme tedy čas odhadnout jako

$$t_{vo} = d\sqrt{\frac{C_x S \rho}{2g(m - V\rho)}}.$$

Zanedbáme-li okamžiky, kdy kámen zrychluje a ponořuje se do vody, můžeme celkový čas odhadnout jako

$$t_{odh} = t_{vz} + t_{vo} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + d\sqrt{\frac{C_x S \rho_{vo}}{2mg - 2V\rho_{vo}g}}.$$

Dosadíme-li výše uvedené hodnoty, dostaneme $t_{odh} = 13,4 \text{ s}$.

Nyní zkusme uvažovat přesněji. Pohybovou rovnici již máme téměř vyjádřenu, napíšeme ji ve tvaru

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2} C_x \rho S v^2 - V \rho g.$$

Označíme-li $B \stackrel{\text{def}}{=} g - V \rho g / m$ a $A \stackrel{\text{def}}{=} C_x \rho S / (2m)$, pak ji můžeme napsat po separaci proměnných

$$\frac{dv}{B - Av^2} = dt$$

a následně vyřešit integrací s použitím rozkladu na parciální zlomky (pro jednoduchost zápisu označme $\sqrt{B/A} = v_m$ jako mezní rychlost)

$$\frac{1}{2\sqrt{AB}} \ln \frac{v_m + v}{v_m - v} = t$$

$$v = v_m \frac{e^{2t\sqrt{AB}} - 1}{e^{2t\sqrt{AB}} + 1}.$$

Další integrací odvodíme rovnici pro výpočet dráhy

$$s = \int_0^t v dt = \frac{v_m}{\sqrt{AB}} \ln \frac{e^{t\sqrt{AB}} + e^{-t\sqrt{AB}}}{2}.$$

Pro velké časy můžeme z poslední rovnice vyjádřit čas jako

$$t = \frac{As + \ln 2}{\sqrt{AB}}.$$

Upravíme-li, máme

$$t_{\text{vyp}} = \sqrt{2m} \left(\frac{\frac{hC_x \rho_{\text{vz}} S}{2m} + \ln 2}{\sqrt{C_x \rho_{\text{vz}} S g(1 - V_{\rho_{\text{vz}}}/m)}} + \frac{\frac{dC_x \rho_{\text{vo}} S}{2m} + \ln 2}{\sqrt{C_x \rho_{\text{vo}} S g(1 - V_{\rho_{\text{vo}}}/m)}} \right).$$

Po dosazení dostaneme $t_{\text{vyp}} = 15,1$ s.

Nebude-li kámen kulatý, ale placatý, změni se jeho součinitel odporu – C_x pak bude 1,2 a časy $t_{\text{odh}} = 19,9$ s a vypočtený $t_{\text{vyp}} = 20,8$ s, tedy bude padat déle.

Zájemci si mohou vykreslit graf závislosti rychlosti na čase, aby viděli, jak moc rychle se rychlost blíží mezní rychlosti.

Stokes vs. Newton Mnoho řešitelů počítalo se Stokesovou odporovou silou $F = 6\pi\eta r v$, kde η je kinematická viskozita a r je poloměr kamene. Tento vzorec platí, když obtékání kamene v tekutině je laminární, ne turbulentní. Pro rozlišení typu proudění se používá Reynoldsovo číslo definované jako $\text{Re} \stackrel{\text{def}}{=} vr/\eta$. Hranice mezi turbulentním a laminárním prouděním se pohybuje v intervalu 2000–4000 (je-li Re větší, je proudění turbulentní). Zkusíme-li Re vyčíslit (jako rychlost bereme ustálenou), dostaneme hodnoty řádově 10^6 , takže počítat musíme s odporem Newtonovým, který závisí na druhé mocnině rychlosti.

Úloha IV.4 ... Stavinoha

Model rakety má motůrek, jenž dává konstantní tah, dokud má palivo o počáteční hmotnosti m_p . Prázdná raketa váží m_0 a motor palivo spaluje lineárně s časem. Do jaké výšky může raketa vyletět, letí-li v homogenním gravitačním poli a zanedbáme-li odpor vzduchu?

Hledáme-li maximální výšku, určitě poletí raketa svisle vzhůru. Řešíme tedy jednorozměrný pohyb, který se skládá z části, kdy raketu pohání motor, a z vrhu vzhůru, kdy raketa letí setrvačností.

Označme T tahovou sílu motorku a I impuls síly, na nějž stačí palivo v něm. Dokud motor spaluje, hmotnost rakety se bude měnit lineárně s časem podle

$$m = m_0 + m_p \frac{I - tT}{I}.$$

Z druhého Newtonova zákona vyjádříme okamžité zrychlení

$$a(t) = \frac{TI}{Im_r - m_p Tt} - g. \quad (10)$$

Aby se raketa alespoň ke konci vznesla, musí platit $T > m_0 g$. Časovou závislost rychlosti i výšky dostaneme, když vztah (10) dvakrát zintegrujeme. Integrační konstanty volíme tak, aby platilo $v(0) = 0$ m/s, $y(0) = 0$ m.

Při integrování použijeme lineární substituci a získáme vztahy

$$v(t) = \frac{I}{m_p} (\ln(Im_r) - \ln(Im_r - Tm_p t)) - gt,$$

$$y(t) = \frac{I}{m_p} \left(t \ln(Im_r) + \frac{1}{Tm_p} \left(Im_r \ln \left(\frac{Im_r - m_p Tt}{Im_r} \right) - m_p Tt (\ln(Im_r - m_p Tt) - 1) \right) \right) - \frac{1}{2} gt^2,$$

kde $m_r = m_0 + m_p$ značí vzletovou hmotnost rakety. Zajímají nás tyto hodnoty v čase I/T , kdy motor zhasne

$$v(I/T) = v_k = \frac{I}{m_p} \ln \frac{m_r}{m_0} - g \frac{I}{T},$$

$$y(I/T) = y_k = \frac{I^2}{m_p^2 T} \left(m_p + m_0 \ln \frac{m_0}{m_r} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{I}{T} \right)^2.$$

Výšku nastoupanou setrvačností vypočítáme ze zákona zachování energie, celkem tedy raketa vystoupá do výšky $y_k + v_k^2/(2g)$.

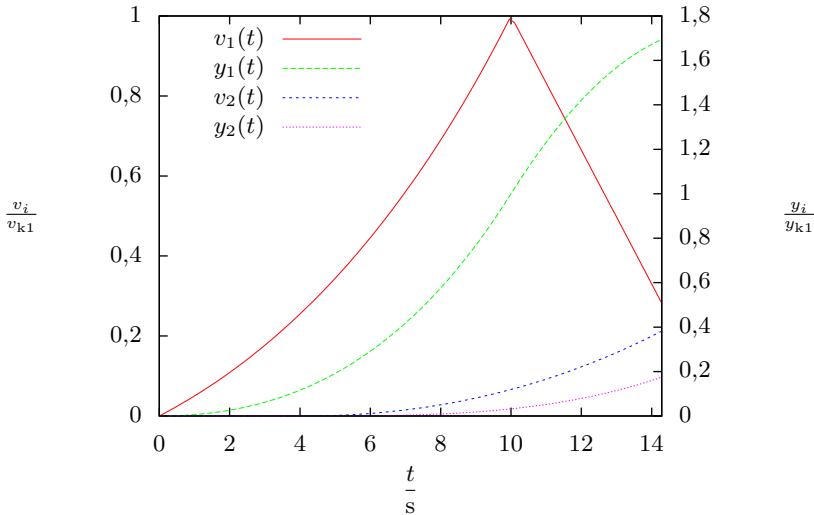
Úloha IV.5 . . . únik plynu

Spočtěte, kolik procent své hmotnosti za rok ztratí zemská atmosféra, pokud uvážíte, že končí 10 km nad zemí, po celé své výšce má konstantní tlak (stejný jako u hladiny moře), je tvořena ideálním plynem o teplotě 300 K, splňuje Maxwellovo rychlostní rozdělení a gravitace se v jejím objemu nijak neprojevuje.

Tato úloha byla zaměřena mimo jiné na to, jak si dokážete najít správný vztah na internetu, protože většina jich nemusí být středoškolskou fyzikou odvoditelných.

Popišme nejdřív model, který jsme si představovali, že použijete. Máme Zemi, která je dokonalá koule o známém poloměru, nerotuje, atmosféra se vyskytuje jen v mezikouli o výšce 10 km. To, kolik částic uteče, zjistíme tak, že vezmeme všechny ty, které narazí na horní okraj atmosféry a z nich vybereme ty, které mají rychlost větší než únikovou, a ostatní necháme odrazit zpátky. Teplota budiž 300 K a tlak 101,3 kPa.

Začneme od únikové rychlosti. Aby těleso uniklo z dosahu centrálního gravitačního pole, musíme mu udělit takovou rychlost, že v žádné konečné vzdálenosti od středu nezastaví, resp. že se zastaví až v nekonečné vzdálenosti. Známe předpis pro



Obr. 19: Průběh letu rakety: $m_0 = 50$ g, $m_p = 30$ g, $I = 10$ N·s, $T_1 = 1$ N, $T_2 = 0,7$ N.

gravitační potenciál $V = -GM/r$ a kinetickou energii $E_k = mv^2/2$. Tedy chceme, aby součet potenciální a kinetické energie na určitém poloměru R byl nula. Energetický příspěvek od potenciálu je v nekonečnu nulový z definice, kinetickou energii tam chceme mít nulovou, jinak bychom nenašli minimální takovou rychlost. Zapišeme-li tuto úvahu, dostaneme

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_u^2 = 0,$$

z čehož plyne, že rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole je

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Což pro zadanou hodnotu 6388 km je přibližně $v_u = 11,2$ km·s⁻¹.

Druhá věc je určit, kolik částic vzduchu dopadne za jednotku času na povrch vymezený koulí o poloměru 6388 km. Odvozením se tady zdržovat nebudeme, ale v literatuře² zjistíme, že počet dopadů na jednotku plochy za jednotku času je

$$f = \frac{1}{4}n\bar{v},$$

kde n je hustota plynu v částicích na m³ a \bar{v} střední rychlost molekul plynu definovaná jako $\bar{v} = \sqrt{8k_B T / (\pi m_m)}$ (k_B je tzv. Boltzmannova konstanta, T termodynamická teplota plynu) a m_m v obou případech hmotnost molekuly plynu, kterou

²<http://www.chem.arizona.edu/~salzmanr/480a/480ants/collsurf/collsurf.html>

pro vzduch spočteme, jako průměr hmotností jednotlivých složek vážený jejich zastoupením, tj. $m_m = 28,97m_u$, přičemž m_u je atomová hmotnostní jednotka. Ze stavové rovnice víme, že

$$p = nk_B T,$$

takže budeme umět dosadit za n , tedy frekvence nárazů je pro určitou teplotu T a tlak p rovna

$$f = \frac{p}{\sqrt{2\pi m_m k_B T}}.$$

Nakonec potřebujeme zjistit, kolik molekul ve vzduchu má rychlost větší než ona úniková rychlost v_u . Pro tento účel si najdeme tzv. *kumulativní distribuční funkci* Maxwellova rozdělení (erf), kterému, jak bylo v zadání uvedeno, podléhají molekuly plynu. Tato funkce určuje, kolik molekul plynu má rychlost nižší než zkoumaná rychlost.

$$c(v) = \operatorname{erf}\left(v\sqrt{\frac{2}{A}}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v \exp(-v^2/(2A))}{\sqrt{A}},$$

kde $A = k_B T/m_m$, další konstanty a parametry popsané v tomto vzorci známe již z dřívějších. Poměrný počet částic, které mají rychlost větší než úniková rychlost v_u , pak zjistíme jednoduše jako $\eta = 1 - c(v_u)$.

Teď už jen musíme dát výsledky dohromady. Stačí, když frekvenci srážek s horním okrajem modelové atmosféry přenásobíme jeho plochou S a dobou t , po kterou je tam necháme dopadat. Nakonec vezmeme v úvahu podmínku na únik z atmosféry. Protože počítáme v jednotkách částic, musíme pak výsledek přenásobit hmotností molekuly. Výsledek tedy bude

$$m = m_m f t S \eta.$$

A co číselně? Dá se tušit, že částic, které budou rychlejší než úniková rychlost, bude poměrně málo a proto bude dobré využít např. Wolfram Alpha³, který umí počítat s libovolnou přesností. I tak je dobré si jednotlivé části vzorce spočítat zvlášť. Tak třeba zjistíme, že na horní okraj atmosféry dopadne $6,6 \cdot 10^{49}$ částic za rok. Nicméně koeficient η , který udává poměr prošlých a odražených zpátky, se od nuly liší až na 318. desetinném místě. V rámci tohoto modelu tedy z atmosféry neuniká nic.

Úloha IV.P ... účet za topení

V některých bytovkách se teplá voda ohřívá centrálně pro všechny její obyvatele. V zásobníku je během dne udržována konstantní teplota vody. Šetřiví obyvatelé však ohřev na noc vypínají, voda tedy do rána vystydně a poté se opět musí ohřát. Odhadněte (na základě vyhledaných údajů), kolik energie se tímto ušetří, a navrhněte obyvatelům lepší způsoby, jak ušetřit při zachování komfortu.

³<http://www.wolframalpha.com/>

Pre dobrú predstavu je najlepšie začať na jednoduchom modeli a získané poznatky skúsiť zovšeobecniť. Predstavme si teda napríklad taký byt, ktorý má vlastný ohrievač a sústavu radiátorov. Ústredným kúrením sa to nazýva kvôli ústrednej roli ohrievača, teda sa líši napríklad od situácie kde je každá izba vykurovaná vlastným telesom, napríklad elektrickým ohrievačom.

V takomto byte pre jednoduchosť kotol preháňa vodu systémom a súčasne ju ohrieva. Pracuje teda nejakým konštantným výkonom P_k . Takýto výkon sa dá odhadnúť rôznymi spôsobmi. Vieme napríklad že bude rádovo rovný, ale nižší ako príkon prietokových kotlov, ktoré môžeme na internete nájsť ponúkať veľké množstvo predajcov. Po chvíli hľadania si všimnete, že sa pohybuje okolo hodnoty 2 kW. Kotol ale väčšinu času nekúri úplne naplno, takže skutočný výkon bude nižší.

V dome je vhodné mať istý tepelný komfort, teda by nemalo byť v chladničke teplejšie ako v kuchyni. To, ako ťažko musí kotol pracovať, závisí od teploty vonkajšieho prostredia a izolácie domu. Výkon prechádzajúci stenami von môžeme napísať ako

$$P_s = \frac{\Delta TS}{R} = P_k$$

Poznávame rozdiel teplôt a plochu vonkajších stien. Často udávaná hodnota R je tepelný odpor. Pre starý panelák bude jeho premerná hodnota okolo $0,5 \text{ K}\cdot\text{m}^2\cdot\text{W}^{-1}$, pre dobre postavený nízkoenergetický dom s poriadnym zateplením sa môže vyšplhať na desaťnásobok. Pre plochu stien 100 m^2 a teplotný rozdiel, ktorý teraz možno práve zažívate, $20 \text{ }^\circ\text{C}$, dostávame hodnoty unikajúceho výkonu v rozmedzí od 400 W až do 4 kW.

Ak sa kúrenie na noc vypína, môžeme zo skúsenosti očakávať že ráno už radiátory nájdeme studené. Na to, aby sme ich udržali cez noc teplé, potrebovali by sme vykonať prácu $P_k \cdot 8 \text{ hod}$, čo s predchádzajúcimi odhadmi dáva rádovo 10 kWh. Za kilowatthodinu zaplatíme 1 až 2 koruny.

Na druhú stranu, môžeme skúsiť šetriť a nechať radiátory chladnúť. Zobudíme sa do studenejšieho, no cez noc steny izolujú dostatočne dobre na to, aby sme nezmrzli. Ráno ale treba okrem naštartovania obvyklého výkonu kotla rozohriať aj vodu v systéme, aj vzduch. 1000 m^3 vzduchu potrebuje na zohriatie o jeden kelvin okolo tretiny kilowatthodiny (spočítame jednoducho pomocou hustoty a hmotnostného tepla vzduchu). Väčší problém môže pôsobiť voda, ktorej hustota a tepelná kapacita sú oveľa vyššie ako tie u vzduchu. Objem vody v systéme vykurovania môžeme odhadnúť tak 50 litrami. Radiátor bude mať od 2 litrov pre tie nové tenké až do 10 litrov, ak sa jedná o starý, obrovský liatinový model. V rozvodoch bude tiež približne toľko isto vody. Zohriatie takejto vody z teploty bytu $20 \text{ }^\circ\text{C}$ na bežnú teplotu pri kúrení $60 \text{ }^\circ\text{C}$ bude vyžadovať

$$W_v = mc\Delta T = 50 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \cdot 40 \text{ K} \approx 2 \text{ kWh}$$

Teraz vidíme, že pre takto zvolené parametre sa nám hoc aj podarí ušetriť nočnou zimou, no celú štvrtinu noci budeme šetriť len na opätovné zohriatie celého systému.

Náš skúmaný prípad bol špeciálny. Dá sa vo všeobecnosti ukázať, že vypínať kúrenie na noc je výhodnejšie. To, že kúrime celú noc je energeticky ekvivalentné

tomu, že by sme nechali vodu v systéme chladnúť rovnakým tepelným tokom, akým ona vyhrieva byt, celú noc a potom ju naraz nahriali. Ale vieme, že tepelný tok medzi dvoma telesami rastie s rozdielom teplôt. Preto keď tak v polke noci voda v radiátoroch trochu ochladla, je tepelný tok menší ako na začiatku, a celkovo teda nestratí systém toľko tepla, ako by strácalo ak by sme ho udržovali na konštantnej teplote.

A čo odporúčit ľuďom platiacim účty za plyn? Napríklad výmenu radiátorov. Novšie typy majú teraz menší objem vo vode, a aj potrubie sa robí tenké, takže v celom systéme bude menej vody, a ráno stačí ohrievať menej vody.

Úloha V.1 ... šumivý prášek

Hodíme-li do sklenice s vodou šumivý prášek, tak nejprve leží na dně a potom se zvedne. Proč?

Šumivá tableta je složená predovšetkým z hydrogenuhličitanu sodného a kyseliny citrónové. Po ponoření tablety do vody nastane reakce, jejíž (z našeho hlediska nejdůležitějším) výsledkem je uvolňování oxidu uhličitého. Ten na povrchu tablety vytváří díky povrchovému napětí tenkou vrstvičku s konstantní tloušťkou. Ta působí na tabletu vztlakovou silou úměrnou ploše tablety.

Předpokládáme kruhovou tabletu o poloměru r , výšce h_t a hustotě ρ_t . Hustotu vody označme jako ρ_v , hustotu CO_2 jako ρ_{CO_2} a tloušťku vrstvičky CO_2 jako h_{CO_2} .

Na tabletu působí vztlaková a také tíhová síla. Nadnášena je ale i vztlakovou silou vrstvičky CO_2 , odečteme-li tíhovou sílu oxidu uhličitého.

$$\begin{aligned} F &= F_{vz,t} - F_{G,t} + F_{vz,\text{CO}_2} - F_{G,\text{CO}_2} \\ F &= \pi r^2 h_t \rho_v g - \pi r^2 h_t \rho_t g + \pi r^2 2h_{\text{CO}_2} \rho_v g - \pi r^2 2h_{\text{CO}_2} \rho_{\text{CO}_2} g \\ F &= \pi r^2 g (h_t \rho_v - h_t \rho_t + 2h_{\text{CO}_2} \rho_v - 2h_{\text{CO}_2} \rho_{\text{CO}_2}) \end{aligned}$$

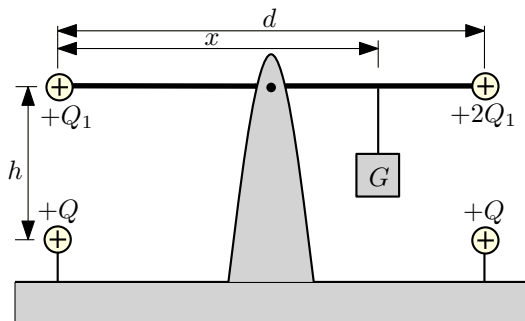
Aby tableta stoupala vzhůru, musí být síla F kladná, tedy zjišťujeme, kdy je obsah závorky kladný. Předpokládáme přitom, že hustota tablety je větší a hustota CO_2 menší jak hustota vody.

$$\begin{aligned} 0 &< (h_t \rho_v - h_t \rho_t + 2h_{\text{CO}_2} \rho_v - 2h_{\text{CO}_2} \rho_{\text{CO}_2}) \\ -h_t \rho_v + h_t \rho_t &< 2h_{\text{CO}_2} \rho_v - 2h_{\text{CO}_2} \rho_{\text{CO}_2} \\ h_t (-\rho_v + \rho_t) &< h_{\text{CO}_2} (\rho_v - \rho_{\text{CO}_2}) \\ h_t &< 2h_{\text{CO}_2} \frac{\rho_v - \rho_{\text{CO}_2}}{\rho_t - \rho_v} \end{aligned}$$

Postupným rozpouštěním tablety se snižuje její objem a tím i tíhové síla, ale objem vrstvičky CO_2 na plochu tablety ale zůstává stejný (mění se pouze poloměr r , ale ve stejném poměru jako u tablety).

Tableta vystoupá ve chvíli, kdy převládne vztlaková síla tablety a CO_2 nad jejich tíhovými silami. To nastane, bude-li pro výšku tablety platit výše uvedený vztah.

Úloha V.2 ... elektrická rovnováha



Obr. 20

Na obrázku 5 je nevodivá tyč délky d zanedbatelné hmotnosti, otočná kolem svého středu. Na obou koncích tyče jsou připevněny malé vodivé koule zanedbatelných hmotností s kladnými náboji Q_1 a $2Q_1$. Tyč je vyvážena závažím o tíze G podle obrázku. Ve vzdálenosti h přímo pod každou z koulí je pevně umístěna koule s kladným nábojem Q .

- a) Určete vzdálenost x , pro niž je tyč vodorovná a je v rovnováze.
 b) Pro jakou hodnotu h bude tyč v rovnováze a nebude přitom vůbec zatěžovat čep, na němž je upevněna?

Protože koule na koncích tyče mají zanedbatelnou hmotnost, působí na ně pouze odpudivá elektrická síla o velikosti

$$F_{e1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q}{h^2} \quad (\text{vlevo}) \quad \text{a} \quad F_{e2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q_1 Q}{h^2} \quad (\text{vpravo})$$

směrem vzhůru. Závaží působí silou o velikosti G směrem dolů a čep na tyč normálovou silou o velikosti N směrem vzhůru.

- a) Aby se tyč neotáčela, je potřeba, aby součet momentů působících sil byl nulový, počítejme je vůči ose kolmé k obrázku a procházející čepem

$$F_{e1} \frac{d}{2} - F_{e2} \frac{d}{2} + G \left(x - \frac{d}{2} \right) = 0,$$

odtud

$$x = \frac{d}{2} + \frac{dQ_1 Q}{8\pi\epsilon_0 G h^2}.$$

- b) Tyč nebude zatěžovat čep, pokud $N = 0$. Musí tedy navíc platit tato silová rovnováha

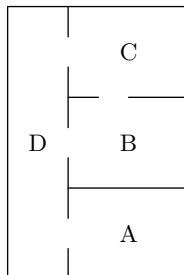
$$F_{e1} + F_{e2} - G = 0,$$

odkud

$$h = \sqrt{\frac{3Q_1 Q}{4\pi\epsilon_0 G}}.$$

Úloha V.3 ... putování faraonů

Aleš bydlí ve čtyřpokojevém bytě, jehož půdorys si můžete prohlédnout na obrázku. Mára se ale rozhodl, že Alešův byt zamoří nepříjemnými mravenci faraony. Faraoni po bytu šíleně rychle pobíhají a to ještě navíc šíleným způsobem – můžete uvažovat, že jednou za pět minut se 60% mravenců přesune do sousedních místností a jenom 40% jich zůstává pobíhat ve stejné místnosti, co předtím. Přitom se rovnoměrně rozbíhají do sousedních místností (když má místnost dvoje dveře, tak 30% jich přeběhne do jedné a 30% do druhé, když má troje dveře, tak se rozdělí po 20%). A to se opakuje každých pět minut (uvažujte jenom kroky přesně po pěti minutách). Faraonům se v bytě líbí, a tak neutíkají ven. Na druhou stranu se faraoni nemají šanci jinak dostat do bytu než propašováním, a to dělá jenom Mára, takže jinak ani faraoni v bytu nepřibývají.



- Když Mára zlomyslně umístí 1000 faraonů do předsíně (D), kolik faraonů bude v jednotlivých místnostech po pěti minutách? Kolik jich bude po deseti minutách a po patnácti minutách?
- Pokud jsme našli v místnostech počty mravenců $N_A = 12$, $N_B = 25$, $N_C = 25$ a $N_D = 37$, jak byli mravenci rozmístěni před pěti minutami?

Bonus Kolik mravenců by bylo v místnostech po hodně dlouhé (prakticky nekonečné) době, když by Mára rozmístil faraony jako v bodu a)? Závísí to na tom, jak Mára mravence rozmístil? A nejrafinovanější otázka – ustálí se počet mravenců na jedné hodnotě, nebo bude oscilovat?

Předpokládejme, že počty mravenců v jednotlivých místnostech jsou na začátku A_0 , B_0 , C_0 a D_0 . Naším cílem je vyjádřit rozložení mravenců do místností po pěti minutách jako funkci těchto hodnot. Označme počty mravenců v jednotlivých místnostech po pěti minutách A_1 , B_1 , C_1 a D_1 . Mravenci neumírají ani nepřibývají, takže pro každou místnost musí platit, že

$$\begin{aligned} \# \text{ mravenců po 5 minutách} &= \# \text{ mravenců, kteří neodejdou} + \\ &+ \# \text{ mravenců, kteří přijdou.} \end{aligned}$$

Počet mravenců, kteří z místnosti neodejdou, je vždy 40% současného počtu. Počet mravenců, kteří přijdou, také známe. Například o předsíni D víme, že do ní přijde 60% mravenců z místnosti A, ale jenom 30% mravenců z místností B a C, protože ty mají dvoje dveře. Napíšeme-li si stejným způsobem procenta pro každou místnost, dostáváme

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,4A_0 + 0,2D_0, \\ B_1 &= 0,4B_0 + 0,3C_0 + 0,2D_0, \\ C_1 &= 0,4C_0 + 0,3B_0 + 0,2D_0, \\ D_1 &= 0,4D_0 + 0,6A_0 + 0,3B_0 + 0,3C_0. \end{aligned}$$

Začínali jsme s mravenci pouze v předsíni, neboli platí $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, $C_0 = 0$ a $D_0 = 1000$. Dosazením těchto hodnot zjistíme, že po pěti minutách je rozložení mravenců $A_1 = 200$, $B_1 = 200$, $C_1 = 200$ a $D_1 = 400$. Pokud tyto hodnoty dosadíme do naší rovnice jako hodnoty s indexem 0, získané hodnoty s indexem 1 budou hledané rozložení mravenců po 10 minutách (označme ho indexem 2). To samé pak zopakujeme ještě jednou a získáme rozložení po 15 minutách. Výsledné hodnoty jsou

$$A_2 = 160, B_2 = 220, C_2 = 220, D_2 = 400,$$

$$A_3 = 144, B_3 = 234, C_3 = 234, D_3 = 388.$$

V úkolu *b* máme vlastně zadány hodnoty A_1 , B_1 , C_1 a D_1 a zajímají nás odpovídající hodnoty A_0 , B_0 , C_0 a D_0 , které však pro přehlednost označíme indexem *b*. Problém se tedy redukuje na to, vyřešit tuto soustavu čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých

$$12 = 0,4A_b + 0,2D_b,$$

$$25 = 0,4B_b + 0,3C_b + 0,2D_b,$$

$$25 = 0,4C_b + 0,3B_b + 0,2D_b,$$

$$37 = 0,4D_b + 0,6A_b + 0,3B_b + 0,3C_b.$$

Ve škole vás možná učili metody jako Gaussova eliminace, kterými se takové soustavy řeší. Je však dobré si nejdříve ušetřit práci a využít vlastností problému, který popisujeme. V našem případě jsou místnosti B a C naprosto ekvivalentní a tedy lze očekávat, že pokud je v nich stejný počet mravenců, byl v nich stejný počet mravenců i před 5 minutami, neboli $B_b = C_b$. To si můžete ověřit i odečtením druhé a třetí rovnice. Tím jsme zredukovali jak počet proměnných, tak počet rovnic na 3. Dále už můžete například vyjádřit A_b z první rovnice, dosadit do poslední rovnice, následně z ní vyjádřit B_b a dosadit do druhé rovnice a již můžete vypočítat D_b a zpětným dosazováním i ostatní hodnoty. Výsledek je

$$A_b = 13, B_b = 26, C_b = 26, D_b = 34.$$

Metodu, kterou jsme použili v bodu *a* pro výpočet rozdělení po 5, 10 a 15 minutách můžeme iterovat libovolně dlouho. Předpokládejme, že postupnou iterací se budeme blížit nějakému konstantnímu rozdělení. Konstantním rozdělením máme na mysli to, že když na něj znovu provedeme jeden krok této iterace, dostaneme zase to samé rozdělení. Tato podmínka nám stačí na to, aby jsme takové rovnovážné rozdělení našli, protože jí můžeme přepsat jako

$$A_{\text{eq}} = 0,4A_{\text{eq}} + 0,2D_{\text{eq}},$$

$$B_{\text{eq}} = 0,4B_{\text{eq}} + 0,3C_{\text{eq}} + 0,2D_{\text{eq}},$$

$$C_{\text{eq}} = 0,4C_{\text{eq}} + 0,3B_{\text{eq}} + 0,2D_{\text{eq}},$$

$$D_{\text{eq}} = 0,4D_{\text{eq}} + 0,6A_{\text{eq}} + 0,3B_{\text{eq}} + 0,3C_{\text{eq}}.$$

Řešením této soustavy, které splňuje podmínku na zachování mravenců

$$A_{\text{eq}} + B_{\text{eq}} + C_{\text{eq}} + D_{\text{eq}} = 1000,$$

jsou hodnoty

$$A_{\text{eq}} = 125, B_{\text{eq}} = 250, C_{\text{eq}} = 250, D_{\text{eq}} = 375.$$

Všimněte si, že toto řešení je nezávislé na počátečním rozložení mravenců. Jediné, co jsme předpokládali, bylo, že počáteční rozložení musí být takové, aby se postupem času dostalo do konstantního stavu. Ukazuje se, že v našem případě je to pravda pro libovolnou počáteční podmínku. Důkaz je jednoduché cvičení, nicméně se neobejde bez znalosti maticového počtu. Ti z vás, co matice a jejich vlastní čísla znají, si to určitě dokáží dokázat sami. Ostatní si můžou udělat jednoduchou numerickou simulaci. Přesvědčte se, že libovolnou počáteční podmínku můžete složit pouze ze situací, kdy začínáte s 1000 mravenci pouze v jedné z místností. Numericky poté proveďte mnohonásobné iterace pro tyto čtyři různé případy a ukažte, že každý opravdu skončí v námi nalezeném rovnovážném stavu. Z toho také plyne, že počty mravenců nemůžou začít oscilovat.

Úloha V.4 . . . maminka a kočárek

Maminka má kočárek o hmotnosti m a je s ním pevně spojena vláknem délky l , které je na počátku natažené. Mezi maminkou i kočárkem a podlahou, na které oba stojí, je nenulový koeficient smykového tření f . Maminka začne kočárek táhnout po přímce konstantní rychlostí v , která je kolmá na počáteční polohu vlákna. Popište trajektorii kočárku v závislosti na parametrech úlohy. Maminku i kočárek považujte za hmotné body. Doporučujeme úlohu numericky simulovat.

Nejdříve upřesníme zadání – je zde uvedeno, že třecí síla působí také mezi maminkou a podlahou, tato podmínka je naprosto nepodstatná, protože máme informaci, že maminka táhne po přímce stále konstantní rychlostí, proto nemusíme provádět silový rozbor.

Dále budeme v řešení uvažovat, že provázek bude po celou dobu natažený, tj. vzdálenost maminky a kočárku bude konstantní (tuto podmínku si na konci ověříme). Pokud by tomu tak nebylo, nastal by analyticky špatně řešitelný problém: $|\mathbf{MK}| \leq l = \text{konst.}$ Bylo by nutné ošetřit případ nataženého a nenataženého vlákna zvlášť.

Zamyslíme se nad tím, jaké síly nám působí na kočárek. Jednak to je síla třecí, která působí proti pohybu kočárku, jednak to je síla napínající provázek. Nyní uděláme úkrok stranou – budeme celou situaci řešit v soustavě spojené s maminkou, tj. soustavě pohybující se rychlostí v . Tato soustava má tu výhodu, že vzhledem k tomu, že jsme k ní dospěli pomocí Galileiho transformace, tak se neobjeví setrvačné síly, které by nám celou situaci zkomplikovaly. Dále budeme úlohu řešit v polárních souřadnicích (polohu kočárku budeme udávat pomocí úhlu φ a vzdálenosti r od maminky). Podle předpokladu výše budeme uvažovat $r = \text{konst.}$

Přešli-li jsme do polárních souřadnic a požadujeme-li, aby platilo $r = \text{konst}$, tak nám zbude pouze jedna proměnná, a to φ . Proto nemusíme uvažovat sílu v provázku (je radiální, tj. nemění velikost tangenciální rychlosti). Stačí uvažovat pouze tangenciální složku třecí síly, která nám bude měnit rychlost „oběhu“ kočárku okolo maminky.

Víme, že velikost třecí síly je konstantní a její velikost je $F_t = mgf$. Nyní již musíme tedy pouze vypočítat její průmět do směru kolmého na provázek. Dále ještě víme, že třecí síla působí proti směru rychlosti. Proto platí

$$\frac{F_{tt}}{F_t} = \frac{w_t}{w},$$

kde F_{tt} je velikost tečné složky třecí síly, w_t je tečná složka rychlosti a w je celková velikost rychlosti. Při výpočtu třecí síly je potřeba opět uvažovat i rychlost maminky, kterou jsme výše odtransformovali Galileiho transformací, protože třecí síla působí mezi kočárkem a podložkou, ale směr se touto transformací nemění. Pro celkovou velikost rychlosti dle kosinové věty platí

$$w = \sqrt{l^2\dot{\varphi}^2 + v^2 - 2v l \dot{\varphi} \sin \varphi},$$

kde $\dot{\varphi}$ značí derivaci úhlu φ podle času, tj. úhlovou rychlost. Pro tečnou složku rychlosti platí

$$w_t = l\dot{\varphi} - v \sin \varphi.$$

Nyní již můžeme napsat druhý Newtonův pohybový zákon

$$ml^2\ddot{\varphi} = -lF_{tt} = mgf \frac{l\dot{\varphi} - v \sin \varphi}{\sqrt{l^2\dot{\varphi}^2 + v^2 - 2v l \dot{\varphi} \sin \varphi}},$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{gf}{l^2} \frac{\dot{\varphi} - \omega \sin \varphi}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \omega^2 - 2\omega\dot{\varphi} \sin \varphi}},$$

kde jsme označili $\omega = v/l$, tj. počáteční úhlovou rychlost pohybu kočárku.

Tato diferenciální rovnice bohužel již nelze dále řešit analyticky až na jeden triviální případ, a to $f = 0$, tj. pohyb bez tření. Potom nám na kočárek nepůsobí žádný moment síly a proto se pohybuje konstantní úhlovou rychlostí a platí

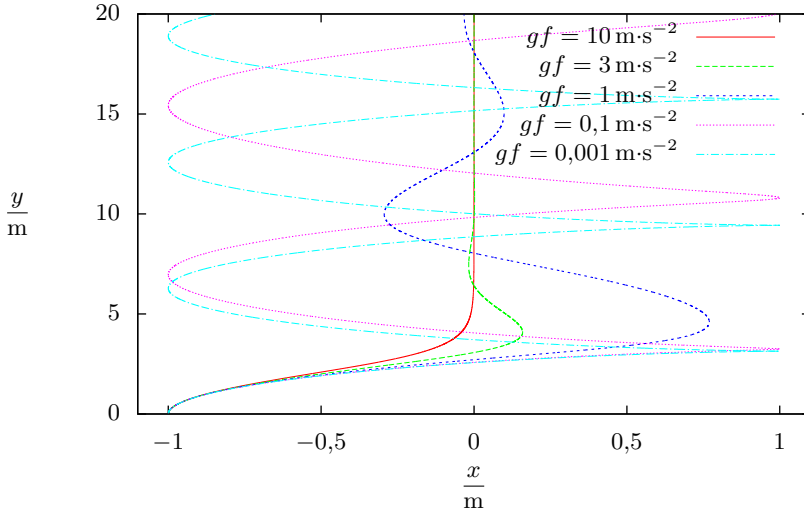
$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{v}{l}t.$$

Nyní již stačí numericky vyřešit rovnici výše a navrátit všechny substitute, tj. Galileiho transformaci a polární souřadnice. Platí

$$x(t) = -l \sin \varphi,$$

$$y(t) = vt - l \cos \varphi.$$

Na obrázku 21 jsou vykresleny trajektorie pohybu pro rychlost $v = 1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, délku $l = 1 \text{ m}$ a součin $gf \in \{10, 3, 1, 0, 1, 0, 001\} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Je zde dobře vidět, že pro veliký koeficient tření $gf = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ se kočárek pohybuje téměř přímo za



Obr. 21: Trajektorie pohybu pro různé počáteční parametry.

maminkou, tj. lze zanedbat setrvačnost kočárku. Naopak pro $gf = 0,001 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je již tření velmi malé a trajektorie odpovídá obíhání kočárku okolo maminky téměř konstantní úhlovou rychlostí.

Nyní se vrátíme k podmínce, která požaduje, aby bylo lanko plně natažené, tj. požadujeme, aby radiální síla působící na kočárek byla kladná. Radiální síla má dvě složky, jednak sílu třecí, jednak sílu dostředivou způsobenou pohybem kočárku okolo maminky. Musí proto platit

$$gf \frac{v \cos \varphi}{w} < \dot{\varphi}^2 l,$$

což je opět podmínka, kterou je nutno testovat numericky. Jediné, co lze říci, je, že pro $f = 0$ je splněna vždy a vlákno tedy nikdy nepřestane být napjaté.

Pokud je lano nenapjaté, je potřeba řešit soustavu dvou diferenciálních rovnic – jednak pro úhlovou odchylku, jednak pro radiální vzdálenost. Dojde-li opět k napnutí lana, tak není v zadání řečeno, jak se bude lano chovat – zdali se bude chovat pružně, tj. kočárek odskočí opět do vnitřku kruhu (zmenšenou radiální rychlostí), nebo nepružně, tj. kočárek se bude dále pohybovat po obvodu kruhu s nulovou radiální rychlostí.

Úloha V.5 ... lovec v2

O kolik musíme zvýšit výkon motoru na jednoho chyceného ptáka za sekundu, pokud nad vagonem vztyčíme síť, do níž chytáme nebohé ptáky? Vlak jede rych-

lostí v , pták váží m , jeho rychlost je w , úhel nalétnutí do sítě je φ a síť má plochu S . Předpokládejte, že mezi jednotlivými záchyty se síť vrátí vždy do klidové polohy.

Rozmysleme si nejdříve, za jakých zjednodušujících předpokladů budeme úlohu řešit a jaké údaje ze zadání k tomu skutečně potřebujeme. Naší strategií bude přitom získat vyjádření přírůstku výkonu ze znalosti rovnováhy sil, neboť víme, že rychlost v vlaku se v momentu natažení sítě nezmění. Pro jednoduchost předpokládejme, že se hmotnost vlaku chytáním ptáků nemění, jinak bychom museli řešit úlohu s proměnnou hmotností. Za zmínku stojí také to, že vůbec nepotřebujeme znát plochu sítě S , přesvědčí nás o tom následující výpočet.

V okamžiku před natažením sítě má lokomotiva rychlost v a její motor má výkon

$$P = \frac{Fv}{t} = Fv.$$

Z prvního Newtonova zákona víme, že síla F , kterou působí motor na koleje, je v rovnováze s odporovou silou prostředí F_{od} , která má stejnou velikost, ale opačný směr. Spočteme nyní, o kolik se zvětší tato odporová síla v okamžiku natažení sítě. Necht ψ je úhel mezi normálou k síti a směrem jízdy vlaku, a φ je úhel nalétnutí ptáka do sítě. Jelikož nemáme informaci o pravděpodobnostním rozdělení směru rychlosti ptáků, předpokládejme, že rychlost ptáků w má dvě složky, rovnoběžnou s v a kolmou na rovinu pohybu vlaku (zkuste si rozmyslet, jak by se řešení změnilo, pokud bychom tento předpoklad uvolnili). Nás zajímá rovnoběžná složka w_{\parallel} , protože složka kolmá na zem je vykompenzována reakcí od kolejnic a na brzdění vlaku se nepodílí. Sílu F budeme chtít vyjádřit z první věty impulsové jako změnu hybnosti za jednotku času.

Jak se tedy změní hybnost jednoho nebohého opěřence poté, co uvízne v síti? Před chycením má rovnoběžná složka jeho hybnosti velikost

$$p_1 = mw_{\parallel} \sin(\varphi + \psi)$$

a směr opačný se směrem v . Po chycení se pták pohybuje společně s vlakem, jeho hybnost je

$$p_2 = mv.$$

Celkově tedy

$$\Delta p = m(w_{\parallel} \sin(\varphi + \psi) + v).$$

Pro n ptáků za sekundu bude platit

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{ntm(w_{\parallel} \sin(\varphi + \psi) + v)}{t} = nm(w_{\parallel} \sin(\varphi + \psi) + v).$$

Tuto sílu musí motor vykompenzovat zvýšeným výkonem

$$\Delta P = Fv = nmv(w_{\parallel} \sin(\varphi + \psi) + v).$$

V našem konkrétním případě $n = 1$.

Úloha V.P ... světelný meč

Navrhňte konstrukci světelného meče, aby byl sestrojitelný za současného poznání vědy a techniky a přitom vypadal i fungoval podobně jako ten autentický ze Star Wars.

Úvod ke světelným mečům

Uvědomíme si nejdříve, co světelný meč je. Ti, co znají Star Wars, to jistě dobře ví, a ti, kteří nikdy tuto ságu nesledovali, mohou snadno najít informace například na internetu.^{4 5}

Základem světelného meče je cca 30 cm dlouhý jílec, který má obvykle kovový vzhled, následovaný v zapnutém stavu čepelí, která je cca 1,3 m dlouhá a je tvořena jakousi „zářivou energií“ – v podstatě světlem. „Energie“ může mít různou barvu, nejčastější bývá modrá, zelená a červená. Objevily se i vzácnější světelné meče žluté, fialové a dokonce i černé⁶ (zrovna svítící černé barvy se současnou fyzikou asi nedosáhneme). V rámci všech filmů a příběhů se vyskytly i exotické meče, které měly například dvě spojené čepele, ale to byly de facto dva spojené meče. Zde udané délky jsou jenom typické střední délky, protože např. v III. epizodě je vidět, že Yoda používá kratší meč než Darth Sidious. Pro nás je ale hlavně důležitý fakt, že je délka meče konečná. Ve vypnutém stavu má pak meč rozměr rovný pouze rozměru jílice.

Důležité jsou pak další vlastnosti meče ve filmech. Zejména se s ním dá bojovat, tzn. pokud se dva meče zkrříží v rámci akční scény, tak se o sebe zastaví. Jinak by to asi nebyl moc dobrý meč. Zajímavou vlastností je, že světelný meč dokáže rozřezat téměř všechno, až na nějaké exotické materiály jako phrik, cortosis a mandaloriánskou ocel. To jsou též sci-fi materiály, takže budeme chtít, aby náš meč řezal prakticky všechno. Dalším omezením je, že chceme, aby meč byl jak sečnou, tak i bodnou zbraní (např. ukázka bodného použití⁷ v čase 3:10 a posléze v čase 4:47 i sečného).

Ze stejné nahrávky by mohlo být patrné, že použití meče na lidskou tkáň vede k automatické kauterizaci (zcelení ran pálením). Malé rozměry jílice se stávají další komplikací pro uschování dostatečně silného energetického zdroje. Zdá se také, že místo jedno- či dvoustranné čepele má válcově symetrickou čepel. Dokáže odrážet střely z blasteru. Při souboji vydává specifický zvuk.

Velice nepříjemný technický oříšek je jeho použitelnost vždy a všude. Dá se použít jak v jakékoliv atmosféře, tak ve vakuu nebo pod vodou (např. Kit Fisto v čase kolem 1:00 ve videu⁸). Navíc se dá zapnout téměř okamžitě a není příliš křehký. Sice se dá rozbít, ale musí se jednat o opravdu velice agresivní pád nebo o jeho vyslovené rozříznutí.

⁴http://cs.wikipedia.org/wiki/Světelný_meč

⁵<http://en.wikipedia.org/wiki/Lightsaber>

⁶<http://www.youtube.com/watch?v=tw-rYjYnAzE&feature=related>

⁷<http://www.youtube.com/watch?v=Ku5zkPdK0BY>

⁸<http://www.youtube.com/watch?v=n3wLesNq4LI>

Michio Kaku, teoretický fyzik a fanoušek sci-fi, se pokusil v rámci seriálu Sci-fi Science odhalit, jakou má současná věda možnost zkonstruovat světelný meč. Seriál můžete shlédnout na YouTube.⁹ Řešení se dále místy odvolává právě na tento pořad, snaží se ho rozšířit a upozornit na další technické problémy a možnosti.

Energetický zdroj

Dostatečně kompaktní energetický zdroj pro zbraň je jedním z klíčových problémů konstrukce. Na energetickém zdroji asi rovnou skončí naše vize mít opravdu silný meč, co rozřeže téměř cokoliv. Jsou ale určité cesty, kterými by snad mohl být napájen, i když ještě dnes nejsou úplně ve stavu, kdy by se daly rovnou použít. Vměstnat výkon nějaké menší elektrárny do jedné ruční zbraně totiž není nic dvakrát jednoduchého.

Technický výdobytek, který navrhuje Michio Kaku, je baterie z uhlíkových nanotrubiček. Uhlíkové nanotrubičky vedou elektrický proud a mohly by se tak použít jako desky miniaturních kondenzátorů. Vzhledem k tomu, že by se takových miniaturních destiček o šířce nanotrubičky vešlo do malých rozměrů velmi vysoké množství, tak by po nabití takový kondenzátor mohl sloužit jako zdroj energie naší zbraně. Má to ovšem určité mouchy, o kterých Kaku raději nemluví. Evidentní je, že by se muselo podařit vytvořit vždy vrstvu nanotrubiček a pak mezi ně dát nějaký co nejlépe izolující materiál. U takto malých kondenzátorů by se nejspíš stal problémem i tunelový proud mezi sousedními deskami. Pokud by se tyto problémy podařilo překonat, tak by to byl asi téměř ideální zdroj díky svojí velké skladnosti a přenosnosti.

Pokud bychom chtěli mít zdroj energie v rukojeti, tak nám opravdu nezbyvá nic než hledat nějaké nanotechnologie. Jaké různé nové druhy baterií se v dnešní době vyvíjí, si můžete přečíst např. v magazínu.¹⁰ Všechny mají pro nás ale dost nedostatečnou kapacitu. Proto můžeme uvažovat o tom, jak si pomoci jinak. Docela hloupá alternativa by byla nějaká baterie, kterou by měl bojovník na sobě, například v batohu na zádech, a bylo by ji potřeba připojit k meči před použitím. Hloupá je, protože by to omezovalo pohyb nositele meče, nevypadalo by to jako ve Hvězdných válkách a navíc by se meč nedal házet zapnutý, což občas jeho nositelé používají. Mohli bychom si pomoci solárními články v oblecích rytířů, ale to nebude zase příliš velká pomoc. Má stejný problém jako uložení baterie a navíc světelný meč jde použít i ve tmě, kde ho právě někdy používají Jediové místo baterky.

Zajímavou alternativou by bylo využít nápad, který měl již Nicola Tesla. Pokud bychom umístili do dostatečné blízkosti boje naši elektrárnu, co by vysílala elektřinu, či spíše energii, do okolí ve formě elektromagnetických vln, a zařídili bychom to tak, že by ji meč dokázal sbírat v průběhu boje, tak bychom měli vyhráno. Ale zase tím přicházíme o jakousi efektivnost jeho použití – musíme si s sebou vozit elektrárnu. Problém by mohl nastávat i u příjmu energie, protože by nesmělo záviset na poloze meče. Musel by přijímat nějaký stabilní minimální výkon, což nás nabádá k tomu rozmístit elektrárny více s různě polarizovanými vysílači. A pokud

⁹<http://www.youtube.com/watch?v=xSNubaa7n9o>

¹⁰http://www.chip.cz/clanky/trendy/2011/05/vykonne-baterie-zitrka/article_view?b_start:int=0&-C=

bychom potřebovali energie opravdu hodně, pak můžeme narazit na problém, jak neugrilovat našeho bojovníka jenom samotným elektromagnetickým zářením.

Dále už předpokládáme, že jsme energetický problém vyřešili, i když to tak zcela není.

Laserový meč

Asi každého fanouška napadne, že když se říká světelný meč, tak by měl být ze světla, a tedy nejspíše laseru. Vzhledem k tomu, že i autoři tvrdí, že uvnitř rukojeti meče se skrývá krystal, který je nejdůležitější součástí meče a který dává meči jeho barvu a další vlastnosti, pak nás to směřuje právě k laserům. Má to ovšem hned na první pohled zásadní chybu. Laserový paprsek může být sice silnou zbraní a řezat cokoliv, ale není konečný a nemůže sám o sobě fungovat jako meč, protože se při souboji meče prostě minou a nemůže tak sloužit k obraně vlastníka. Má ale tu výhodu pro fanoušky, že může mít prakticky jakoukoliv barvu (kromě černé a hnědé), i když v bezprašném prostředí či za silného denního osvětlení paprsky vlastně vůbec nevidíme, takže zase nebude vypadat tak dobře.

Konečnost meče a společně s tím i jeho možné použití v boji bychom mohli zařídit výsuvným zrcátkem, které by bylo upevněno na velice pevné zásuvné tyčce. Tyčka by byla uprostřed meče a byla by dokola obklopená svazky laserového záření. Tyčka by nesměla být prakticky vůbec ohebná, protože jejím prohnutím by se změnila poloha zrcátka a to by mohlo odrazit smrtelně nebezpečné záření zpět k ruce držitele meče a při velkém průhybu by opět šlo záření úplně mimo zrcátko. Navíc její materiál by musel být laseru-odolný (obdobně jako zmíněné zrcátko). Takže rovnou ho budeme muset stavět tak, aby nerozřezal úplně všechno. S odrazy by vůbec byl problém. Při rozřezávání by náhodný odraz mohl zranit náhodně kolemjdoucí, protivníka i držitele meče. Odraz laseru zpátky do zdroje zvyšuje nároky na kontrolu síly laserového paprsku uvnitř meče, protože bychom přehnanou produkcí laserového záření, které by se nám vracelo po optické cestě zpět, mohli zničit krystaly, ve kterých laserování probíhá. Umístěním zrcátka na konec meče jsme se zbavili možnosti použití meče jako bodné zbraně, pokud bychom ho nějak nevylepšíli.

Plazmový meč

Michio Kaku navrhuje konstrukci plazmového meče, ze kterého by proudilo rozžhavené plazma. Jeho „ostří“ by bylo tvořeno keramickým materiálem, který by vydržel velmi vysoké teploty. Keramika je na druhou stranu nepraktický materiál, protože je křehký.

Plazma by se vytvářelo z okolního vzduchu, který by byl nasáván do hlavice meče a proudil by skrz rukojeť, ve které by se zahříval, ionizoval a dál putoval do „ostří“, ve kterém by bylo velké množství malých otvorů a s pomocí elektromagnetického obvodu, cívky uschované v keramice, by bylo plazma rovnoměrně distribuováno do okolí čepele. Získali bychom tak meč, který by byl válcově symetrický, mohl by sloužit jak jako sečná, tak i bodná zbraň, a docházelo by u něj ke kauterizaci ran. Skladnost meče by se zajistila zásuvným mechanismem keramické čepele.

Velká nepraktičnost meče je v omezeném použití jenom v obvyklé atmosféře. Ve vakuu by nešel používat určitě, v jiných hustotách tekutin by pak minimálně potřeboval nějak seřadit a upravit, ale rozhodně by se nedal použít jen tak jednoduše.

Chlazení

S problémem vysoké spotřeby energie a potažmo i použitím vysokých teplot u plazmového meče nám vznikají velké nároky na chlazení jeho jílce. Ve filmech můžeme sledovat, jak ho drží postavy rukou, což by bylo neuskutečnitelné bez nějakého chlazení. U plazmového meče probíhá svým způsobem aktivní chlazení natahováním vzduchu z okolního prostředí, ale u této konstrukce si pak budeme úmyslně produkovat další teplo, což chlazení nepomůže.

Stoupající spotřeba energie nám vadí kvůli odporům součástí, kterými poteče elektrický proud. V extrémním případě by se nám mohlo podařit i součástky vypařit. Odpor alespoň některých součástí by se dal anulovat, pokud by se podařilo objevit ultra-vysokoteplotní supravodiče supravodivé za pokojových teplot. V současné době známé látky, tzv. vysokoteplotní supravodiče, mají potřebné vlastnosti při teplotách kolem kapalného dusíku. Bylo by samozřejmě možné mít uvnitř chladič systém, který by chladil obvody na nižší teplotu, ale tím pádem by bylo chlazení ještě složitější.

Pro chlazení potřebujeme nějak odvádět teplo pryč z jílce. K tomu je potřeba nějaké chladič médium. V případě přítomnosti okolní atmosféry se dá použít okolní vzduch či voda. V případě souboje ve vzduchoprázdném vesmíru narazíme na další problém. Nejspíše by ale tak jako tak byla potřeba vyvinout nějaký účinný systém chlazení pomocí cirkulace chladič kapaliny, která by se vypařovala do okolního prostředí a měla by vysoké latentní teplo varu a teplotu varu o nějaké rozumné nízké hodnotě. Tím zase narazíme na problém s doplňováním kapaliny, kterou nikdy Jediové doplňovat nemuseli.

Závěr

Dokonalou kopii světelného meče z Hvězdných válek nejspíš nikdy nebude možné vyrobit kvůli velkému množství požadavků, které musí zároveň splňovat. Vyrobit kopii, která alespoň vypadá podobně jako meče ve filmech, se dá relativně jednoduše a jsou o tom desítky internetových stránek. Vyrobit něco, co by se mu funkčně blížilo, je dosti ošemetná věc a i když se Michio Kaku v seriálu tváří, že nejsme tak daleko od jeho realizace, tak nám v cestě stojí ještě spousta technických problémů. Pokud by ale někdo hodlal věnovat do vývoje světelného meče pár miliard dolarů, tak věřím, že za deset, dvacet let by mohl mít relativně dobře funkční výrobek.

Úloha VI.1 . . . tref svojí družici

Máme malý míček o poloměru r těsně nad míčem o poloměru R . Nejspodnější bod spodního míče je ve výšce h nad zemí. Oba míčky pustíme. Do jaké nejvyšší výšky může vystoupit horní míček? Uvažujte, že všechny srážky jsou dokonale pružné. Bez újmy na bodech můžete považovat hmotnost horního míčku za zanedbatelnou.

Bonus Postup zobecněte na N míčků. (Stále můžete uvažovat, že hmotnost míčku výše je zanedbatelná oproti míčku pod ním.)

Jde o klasickou úlohu řešící srážky tuhých těles. Proto použijeme zákony zachování hybnosti a energie:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv'^2, \\ Mv - mv &= Mv_0 + mv',\end{aligned}$$

kde v značí rychlosti koulí před dopadem, v' rychlost malé koule po odrazu a v_0 rychlost velké koule po odrazu, rychlosti považujeme za kladné, směřují-li vzhůru. Rovnice můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M(1 + m/M)v^2 &= \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv'^2, \\ M(1 - m/M)v &= Mv_0 + mv' .\end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme $v_0 = (1 - m/M)v - m/Mv'$ a dosadíme do první

$$\frac{1}{2}M(1 + m/M)v^2 = \frac{M}{2} \left((1 - m/M)v - m/Mv' \right)^2 + \frac{1}{2}mv'^2 .$$

Protože se nám odečtou členy nejvyššího řádu tj. $(M/m)^0$, musíme ponechat všechny členy úměrné m/M , ale můžeme zanedbat členy $(m/M)^2$. Umocněním a použitím aproximace dostáváme výsledek

$$v' = 3v .$$

Stejného výsledku bychom docílili, pokud bychom si uvědomili, že rychlost malé kuličky vůči velké kuličce v okamžiku odrazu je $2v$ a tato rychlost pouze změní znaménko, proto je rychlost odrazu $3v$ vůči zemi.

Protože jsme na počátku uvažovali volný pád, platí $v = \sqrt{2hg}$ a $v' = \sqrt{2h'g}$. Z toho vyplývá, že $h' = 9h$, tedy těžiště kuličky vystoupí do devítinásobné výšky měřeno od nejnižší polohy těžiště. Těžiště kuličky proto vystoupí do výšky $H = 9\sqrt{2hg} + 2R + r$.

Budeme-li uvažovat n koulí, tak bude platit $v_n = 2v_{n-1} + v$. Dosadíme-li tento rekurentní vztah do sebe, zjistíme, že jde o geometrickou posloupnost s koeficientem $q = 2$, jejíž součet je $v_n = (2^n - 1)v$. Proto n -tá kulička se odrazí do výšky $h_n = (2^n - 1)^2 h$. Ale k poslednímu odrazu došlo ve výšce odpovídající součtu průměrů kuliček. Proto

$$H_n = (2^n - 1)^2 h + 2(R_1 + R_2 + \dots + R_{n-1} + \frac{1}{2}R_n),$$

kde R_n je poloměr horního míčku.

Úloha VI.2 . . . kosmická stanice

Odhadněte, jakou minimální energii musíme dodat kosmické stanici, abychom ji dostali na oběžnou dráhu. Můžete pracovat s hodnotami pro mezinárodní kosmickou stanici ISS, která obíhá Zemi ve výšce cca $h = 350$ km a má celkovou hmotnost přibližně $m = 450$ tun. Vysvětlete, proč je odhad minimální a vyjmenujte alespoň některé fyzikální skutečnosti, které vedou k tomu, že je skutečná spotřeba raket významně vyšší.

Úplně nejmenší energii bychom museli družici dodat, pokud bychom chtěli, aby pouze chvilkově dosáhla výšky oběžné dráhy. Stačí najít rozdíl potenciální energie mezi místem odpalu (výška r) a místem o danou výšku h nad ním. To umíme, protože známe předpis pro gravitační potenciální energii $\varphi = -mGM/r$, takže nám stačí spočítat výsledek vztahu

$$E_p = \varphi r + h - \varphi r = -mGM \left(\frac{1}{r+h} - \frac{1}{r} \right).$$

V celé úloze budeme uvažovat, že startovací rampa je na kulové Zemi o poloměru 6378 km, oběžná dráha je ve výšce 350 km nad Zemí a družice váží 450 t. Tedy úplně nejnižší odhad je $E_p = 1,46 \cdot 10^{12}$ J.

Nicméně družice vystřelená jen s touto energií by se na orbitě moc dlouho neohřála. Musíme totiž přičíst minimálně ještě takovou energii, která je potřeba na urychlení vynášeného objektu na kruhovou rychlost odpovídající správné výšce. Víme, že dostředivou sílu představuje síla gravitační, tudíž kruhovou rychlost vypočteme z rovnosti

$$\frac{mv^2}{r+h} = \frac{GMm}{(r+h)^2},$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r+h}}.$$

Toto můžeme dosadit do vzorce pro kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2(r+h)},$$

z čehož vyjde výsledek $E_k = 1,33 \cdot 10^{13}$ J. Odhad tedy upravíme na $E = 1,48 \cdot 10^{13}$ J. Je vidět, že je mnohem těžší družici urychlit než vystřelit.

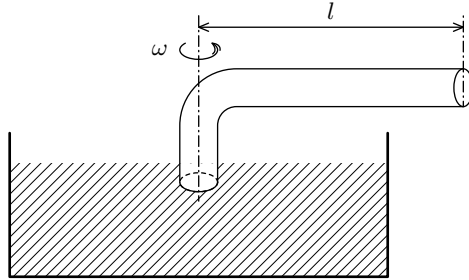
Druhý největší vliv na energii potřebnou k úspěšnému vypuštění družice je hmotnost paliva m_p v raketě. Tu můžeme spočítat z Ciolkovského rovnice jako

$$m_p = m \left(\exp \frac{v}{v_p} - 1 \right),$$

kde v_p je výtoková rychlost paliva. Pro nehmotnou raketu a typickou rychlost $v_p = 3000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ vychází $m_p \approx 5000$ t, jejímž urychlením se raketě předá energie asi $1,6 \cdot 10^{14}$ J, která dosavadní odhady hravě překoná.

Oproti tomu jsou již rozdíly dané hmotností vlastní rakety, potažmo živého nákladu a podobně, opravdu zanedbatelné.

Úloha VI.3 . . . čerpadlo



Obr. 22: Trubice ponořená ve vodě

Mějme zahnutou trubici délky l plnou vody, jejíž spodní konec je ponořen do nádoby (obrázek 6). Trubicí otočíme jednou za čas T . Pod jakým tlakem je nasávána voda z nádoby? Viskozitu vody a tlak sloupce vody ve svislé části zanedbejte.

Máme trubici délky l , s plošným prierezom S , ktorá sa otáča s periódou T . Uvažujeme, že prúdenie v trubici je ustálené a laminárne bez trenia (nulová viskozita) a voda je nestlačiteľná (nemení hustotu s tlakom). Na prúdenie sa budeme pozerat zo sústavy trubice. Keďže sa rýchlosť (vektor!) každého bodu trubice vzhľadom na zem mení, ide o neinerciálnu sústavu. Preto, ak budeme sa pozerat na systém z pohľadu tejto sústavy, budú sa tu vyskytovať fiktívne sily. Vzdialenosť od osi otáčania označíme r . V trubici si vyberieme malý element vody v tvare valčeka s plochou podstavou S a výškou dr , kde jedna podstava sa bude nachádzať vo vzdialenosti r od osi otáčania a druhá podstava sa bude nachádzať vo vzdialenosti $r + dr$ od osi otáčania. Uvažujeme, že priečne rozmery trubice sú oproti pozdĺžnym rozmerom zanedbateľné malé, a teda vzdialenosť všetkých bodov valčeka od osi otáčania bude r . Keďže ide o ustálené prúdenie, rýchlosť tečenia vody sa s časom nemení, a preto výslednica všetkých síl pôsobiacich na valček je nulová. Na valček pôsobia v smere prúdenia tieto sily:¹¹odstredivá sila (sme v neinerciálnej sústave), tlaková sila zozadu a tlaková sila spredu. Keďže všetky sily pôsobia v rovnakom smere môžeme písať skalárne

$$dF = F_p(r) - F_p(r + dr) + \omega^2 r dm .$$

Tlakové sily vyjadríme z tlaku v danom mieste a plochy, na ktorú tlak pôsobí. Hmotnosť valčeka určíme z hustoty vody a objemu valčeka. Uhlová rýchlosť otáčania ω sa vyjadrí ako uhol otočenia za čas (za jednu periódu to je 2π rad). Po dosadení dostávame

$$dF = p(r)S - p(r + dr)S + \frac{4\pi^2 r \rho S}{T^2} dr .$$

¹¹Na valček vody pôsobia aj sily kolmo na smer prúdenia a to Coriolisová sila a sila od steny trubice, ktorá Coriolisovú silu kompenzuje.

Keďže ide o ustálené prúdenie, celková sila dF je nulová. Môžeme preto písať

$$p(r + dr) - p(r) = dp = \frac{4\pi^2 r \varrho}{T^2} dr.$$

Riešením diferenciálnej rovnice separáciou premenných dostávame

$$p(l) - p(0) = \frac{2\pi^2 \varrho l^2}{T^2}.$$

Tlak na konci trubice je rovný atmosférickému tlaku p_{atm} . Preto tlak, pod ktorým je nasávaná voda, je rozdiel tlaku na hladine vody (atmosférický tlak) a tlaku na osi otáčania ($r = 0$). Môžeme písať

$$\Delta p = p_{\text{atm}} - p(0) = p_{\text{atm}} - p(l) + \frac{2\pi^2 \varrho l^2}{T^2} = \frac{2\pi^2 \varrho l^2}{T^2}.$$

Úloha VI.4 . . . kroule

Jaká časť povrchu ľadovej kry tvaru koule trčí nad hladinu? Hustota mořské vody je 1025 kg/m^3 , hustota ľadu 917 kg/m^3 .

Hustotu vody označíme ϱ_V a hustotu ľadu ϱ_L . Polomer našej kryhy bude r , a výška tej časti kryhy (teda výška guľového vrchlíka), ktorá je nad vodou, bude h . Vzorce pre guľový vrchlík je zaujímavé si odvodiť, no je to tabuľková záležitosť,¹² takže sa nimi nebudeme veľmi zaoberať. Pre povrch kryhy nad vodou platí

$$S_K = 2\pi r h,$$

ako sa môžete presvedčiť napríklad integrovaním cez uhol. Objem tohoto vrchlíka je zase

$$V_K = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$$

Na kryhu pôsobia pri rovnováhe dve dôležité sily, ťažová a vztlaková, ktorých veľkosti sa rovnajú. Ťažová sila pôsobí na celý objem V , vztlaková len na ponorený objem $V - V_K$

$$\begin{aligned} \varrho_L V g &= \varrho_V (V - V_K) g, \\ \frac{\varrho_L}{\varrho_V} \frac{4}{3}\pi r^3 &= \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h), \\ 4 \frac{\varrho_L}{\varrho_V} &= 4 - \frac{h^2}{r^2} \left(3 - \frac{h}{r}\right). \end{aligned}$$

Po substitúciách

$$\alpha = \frac{h}{r}, \quad \beta = 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_V}$$

¹²http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_cap

dostaneme kubickou rovnici pro neznámou α

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\beta = 0.$$

Riešit takúto rovnicu je možné, no nie je to vôbec jednoduché, čo je aj dôvod, prečo sa to v škole neučí. Jedna z možností je vybrať si jednu z množstva metód numerického odhadu koreňov.

Po vykreslení¹³ dostaneme tri reálne korene, pričom jeden je záporný a druhý je väčší ako jedna, čo nie je fyzikálne riešenie. Správny koreň je niekde okolo 0,4, čo sa dá určiť z grafu.

Ak by sme chceli presnejšiu metódu, dobrá voľba je Newtonova metóda dotýčnic.¹⁴ Pre funkciu

$$f(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\beta$$

hľadá koreň tým, že ju aproximuje jej dotyčnicou v bode. Zvolí sa počiatkový odhad koreňa α_0 a iteruje sa podľa predpisu

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)},$$

kde čiarka značí deriváciu funkcie f (opäť odporúčam vyhľadať a odvodiť si :)). Táto metóda je zvlášť účinná, ak máte pokročilejšiu kalkulačku s tlačítkom ANS. Výraz hore do nej prepíšete a výskyty α_n nahradíte ANS. V našom prípade by ste po nastavení aktuálneho odhadu zadali výraz

$$\text{ANS} - (\text{ANS}^3 - 3 \times \text{ANS}^2 + 4 \times (1 - 917/1025)) \div (3 \times \text{ANS}^2 - 6 \times \text{ANS}).$$

Stláčaním = potom postupne iterujete až do správneho výsledku, čo je s dostatočnou presnosťou $\alpha = 0,403$. Chceme spočítať pomer S_K ku celkovej ploche kryhy, $4\pi r^2$

$$\eta = \frac{S_K}{4\pi r^2} = \frac{2\pi r h}{4\pi r^2} = \frac{h}{2r} = \frac{\alpha}{2} \approx 0,2.$$

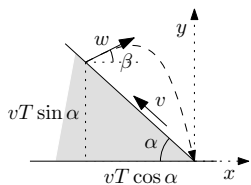
Z povrchu guľatej kryhy teda vidíme asi jednu pätinu.

Úloha VI.5 ... běh na přednášku z eugeniky

Aleš sedí pod kopcem u stanu a surfuje na internetu na svém tabletu, když tu si náhle všimne, kolik je hodin, a uvědomí si, že vlastně chtěl jít na přednášku. Už je tak pozdě, že bude muset celou cestu běžet a nebude moct zastavit, ani aby se vydýchal. Proto se samozřejmě okamžitě rozběhne svou maximální běžecskou rychlostí v do kopce, který má rovnoměrné stoupání α . Po chvíli (čas T) si ale uvědomí, že má v kapse cihlu a že tu cihlu chtěl nechat u stanu. Aleš od sebe umí cihlu hodit jedině rychlostí w . Pod jakým úhlem má cihlu v tom okamžiku vyhodit, aby dopadla na kamaráda, co si právě sedl na jeho místo? Může se stát, že nedohodí? Aleš je hodně rychlý, a proto neuvažujte jeho reakční dobu a ani dobu, kterou vám zabere řešení úlohy.

¹³<http://www.wolframalpha.com/>

¹⁴http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method



Na začátku sedí Aleš v počátku souřadného systému. Cihlu odhazuje v bodě $(x_0, y_0) = vT(-\cos \alpha, \sin \alpha)$. Alešova rychlost je $v(-\cos \alpha, \sin \alpha)$ a v jeho souřadném systému bude odhazovat cihlu rychlostí $w(\cos \beta, \sin \beta)$. V nehybném souřadném systému bude tedy odhazovat rychlostí

$$(w'_x, w'_y) = (w \cos \beta - v \cos \alpha, w \sin \beta + v \sin \alpha).$$

Trajektorie cihly bude

$$(x, y)(t) = (x_0 + w'_x t, y_0 + w'_y t - \frac{1}{2}gt^2).$$

Naším úkolem je vyřešit soustavu rovnic $(x, y)(t; \alpha, \beta, T, v, w) = 0$ pro neznámé t a β , zatímco α, T, v a w jsou parametry.

Z kvadratické rovnice $y(t) = 0$ dostaneme

$$t = \frac{w'_y}{g} + \sqrt{\left(\frac{w'_y}{g}\right)^2 + \frac{2y_0}{g}}.$$

Dosazením do $x(t) = 0$ a rozepsáním w'_x a w'_y dojdeme k

$$-vT \cos \alpha + (w \cos \beta - v \cos \alpha) \left[\frac{w \sin \beta + v \sin \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{w \sin \beta + v \sin \alpha}{g}\right)^2 + \frac{2vT \sin \alpha}{g}} \right] = 0. \quad (11)$$

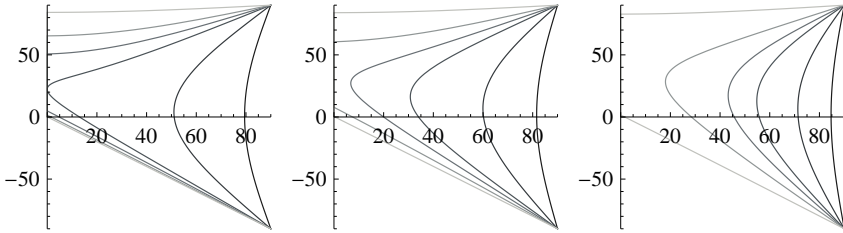
Několika algebraickými úpravami a schováním v, w, g a T do bezrozměrných $Q = w/v$ a $A = gT/v$ dostaneme

$$A(1 + \cos 2\alpha) + 4Q \sin(\alpha + \beta)(\cos \alpha - Q \cos \beta) = 0.$$

Tato rovnice bohužel vede na kvadratickou rovnici v $\sin \beta$ (nebo $\cos \beta$), jejíž monostrožní řešení nám neřekne zhora nic, a proto se uchýlíme k numerickému řešení.

Pro tyto účely je dobré se vrátit k rovnici (11), do které jsme ještě nezanесли neekvivalentními úpravami nesprávná řešení. Po chvíli hraní s touto rovnicí v počítači dojdeme k závěru, že dle očekávání má Aleš buď smůlu a nedohodí, a nebo má na výběr ze dvou různých úhlů β . Taktéž se ukazuje, že pro numerické účely bude vhodnější nehladat β v závislosti na α (0 nebo 2 řešení), ale raději α v závislosti na β (0 nebo 1 řešení). Výsledné grafy (už zase jako $\beta(\alpha)$) jsou na obrázku 23.

Numerické řešení potvrzuje intuici. Pro některé kombinace A a Q lze dohodit pod kopec až pro úhly $\alpha \geq \alpha_{\min}$, přičemž pro $\alpha = \alpha_{\min}$ existuje jeden kýžený úhel $\beta = \beta_{\min}$, zatímco pro $\alpha > \alpha_{\min}$ existují dva úhly $\beta_1 < \beta_{\min} < \beta_2$. Čím větší Q (větší w), tím menší α_{\min} . Čím větší A (delší T), tím větší α_{\min} .



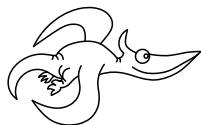
Obr. 23: Numerické řešení pro $A = 0,2; 1; 5$ (zleva doprava)
a $Q = 0,2; 0,7; 1,3; 1,7; 2,5; 10$ (od černé k šedé). Na ose x je úhel α ; na ose y úhel β .

Úloha VI.P . . . paprsky X

Při prosvěcování prstů silným světlem je možno vidět jednotlivé cévy, ale zbytek tkáně se zdá homogenní. Vysvětlete, proč cévy vidět jsou, zatímco kosti ne.

Světlo se při průchodu tkání rozptyluje – tedy zhruba řečeno, jeho šíření už si nemůžeme představit jako paprsek. Světlo po střetu s částičkou látky pokračuje s určitou pravděpodobností všemi směry. Pokud je překážka, zde v podobě kosti, dostatečně hluboko pod povrchem, stihne se i do míst, která by byla vyplněna stínem (pokud bychom nesprávně použili paprsky – geometrickou optiku) dostat světlo rozptýlené na tkáních okolo. Z vnějšku pak nepoznáme, jak se světlo materiálem šířilo a přijde nám, že přichází i z míst, kde je ve skutečnosti kost, a vzniká tak zdánlivá průhlednost. Pokud překážka dostatečně hluboko není, světlo už se do prostoru za ní rozptýlit „nestihne“. Proto cévy, které jsou pod povrchem z té strany, kterou pozorujeme, už vidíme.

Nejsou ale paprsky X jako paprsky X – jak to, že na rentgenu kosti vidíme? Rentgenové záření je na rozdíl od světla, což je označení pro elektromagnetické záření ve viditelném oboru lidského oka, velmi pronikavé a jen tak něčeho si nevšímá. Tkáněmi prochází téměř jakoby tam nebyly – nerozptyluje se. Kostí už pro rentgen viditelné jsou a stíní. Tentokrát ale stín není přebit rozptýleným světlem, a proto jsou kosti na rentgenu dobře vidět. To je samozřejmě velmi zjednodušeně řečeno. Existují i sofistikované diagnostické metody měkkých tkání využívající rentgenové či blízké rentgenové oblasti. Pro náš problém však bohatě stačí popsané přiblížení – je to dobrý příklad toho, jak se materiály chovají odlišně pro různé vlnové délky – tento jev nazýváme dispersí.



Zadání experimentálních úloh

Úloha I.E ... brumlovo tajemství

8 bodů

Změřte co nejmíc (alespoň 3) fyzikálních vlastností a charakteristik želatinových medvídků. Zkoumejte i rozdíly mezi jednotlivými barvami medvídků v pytlíku. Měřit můžete například teplotu tání, Youngův modul pružnosti, mez pevnosti, savost (změna objemu či hmotnosti medvídka po namočení po nějakou dobu), hustotu, vodivost, index lomu, rozpustnost (ve vodě, lihu), změnu některé z předcházejících vlastností při změně teploty či cokoliv jiného vás napadne. (řešení str. 64)

Úloha II.E ... čočkování

8 bodů

V obálce jste spolu se zadáním dostali i dvě čočky. Vaším úkolem je změřit jejich parametry – druh a ohniskovou vzdálenost.

(řešení str. 67)

Úloha III.E ... hopík

8 bodů

Kutálejte hopík po vodorovné podlaze kolmo proti stěně. Při odrazu od stěny hopík vyskočí. Jak závisí vzdálenost bodu dopadu od stěny na počáteční rychlosti hopíku, případně dalších parametrech?

Poznámka Užitečné informace k úloze naleznete ve studijním textu na internetu¹⁵. (řešení str. 73)

Úloha IV.E ... už to bublá!

8 bodů

Změřte účinnost rychlovarné konvice. Údaj o příkonu naleznete obvykle na samolepce zespuďu konvice. Výkon určíte tak, že zjistíte, o kolik stupňů Celsia se zahřál daný objem vody za jednotku času. Pokuste se minimalizovat chybu měření a popište, jak jste se toho snažili dosáhnout.

Varování Rozhodně sami nepoužívejte voltmetr a ampérmetr u tak vysokého napětí a proudu. (řešení str. 75)

Úloha V.E ... kávu si osladím

8 bodů

V obálce vám spolu se zadáním došel i plastový sáček s podezřelým obsahem, je to cukr nebo sladidlo.

Pokuste se co nejlépe experimentálně srovnat „sladkost“ (sladivost) dodaného vzorku a několika dalších různých cukrů a sladidel. Pro odměření množství použijte přiloženou lžičku. „Sladkost“ testovaného vzorku určujte pro koncentraci jedné zarovnané lžičky cukru/sladidla v 1 dl vody. Jako jednotkovou „sladkost“ můžete

¹⁵http://fykos.cz/rocnik25/3-e_std-text.pdf

brát např. rafinovaný řepný cukr (o koncentraci jedné zarovnané lžičky na 1 dl vody). Porovnávat pak můžete tak, že si připravíte roztoky o různé koncentraci známého cukru/sladidla a budete srovnávat chuť těchto roztoků s připraveným roztokem testovaného vzorku. Pro zpřesnění určení „sladkosti“ se domluvíte s nějakými dalšími lidmi, kteří se do srovnávání sladkosti zapojí (ale ne s ostatními řešiteli, ať má každý svoje vlastní řešení). U každého cukru zjistíte co nejpřesněji složení a výsledky vhodně zpracujete.

Nápověda Cukr se dá sehnat řepný rafinovaný (normální bílý cukr, co se obvykle u nás používá), ale je také k sehnání např. třtinový cukr (chemicky téměř jako řepný), hroznový cukr (dextróza; v Glukopuru) a ovocný cukr (fruktóza). Ze sladidel můžeme jmenovat sorbit, huxol, sukralózu (v Cukrenu, Cukravitu), aspartam (v Irbis big sweet). Ke slazení se také používá med. Doporučujeme použít sladidla s řádově podobnou sladivostí (u některých čistých sladidel, co sladí i 600 krát tolik, co obvyčejný cukr, narazíte na problémy s odvažováním).

Varování Každá látka může být při zvýšené spotřebě nebezpečná. I destilovaná voda je jed. Snažte se tedy dodržovat doporučené denní dávky. (řešení str. 79)

Úloha VI.E . . . plechová komprese

7 bodů

Skvělý způsob, jak rozdrtit prázdnou plechovku od coly (pokud se vám ji nechce drtit o svou hlavu a vlastně se vám nechce ji vůbec manuálně drtit), je kápnout na dno trochu vody, trochu utěsnit otvor v ní a dát ji na vařič zahřát. Když ji pak rychle ponoříte do studené vody, tak se vám s trochu šikovnosti krásně zdrtí. Vyzkoušejte si to a vyzkoušejte to i bez toho, že by v plechovce byla voda. Vysvětlíte, proč to funguje jinak s vodou a bez ní, a zkuste svoji plechovku zdrtit na co nejmenší objem vůči původnímu. Ten změřte a popište podmínky, při kterých se vám to podařilo. Pošlete fotky zdrčených plechovek.

Pozor Při děláni pokusu k úloze se nespalte!

(řešení str. 83)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I.E ... brumlovo tajemství

Změřte co nejvíc (alespoň 3) fyzikálních vlastností a charakteristik želatinových medvídků. Zkoumejte i rozdíly mezi jednotlivými barvami medvídků v pytlíku. Měřit můžete například teplotu tání, Youngův modul pružnosti, mez pevnosti, savost (změna objemu či hmotnosti medvídká po namočení po nějakou dobu), hustotu, vodivost, index lomu, rozpustnost (ve vodě, lihu), změnu některé z předcházejících vlastností při změně teploty či cokoliv jiného vás napadne.

Po bližším prozkoumání trhu jsme zjistili, že existují minimálně dva druhy, které se na první pohled v některých vlastnostech zásadně liší. Koupili jsme si tedy medvídky Jojo a Haribo a podrobili je zkoumání.

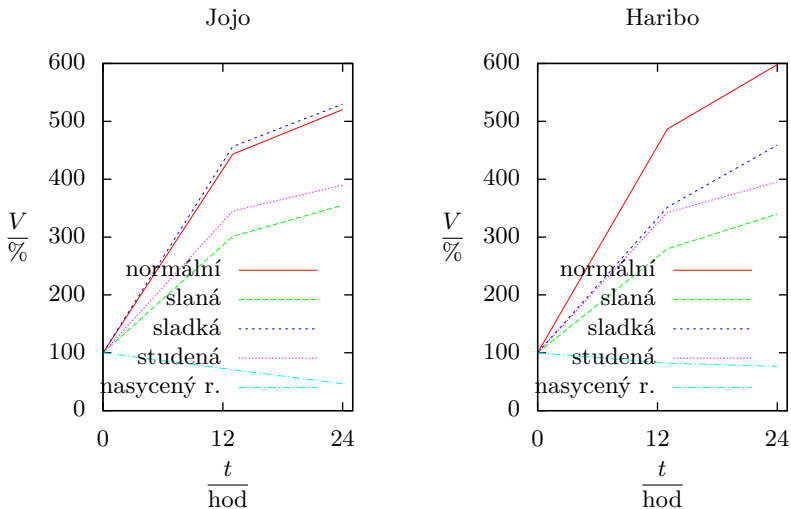
Změna objemu

O medvídkách je známo, že když se dají do vody, zvětší svůj objem. Medvídká jsme považovali přibližně za kvádr a měřili jeho tři rozměry, se zanedbáním např. hodně vycňívajících oušek. Zkoušeli jsme také medvídky ořezat na kvádr, ale ke zlepšení přesnosti to moc nepomohlo. Z těchto údajů jsme vypočítali objem medvídká – sice přibližný, ale pro podstatu pokusu – ukázání zvětšení v různých kapalinách – dostatečný. Medvídky jsme dali do vody z kohoutku, do vody v ledničce, do oslazené a osolené vody a do nasyceného solného roztoku a změřili je po 13 a 24 hodinách. Výsledky pro všechny tekutiny jsou v tabulce 1; medvídci naložení v nasyceném solném roztoku měli po 13 hodinách 82 % (Haribo) a 71 % (Jojo) původní velikosti, po 24 hodinách 77 % (Haribo) a 47 % (Jojo), tedy zmenšili se.

	Prostředí	0 hod	13 hod					24 hod				
		V mm ³	a mm	b mm	c mm	V mm ³	%	a mm	b mm	c mm	V mm ³	%
Jojo	normální	2761	34	24	15	12240	443	38	21	18	14364	520
	slaná	2761	32	20	13	8320	301	35	20	14	9800	355
	sladká	2761	35	24	15	12600	456	39	25	15	14625	530
	studená	2761	34	20	14	9520	345	36	23	13	10764	390
	nasycený ☉	2761	23	13	7	1950	71	21	11	6	1283	47
Haribo	normální	2384	34	20	18	11603	487	36	22	18	14256	598
	slaná	2384	28	17	14	6664	280	30	18	15	8100	340
	sladká	2384	29	17	17	8381	352	32	19	18	10944	459
	studená	2384	30	17	16	8160	342	31	19	16	9424	395
	nasycený ☉	2384	18	9	9	1425	82	18	9	9	1331	77

Tabulka 1: Naměřené hodnoty (sloupec % udává poměr nového a původního objemu)

Z našeho pokusu vyplynulo několik věcí – medvídek se v ledničce moc nezvětší a zůstane i docela tvrdý. Zjistili jsme taky zásadní rozdíly ve zvětšování v různých kapalinách. Želatinový medvídek i slaná voda jsou stejnorodé směsi (roztoky) „něčeho“ – rozpuštěné látky a vody – rozpouštědla. Výroba medvídků začíná právě směsí želatiny a vody (a zbytku). Želatina je tvořená řetězovými molekulami, které se vzájemně proplétají, a jak směs chladne a voda se dostává ven, tvrdne a vznikne medvídek. Haribo zjevně obsahují méně vody než Jojo – jsou tužší a hůř se deformují. Slaný roztok, na rozdíl od želatinového, obsahuje mnohem méně pevné látky, sůl navíc netvoří žádné propletené řetízky (to je taky částečně důvod, proč slaná voda zůstává tekutina a želatinový roztok tuhne).



Obr. 24: Rozpouštění medvídků

Když se dají dva roztoky k sobě, voda bude mít tendenci se přesouvat z hustšího do řidšího, tento jev se nazývá *osmóza*. Vodu pohání osmotický tlak. Když ponoříte medvídka do vody s málo rozpuštěnými molekulami (např. do destilované), voda se nahrne do medvídka a zvětší ho. Když dáte medvídka do vody, která obsahuje hodně molekul něčeho rozpuštěného (více než medvídek), voda se z medvídka uvolní. Když voda putuje do medvídka, medvídek se zvětšuje; když se z něj uvolňuje, medvídek vypadá stejně. Pokud tedy namícháme hodně slaný roztok, který bude obsahovat víc částic než medvídek, medvídek se zmenší kvůli malému osmotickému tlaku.

Také jsme zjistili, že medvídci jsou potom hrozně oslizlí a upadávají jim uši; ve studené vodě drží trochu víc pohromadě.

Index lomu

Změřit index lomu třeba nějaké tekutiny nebo skla není moc složité – vystačíte si s laserem a použitím Snellova zákona. Bohužel gumoví medvídci mají také tu vlastnost, že světlo značně rozptylují, a to i tenké kousky. Kvůli značnému rozptylu světla se nám nepodařilo index lomu změřit.

Měření měrného elektrického odporu

Další měření, které jsme prováděli, bylo měření elektrického odporu.

Měrná elektrická vodivost je

$$\varrho = \frac{RS}{l},$$

kde R je odpor medvídka průřezu S a tloušťky l , přičemž $R = U/I$, kde U je napětí zdroje, ke kterému je medvěd celou svou plochou připojen, a I je proud medvědem procházející. Tedy

$$\varrho = \frac{US}{lI}.$$

Postup měření byl následující: do elektricky izolovaných čelistí svěraku byly umístěny dvě hliníkové desky a mezi ně byl vložen medvěd tak, aby utahováním svěraku docházelo k jeho deformování mezi rovnoběžnými měděnými destičkami. Medvěd byl takto stlačen na tloušťku $l = (1,00 \pm 0,05)$ mm, přičemž se mezi destičkami velmi roztáhl do strany. Při této tloušťce již bylo možné zanedbat nerovnost povrchu medvěda, jelikož byl z obou stran celou plochou přilepen k deskám.

Destičky byly později připojeny ke stabilizovanému zdroji napětí $U = 12$ V a byl změřen proud I procházející medvědem. Dále bylo třeba změřit i plochu S , kterou se medvěd dotýká desek. Z toho důvodu byla po měření proudu jedna z desek obarvena barvou a zdeformování medvěda na požadovanou tloušťku opakováno. Dále byl medvěd od desky opět odlepen a na desce byl jasně viditelný jeho původní obtisk, jehož obsah byl poté změřen pomocí spočítání čtverečků milimetrového papíru. Z několika měření byla určena průměrná hodnota této plochy na $\bar{S} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Stejně tak hodnota měřeného proudu se u jednotlivých medvídků příliš nelišila, průměrně byla asi $\bar{I} = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ A}$. Z těchto naměřených hodnot byl poté podle výše uvedeného vztahu určen měrný elektrický odpor na $5,0 \cdot 10^5 \Omega \cdot \text{m}$.

Pevnost

Medvídek je (alespoň se ze začátku snaží být) pevná látka. Jednou z možných charakteristik pevných látek je mez pevnosti, která vyjadřuje odolnost látky vůči vnějším silám. Je to nejvyšší hodnota normálového napětí σ_n , kdy látka ještě drží pohromadě, není porušená nebo přetržená. Normálové napětí lze určit jako podíl deformující síly F a kolmého průřezu S medvídka na začátku:

$$\sigma_n = \frac{F}{S}.$$

Při měření jsme medvídkovi změřili obvod a z něj vypočítali plochu; upevnili jsme ho do stojanu a zavěšováním závaží zjišťovali, při jak velké síle dojde k přetržení. Bohužel medvídek je z příliš kluzkého a špatně upevnitelného materiálu,

kteří nedovoluje určit hledané konstanty příliš přesně – výsledkem našeho snažení je tedy řádový odhad. Mez pevnosti pro medvídko Haribo je řádově 250 kPa a 65 kPa pro Jojo. Jojo medvídci mají mez pevnosti menší, to jde poznat i bez měření – Jojo medvídek jde roztrhnout lépe.

Úloha II.E ... čočkování

V obálce jste spolu se zadáním dostali i dvě čočky. Vaším úkolem je změřit jejich parametry – druh a ohniskovou vzdálenost.

Každý řešitel obdržel pro změření jinou dvojici čoček, naměřené hodnoty tedy nebudou v tomto řešení uvedeným hodnotám odpovídat.



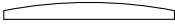



V této úloze budeme uvažovat pouze tenké čočky, tedy takové čočky, jejichž tloušťka je malá oproti křivosti lámavých ploch. Navíc zanedbáme vady čoček (chromatickou vadu, sférické zkreslení, koma).

Druhy čoček

Existují dva druhy kulových čoček – spojky a rozptylky. Odlišit je od sebe na první pohled je jednoduché, spojky jsou ve středu tlustší než na kraji, rozptylky právě naopak. Další odlišnost získáme pohledem skrz čočku na blízký předmět. V případě spojky bude předmět zvětšen (spojky se používají jako lupy), skrz rozptylku uvidíme předmět naopak zmenšený. Třetí, na první pohled viditelný rozdíl, je v orientaci obrazu. Podíváme-li se skrz spojku na vzdálený předmět tak, abychom jej viděli ostře, budeme předmět vidět převrácený (a zmenšený), zatímco u rozptylky bude přímý (a též zmenšený).

Čočky dále diferencujeme podle jejich tvaru, viz tabulka 2.

Tabulka 2: Rozdělení čoček podle tvaru

Spojky		Rozptylky	
	dvojvypuklá (bikonvexní)		dvojdutá (bikonkávni)
	ploskovypuklá (plankonvexní)		ploskodutá (plankonkávni)
	dutovypuklá (konkávkonvexní)		vypuklodutá (konvexkonkávni)

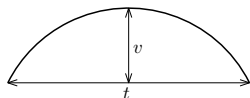
Kromě kulových čoček existují i jiné druhy: asférické čočky (používané třeba v objektivě fotoaparátů), Fresnelovy čočky (najdeme je třeba v reflektorech, zpětných projektorech, na majácích apod.) atd. Těmi se však dále nebudeme zabývat.

Výpočet ohniskové vzdálenosti z poloměrů křivosti

Podají-li se nám změřit poloměry křivosti R_1 a R_2 obou ploch čočky (pro rovné plochy čoček je střed křivosti v nekonečnu, tedy např. $1/R_1 = 0$) a víme-li, z jakého

materiálu je daná čočka vyrobena (známe tedy index lomu n tohoto materiálu), můžeme ohniskovou vzdálenost f (resp. optickou mohutnost D) této čočky spočítat ze vztahu

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right).$$



Obr. 25: Výpočet poloměru křivosti

Zjistit poloměry křivosti je možné přímo u vypuklých ploch čoček. Upevníme čočku kolmo nad milimetrový papír a čočku z větší vzdálenosti (kvůli omezení vlivu perspektivy) takto kolmo na milimetrový papír vyfotíme. Na fotografii určíme výšku v a délku tětivy l (viz obrázek 25) a poloměr plochy spočítáme jako

$$r = \frac{v^2 + \frac{l^2}{4}}{2v}.$$

Je zřejmé, že tuto metodu můžeme použít pouze u vypuklých ploch čoček. U dutých zakřivených ploch budeme muset použít složitější metodu měření. Využijeme toho, že část světla se na této ploše odrazí, a ta se tak chová jako duté zrcadlo. Umístíme-li před takovou čočku předmět, vznikne na téže straně čočky skutečný (tedy převrácený) obraz tohoto předmětu. Ze vzdálenosti předmětu a obrazu od zrcadla dokážeme určit jeho ohniskovou vzdálenost, a tedy i poloměr křivosti.

Nicméně stále neznáme index lomu materiálu, ze kterého je čočka vyrobena, tedy nemůžeme určit její ohniskovou vzdálenost. Tato metoda je tedy vhodná spíše pro určení indexu lomu po změření ohniskové vzdálenosti některou z dalších metod.

Teorie

Budeme používat následující znaménkovou konvenci:

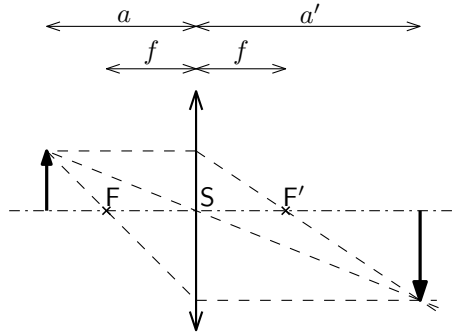
- ohnisková vzdálenost (označovaná f) spojky je kladná, rozptylky záporná,
- předmětová vzdálenost a je vždy kladná,
- vzniká-li obraz na opačné straně čočky, než se nachází zobrazovaný předmět, je obrazová vzdálenost a' kladná,
- vzniká-li obraz na stejné straně čočky, na níž leží předmět, je obrazová vzdálenost a' záporná.

Pro zobrazování tenkými čočkami platí zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'},$$

kde f je ohnisková vzdálenost čočky, a je vzdálenost předmětu od středu čočky a a' je vzdálenost obrazu od středu čočky. Při použití výše zmiňované znaménkové konvence tato rovnice platí pro zobrazování tenkou spojkou i pro zobrazování tenkou rozptylkou.

Je vidět, že a a a' můžeme zaměnit, platí tedy princip záměnnosti předmětu a jeho obrazu.



Obr. 26: Měření polohy předmětu a jeho obrazu

Měření ohniskové vzdálenosti spojky – teorie

Měření pomocí polohy předmětu a jeho obrazu

Po upravení zobrazovací rovnice dostáváme vztah pro ohniskovou vzdálenost (označení viz obrázek 26)

$$f = \frac{aa'}{a + a'}$$

tedy pro určení ohniskové vzdálenosti potřebujeme změřit vzdálenost předmětu od optického středu čočky a vzdálenost jeho obrazu od optického středu čočky. Jako předmět můžeme použít například svíčku, kterou umístíme do vzdálenosti a od optického středu čočky. Na opačné straně čočky pohybuje se stínítkem, dokud na něm nedostaneme ostrý obraz svíčky. Poté změříme vzdálenost a' stínítka od optického středu čočky. Pro větší přesnost je vhodné toto měření opakovat pro různé hodnoty vzdálenosti a .

Přímé měření ohniskové vzdálenosti

Ze zobrazovací rovnice je zřejmé, že je-li $a \gg a'$ (paprsky jdoucí od předmětu jsou téměř rovnoběžné), bude platit $f \approx a'$. Pokud jako předmět použijeme např. Slunce, paprsky se spojí přibližně přímo v ohnisku. V tomto případě navíc není třeba zobrazovat žádný předmět – posvítíme-li kolmo do čočky rovnoběžným svazkem dostatečného průměru (např. laserovým), spojí se také v ohnisku.

Besselova metoda

Besselova metoda měření ohniskové vzdálenosti spojky využívá principu záměnnosti chodu paprsků. Zvolíme při ní pevnou vzdálenost d (musí platit $d > 4f$, tedy d volíme dostatečně velké) předmětu a stínítka. Existují dvě polohy čočky mezi předmětem a stínítkem, při nichž se na stínítku zobrazí ostrý obraz předmětu. Vzdálenost s těchto poloh změříme. Všimněme si, že v tomto případě měříme jen změnu polohy čočky, nikoliv absolutně její polohu, čímž eliminujeme chybu určení optického středu čočky.

Zvolíme-li označení podle obrázku 27, platí $a_1 = -a'_2$ a $a'_1 = -a_2$. Dále s ohledem na znaménkovou konvenci platí

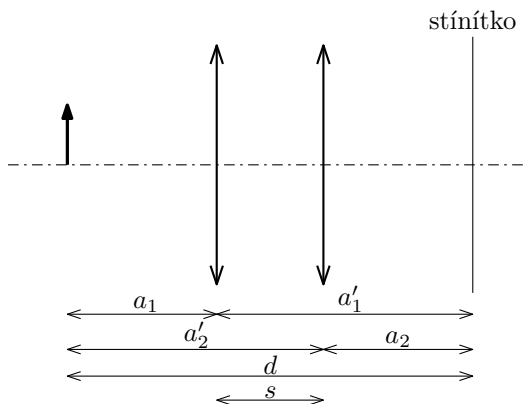
$$\begin{aligned}d &= a'_1 - a'_2 = a'_2 - a_2, \\s &= a'_1 - a'_2,\end{aligned}$$

odkud

$$a'_1 = -\frac{1}{2}(d + s), \quad a_1 = \frac{1}{2}(d - s),$$

z čehož již můžeme spočítat ohniskovou vzdálenost

$$f = \frac{d^2 - s^2}{4d}.$$



Obr. 27: Schématické znázornění Besselovy metody

Měření pomocí zvětšení

Změřit ohniskovou vzdálenost čočky je možné i pomocí určení jejího zvětšení. Pro zvětšení Z platí

$$Z = -\frac{a'}{a} = -\frac{f}{a - f},$$

odkud

$$f = \frac{a'}{1 + Z} = \frac{aZ}{1 + Z}.$$

Zvětšení zjistíme jako poměr velikostí předmětu a obrazu, tedy jako předmět zvolíme např. milimetrové měřítko a stínítka též opatříme milimetrovým měřítkem. Jestliže se n dílků stupnice na stínítku kryje s n' dílky zobrazované stupnice, zvětšení určíme jako $Z = n/n'$.

Měření ohniskové vzdálenosti spojky – experiment

Nyní k samotnému experimentu. Měřena byla ohnisková vzdálenost neznámé tenké spojky podobné těm, které byly rozesílány spolu se zadáním. Pro měření byla použita Besselova metoda. Pro několik různých vzdáleností d předmětu (čelovky) od stínítka (zdi) byly hledány takové polohy spojky, kdy se na zdi zobrazil ostrý obraz diod čelovky. Byly změřeny vzdálenosti a'_1 a a_2 (označení viz obrázek 27). Jelikož nás zajímá pouze rozdíl těchto vzdáleností, byly měřeny od okraje čočky, čímž jsme se vyhnuli chybě při určování optického středu čočky. Z naměřených hodnot pak byla určena ohnisková vzdálenost měřené čočky na $(28,1 \pm 0,6)$ cm.

Tabulka 3: Naměřená data pro určení ohniskové vzdálenosti spojky

n	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{ a'_1 }{\text{cm}}$	$\frac{ a_2 }{\text{cm}}$	n	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{ a'_1 }{\text{cm}}$	$\frac{ a_2 }{\text{cm}}$
1	230	197	33	7	170	134	35
2	220	187	34	8	160	123	36
3	210	177	34	9	150	112	37
4	200	166	34	10	140	102	38
5	190	156	34	11	130	89	41
6	180	145	35	12	120	76	44

Měření ohniskové vzdálenosti rozptylky – teorie

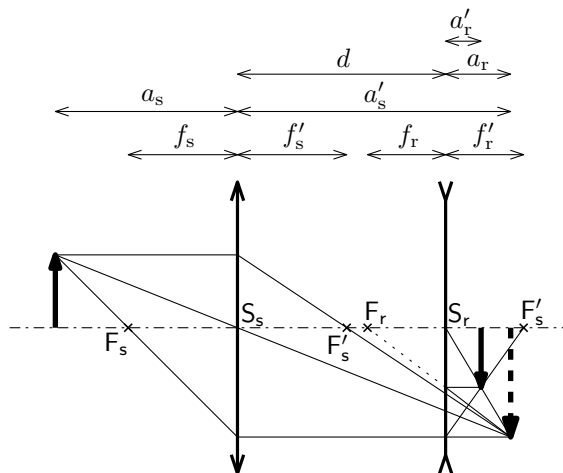
Změřit ohniskovou vzdálenost rozptylky není možné pomocí vzdálenosti obrazů, jelikož obraz zobrazený rozptylkou není skutečný, nelze jej tedy zachytit na stínítko. Využijeme principu záměnnosti předmětu a jeho obrazu. Vytvoříme spojkou skutečný obraz, který bude sloužit jako zdánlivý předmět pro zobrazení rozptylkou. Ta pak vytvoří skutečný obraz, lze jej tedy zachytit na stínítku (chod paprsků viz obrázek 28).

Z obrázku je zřejmé, že platí $a_r = d - a'_s$ (vzdálenost a_r je dle zmiňované znaménkové konvence záporná). Dosadíme-li do zobrazovací rovnice, dostáváme vztah pro výpočet ohniskové vzdálenosti rozptylky

$$f_r = \frac{a'_r a_r}{a_r + a'_r} = \frac{a'_r (d - a'_s)}{d - a'_s + a'_r}.$$

Máme dvě možnosti, jak postupovat při měření. Můžeme změřit vzdálenost a'_s , tedy vzdálenost ostrého obrazu na stínítku od spojky. Poté mezi stínítko a spojku umístíme rozptylku. Dále pohybem rozptylky (ne ve všech polohách rozptylky vzniká obraz) a stínítka nalezneme ostrý obraz a změříme vzdálenosti a'_r (vzdálenost obrazu od spojky) a d (vzdálenost spojky a rozptylky).

Druhou možností je změřit pouze vzdálenosti a_r a a'_r . Opět je vhodné měření opakovat pro různé a_s a d .



Obr. 28: Schématické zobrazení soustavy spojky a rozptylky

Měření ohniskové vzdálenosti rozptylky – experiment

Popisovanou metodou byla měřena ohnisková vzdálenost tenké rozptylky. Jako předmět byla opět použita čelovka a hledal se ostrý obraz diod. Všechny vzdálenosti byly měřeny právě od diod čelovky. Nejprve byla do určité vzdálenosti a_s vložena spojka a změřena vzdálenost $a_s + a'_s$. Poté byla mezi spojku a ostrý obraz vložena rozptylka do vzdálenosti $a_s + d$ a byla změřena vzdálenost $a_s + d + a'_r$ ostrého obrazu vytvořeného rozptylkou od předmětu. Z naměřených hodnot byla určena ohnisková vzdálenost měřené rozptylky na $(-12,0 \pm 1,1)$ cm. Je vidět, že chyba měření je v tomto případě velká, protože jsme měřili čtyři vzdálenosti, což bylo v podstatě zbytečné (stačilo změřit vzdálenosti a_r a a'_r), a všechny byly zaokrouhleny na centimetry.

Diskuse a chyby měření

Při měření ohniskové vzdálenosti čočky většinou měříme vzdálenosti, které při popisovaných měřeních nabývají hodnoty od několika centimetrů až po několik metrů. Je vidět, že zvolíme-li větší vzdálenosti, chyba měření bude menší.

Abychom měření zpřesnili, je třeba měření opakovat pro různé počáteční podmínky (např. pro různé vzdálenosti předmětu od čočky při měření ohniskové vzdálenosti spojky pomocí polohy předmětu a jeho obrazu). Z každého měření spočítáme ohniskovou vzdálenost, určíme aritmetický průměr a odchylku.

U některých popisovaných metod je třeba měřit vzdálenosti od optického středu čočky. Ten však nemusí být vždy jednoduše přesně určitelný. U měření ohniskové vzdálenosti spojných čoček tuto chybu eliminuje Besselova metoda, u níž měříme pouze změnu polohy čočky. V popisované metodě měření ohniskové vzdálenosti rozptylky je však třeba polohu optického středu odhadnout. Pro přesnější měření

Tabulka 4: Naměřená data pro určení ohniskové vzdálenosti rozptylky

n	$\frac{a_s}{\text{cm}}$	$\frac{a_s + a'_s}{\text{cm}}$	$\frac{a_s + d}{\text{cm}}$	$\frac{a_s + d + a'_r}{\text{cm}}$
1	50	89	80	113
2	50	89	82	99
3	50	89	84	93
4	60	94	87	105
5	60	94	90	96
6	60	94	91	95
7	70	102	92	137
8	70	102	94	116
9	70	102	95	111
10	80	110	100	153
11	80	110	102	126
12	80	110	105	114

ohniskové vzdálenosti rozptylky je možné použít spojku, jejíž ohniskovou vzdálenost známe nebo jsme ji změřili přesnější metodou.

Úloha III.E ... hopík

Kutálejte hopík po vodorovné podlaze kolmo proti stěně. Při odrazu od stěny hopík vyskočí. Jak závisí vzdálenost bodu dopadu od stěny na počáteční rychlosti hopíku, případně dalších parametrech?

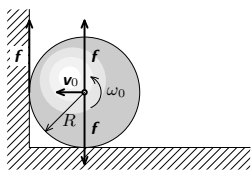
Poznámka Užitečné informace k úloze naleznete ve studijním textu na internetu¹⁶.

Teorie

Budeme uvažovat, že hopík ve tvaru koule o poloměru R , tedy momentu setrvačnosti $I = \frac{2}{5}mR^2$, se kutálí bez prokluzování a srážka: a) je dokonale pružná, b) probíhá s energetickými ztrátami. Před nárazem do stěny má rychlost v_0 a tedy i obvodová rychlost je v_0 .

V okamžiku počátku nárazu, který trvá sice krátkou, ale nenulovou dobu, musí bod nárazu hopíku na stěnu zůstat v klidu, aby byl splněn předpoklad neprokluzování. Po zbytek doby nárazu se bude materiál chovat jako pružinka – „nahrne se“ blízko bodu dotyku, což odpovídá stlačení pružinky. Do této deformace se přelije kinetická energie rotace $E_r = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{5}mv_0^2$, která se v případě a), kdy je srážka pružná, zachová, v případě b) budeme uvažovat koeficient restituice k (viz. dále). Při zpětné deformaci („reformaci“ :) tedy působí síla tečná k povrchu hopíku, která bude mít jak translační, tak rotační účinek.

¹⁶http://fykos.cz/rocnik25/3-e_std-text.pdf



Obr. 29: Rozklad sil při odrazu od stěny

Zde uijíme známý figl – do těžiště si umístíme dvě síly stejné velikosti a opačného směru (svisle nahoru a svisle dolů, viz obrázek 29), což zcela jistě můžeme udělat. Velikost každé z těchto dvou sil budiž rovna v každém okamžiku síle f , která vzniká z odpružení hopíku. Pak bude mít svislá síla spolu se silou působící tečně k hopíku čistě rotační účinek, síla mířící vzhůru translační účinek. Bude platit $fR = I\dot{\omega}$ a $f = m\dot{v}$. Jinými slovy, hopíku bude udělen impuls momentu síly $F = J\Delta\omega = Rm\Delta v = Rmv$, a protože původní vertikální rychlost byla nulová, platí $\Delta v = v$. Z tohoto vztahu si napíšeme úhlovou rychlost po odrazu $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$ – impuls působí v opačném směru než je směr původní rotace, proto $\Delta\omega$ odečítáme.

Nyní již máme vše připravené, abychom udělali energetickou bilanci pro oba naznačené případy:

- a) V případě dokonale pružné srážky se veškerá mechanická energie zachovává. Rotační energie se přelije do vertikální rychlosti a rotace, tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{5}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I(\omega_0 - \Delta\omega)^2 = \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_0}{r} - \frac{rm}{I}v\right)^2, \end{aligned} \quad (12)$$

z čehož si již můžeme napsat samotnou vertikální rychlost, kterou bude hopík po odrazu mít

$$v = \frac{4}{7}v_0.$$

Poletí vzduchem dobu $t = 2v/g$, kde g je tíhové zrychlení. Po tuto dobu se bude pohybovat horizontální rychlostí v_0 – ta se po odrazu zjevně zachovala v důsledku pružnosti srážky, energetickou bilanci netřeba rozepisovat. Dostáváme hledaný vztah mezi počáteční rychlostí v_0 a vzdáleností místa odrazu a místa, kam míček dopadne d .

$$d = \frac{8v_0^2}{7g}. \quad (13)$$

- b) Nyní budeme uvažovat, že dochází k jistým energetickým ztrátám, které popíšeme tzv. *koeficientem restituace* k . Ten definujeme jako poměr mechanické energie po nárazu ku mechanické energii před nárazem $k \stackrel{\text{def}}{=} E/E_0$. Energetickou bilanci rotační energie (12) upravíme na

$$k\frac{1}{5}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_0}{r} - \frac{rm}{I}v\right)^2 \quad (14)$$

a pro horizontální složku rychlosti resp. původní translační složku energie máme

$$k\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_h^2.$$

Hopík se bude pohybovat směrem od stěny rychlostí v_h po čas, který spočteme stejně jako v předchozím případě $t = 2v/g$, kde za v dosadíme z (14),

$$t_k = \frac{2v_0 \left(10 + \sqrt{100 - 140(1 - k)} \right)}{35g},$$

do vzdálenosti

$$d_k = v_h \cdot t = \frac{2v_0^2 \sqrt{k} \left(10 + \sqrt{100 - 140(1 - k)} \right)}{35g}. \quad (15)$$

Měření

Po rovném stole jsme posílali míček proti zdi tak, aby neprokluzoval. Z dostatečně velké vzdálenosti jsme děj natáčeli a ze záznamu jsme pak určili vzdálenost dopadu i rychlost (ke stolu bylo přiděleno pásmo, takže obraz se dal snadno zkalibrovat). Frekvence snímkování byla 35 snímků za sekundu. Délku jsme byli schopní určit s přesností $\pm 0,5$ cm. V tabulce 5 jsou zapsány spočtené rychlosti těsně před nárazem a naměřené vzdálenosti dopadu.

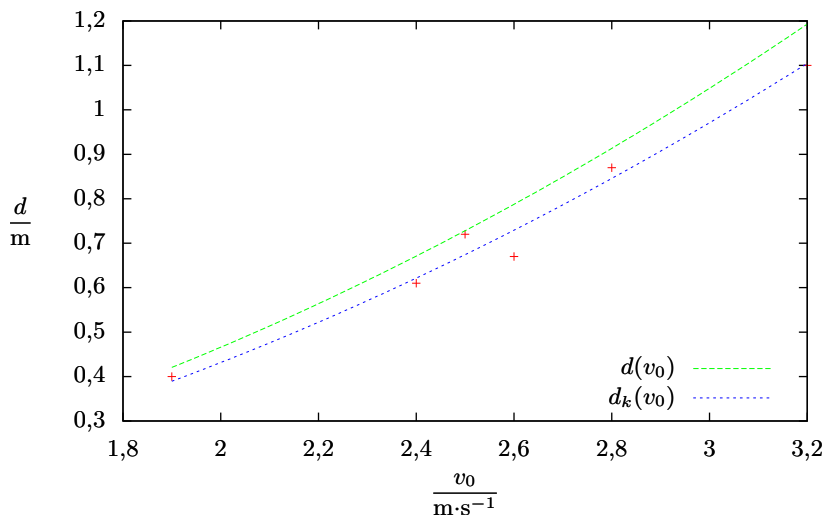
Tabulka 5: Naměřená data

v_0 ms ⁻¹	d m
2,8	0,87
1,9	0,4
3,2	1,1
2,6	0,67
2,4	0,61
2,5	0,72

Hodnoty vynesené v grafu na obrázku 30 jsou jednak proloženy funkcí $d(v_0)$, která odpovídá (13), jednak nafitovaná funkcí $d_k(v_0)$, která odpovídá (15). Je vidět, že funkce $d(v_0)$ poměrně dost nesesdí, tedy model, který neuvažuje energetické ztráty, zde není vhodný. Z fitu funkce $d_k(v_0)$, který už sedí mnohem lépe, vychází $k = 0,91 \pm 0,02$, což se příliš neshoduje s hodnotou restitučního koeficientu, který jsme experimentálně určili podělením původní výšky a výšky po odrazu na $k = 0,85 \pm 0,01$. Toto je nejspíše způsobeno různými povrchy, od kterých se míček při těchto měřeních odrážel.

Úloha IV.E ... už to bublá!

Změřte účinnost rychlovarné konvice. Údaj o příkonu naleznete obvykle na samolepce zespodu konvice. Výkon určíte tak, že zjistíte, o kolik stupňů Celsia se zahřál



Obr. 30: Proložení naměřených dat teoretickými závislostmi

daný objem vody za jednotku času. Pokuste se se minimalizovat chybu měření a popište, jak jste se toho snažili dosáhnout.

Varování Rozhodně sami nepoužívejte voltmetr a ampérmetr u tak vysokého napětí a proudu.

Teorie

Účinnost je definována jako podíl výkonu a příkonu. Po rozšíření časem můžeme účinnost spočítat také jako podíl práce vykonané a energie, kterou stroj na vykonání této práce spotřeboval.

V našem případě rychlovarná konvice ohřívá vodu, musí tedy vykonat práci na její ohřátí z teploty T_0 na teplotu varu $T = 100^\circ\text{C}$ (budeme předpokládat, že právě při dosažení této teploty se konvice vypne). Práce potřebná k ohřátí vody o hmotnosti m (předpokládáme, že je během ohřevu konstantní, tj. žádná se nevypaří) o teplotu $T - T_0$ je rovna $W = cm(T - T_0)$, kde $c = 4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ je měrná tepelná kapacita vody.

Budeme dále uvažovat, že je příkon P konvice konstantní. To ve skutečnosti není pravda, jelikož příkon bude záviset např. na teplotě topného tělesa (respektive na jeho odporu, který je na teplotě závislý). Jelikož však podle zadání nemáme k dispozici ampérmetr, který by nám tento průběh ukázal, musí nám tento předpoklad stačit.

Trvá-li konvici ohřátí vody čas t , pak je za uvedených předpokladů její účinnost

$$\eta = \frac{cm(T - T_0)}{Pt}.$$

Pro zjištění účinnosti konvice tedy musíme znát příkon konvice P a změřit hmotnost vody m , její počáteční teplotu T_0 a čas t , za který se voda ohřeje na teplotu varu. Budeme tedy potřebovat váhy (případně odměrku pro změření objemu, z kterého je možné hmotnost za znalosti hustoty spočítat), teploměr a stopky.

Zamysleme se nyní nad tím, jaké počáteční podmínky mohou účinnost konvice ovlivnit. Teplotu varu vody, výkon konvice, měrnou tepelnou kapacitu vody a čas potřebný k ohřevu ovlivnit nemůžeme. Můžeme však ovlivnit počáteční teplotu vody, její hmotnost a počáteční teplotu konvice. Řekněme, že experiment budeme provádět za stálé pokojové teploty a konvici necháme před každým měřením vytemperovat. Počáteční teplotu vody ovlivnit můžeme, nicméně rychlovarné konvice se většinou používají pro ohřev pitné vody z vodovodu, jejíž teplota je při dané venkovní teplotě přibližně stálá. Nyní musíme zjistit, zda účinnost může záviset na hmotnosti vody, kterou konvice ohřívá. Je zřejmé, že tomu tak je. Při ohřevu vody se totiž spotřebovává energie i na ohřev samotné konvice. Teplo, které je potřebné k jejímu ohřevu, není zřejmě závislé na hmotnosti vody, z toho důvodu by měla účinnost konvice růst se zvyšující se hmotností vody v ní.

Měření

Pro měření hmotnosti vody byla použita digitální kuchyňská váha. Na ni byla prázdná konvice postavena a váha byla vynulována. Po nalití vody se tedy zobrazila přímo její hmotnost. Teplota byla měřena digitálním teploměrem připojeným k počítači. Snímač teploty byl upevněn tak, aby snímal teplotu přibližně ve středu vodou zaplněné části konvice během celého ohřevu, a tak bylo možné určit přibližně i závislost výkonu v čase. Teplota se měřila automaticky každou sekundu a byla zapsána do souboru. Příkon konvice byl měřen digitálním měřičem spotřeby. Ten zobrazuje průměrný příkon vždy za časový interval 5 s. Tato hodnota byla vždy po změně přepsána do počítače včetně aktuálního času od zapnutí konvice.

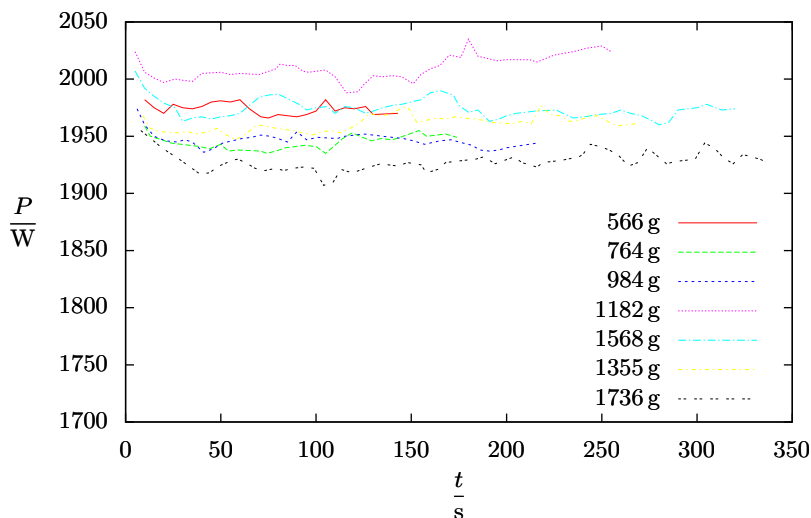
Jak je vidět z grafu 31, příkon konvice je po celou dobu ohřevu přibližně konstantní, při výpočtu účinnosti se tedy pro každou hmotnost vody počítalo vždy s jeho průměrnou hodnotou. Z grafu 32 vidíme, že i výkon je během ohřevu přibližně konstantní, tedy i účinnost bude během ohřevu přibližně konstantní.

Naměřené hodnoty a z nich spočítané hodnoty účinnosti konvice uvádíme v tabulce 6 a grafu 33. Je vidět, že účinnost konvice opravdu roste se zvyšující se teplotou vody v ní, jak jsme předpověděli v teoretické části.

Nejistoty měření a diskuse výsledků

Jako u každého měření, i zde musíme určit, s jakou přesností jsme měření provedli, a diskutovat zjištěné výsledky.

Nejprve k měření teploty. V našem případě měříme pouze počáteční teplotu vody a předpokládáme, že konvice se vypne právě v okamžiku dosažení teploty varu vody v celém jejím objemu. Teploměr je před odečtením teploty již nějakou

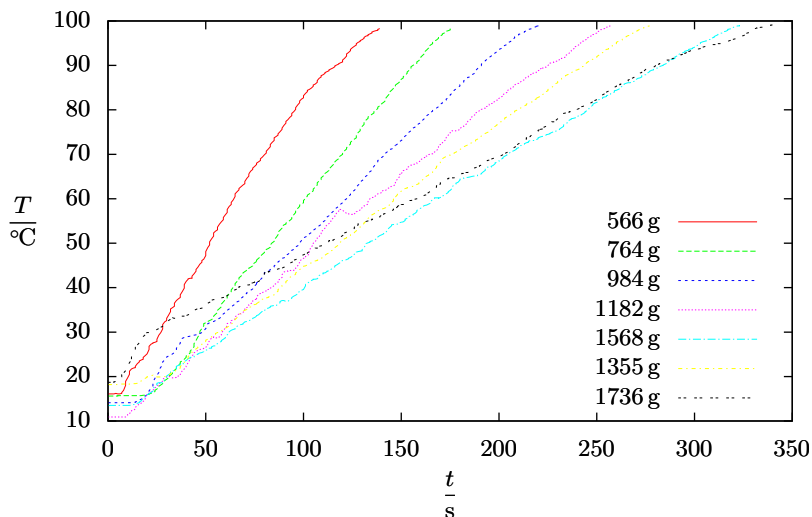


Obr. 31: Graf příkonu konvice v závislosti na čase pro různé hmotnosti vody

Tabulka 6: Naměřené hodnoty a spočítané účinnosti konvice

$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{T_0}{^\circ\text{C}}$	$\frac{P}{\text{W}}$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{\eta}{\%}$
1736 ± 2	$18,7 \pm 0,5$	1928 ± 16	340 ± 1	90 ± 2
1568 ± 2	$13,4 \pm 0,5$	1974 ± 13	323 ± 1	89 ± 2
1355 ± 2	$18,2 \pm 0,5$	1960 ± 14	280 ± 1	82 ± 2
1182 ± 2	$10,9 \pm 0,5$	2009 ± 18	258 ± 1	85 ± 2
984 ± 2	$14,1 \pm 0,5$	1947 ± 14	221 ± 1	79 ± 2
764 ± 2	$15,6 \pm 0,5$	1945 ± 11	176 ± 1	79 ± 2
566 ± 2	$16,1 \pm 0,5$	1974 ± 10	143 ± 1	70 ± 2

dobu ponořen ve vodě, je digitální a poměrně přesný (odchylky byly určeny podle informací výrobce), měření počáteční teploty by tedy mělo být poměrně přesné. Uvažujme nyní, jak by se změnil výsledek, kdyby se konvice nevypnula právě v okamžiku dosažení teploty varu v celém objemu. Vypnula-li by při nižší teplotě, voda v konvici by nevěřela, což se ovšem děje, takže tuto možnost můžeme vyloučit. Pokud by vypnula později, odpařilo by se více vody. To však není účel konvice, tedy teplo potřebné pro odpaření části vody nemůžeme přičíst k užitečnému výkonu. Odpařením části vody se však změní hmotnost kapalné vody v konvici a pouze voda o této hmotnosti nám bude užitečná. Do výpočtu účinnosti bychom tedy měli dosazovat konečnou hmotnost vody v konvici. Bylo zjištěno, že se během ohřevu



Obr. 32: Graf teploty vody v závislosti na čase pro různé hmotnosti vody

odpaří maximálně jednotky gramů vody, což výsledek ovlivní minimálně.

V zadání tohoto příkladu bylo řečeno, že údaj o příkonu se nachází zesponu konvice. Bohužel na všech konvicích, které jsem měl k dispozici, byl údaj o příkonu uveden jako interval o šířce několika set wattů. Konkrétně u použité konvice to bylo $(1850 \div 2200)$ W. Pokud bychom počítali s takto velkou nejistotou určení příkonu, dostali bychom nejistotu účinnosti asi 0,14, tedy relativní nejistotu asi 18 %, šlo by tedy o mnohem méně přesné měření (u námi provedeného měření je relativní nejistota asi 3 %). Z toho důvodu byl zvolen již uvedený měřič spotřeby elektrické energie. Výrobce tohoto zařízení bohužel v dokumentech neuvádí jeho přesnost (byla tedy spočítána a odhadnuta podle naměřených dat). Nicméně i tak je měření jistě mnohem přesnější, než kdybychom uvažovali zmiňovaný interval.

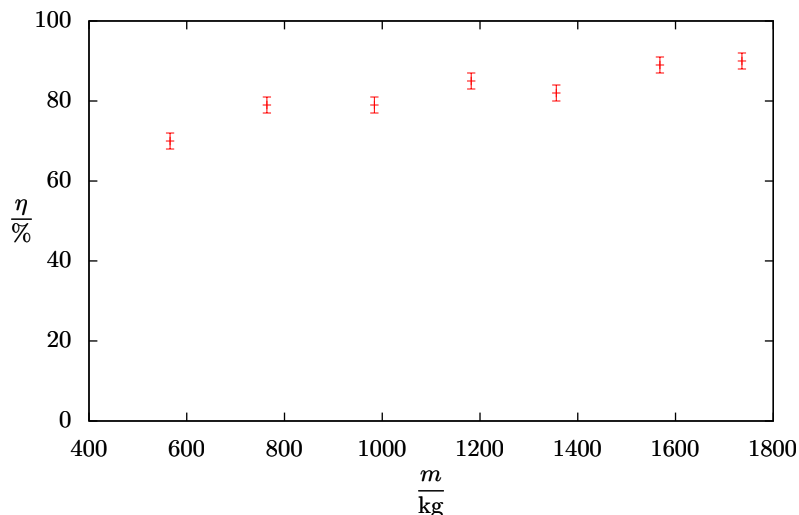
Závěr

Účinnost rychlovarné konvice roste se zvyšující se hmotností vody v ní a pohybuje se od asi 70 % do asi 90 %.

Úloha V.E ... kávu si osladím

V obálce vám spolu se zadáním došel i plastový sáček s podezřelým obsahem, je to cukr nebo sladidlo.

Pokuste se co nejlépe experimentálně srovnat „sladkost“ (sladivost) dodaného vzorku a několika dalších různých cukrů a sladidel. Pro odměření množství použijte přiloženou lžičku. „Sladkost“ testovaného vzorku určujte pro koncentraci jedné



Obr. 33: Graf účinnosti konvice v závislosti na hmotnosti vody

zarovnané lžičky cukru/sladidla v 1 dl vody. Jako jednotkovou „sladkost“ můžete brát např. rafinovaný řepný cukr (o koncentraci jedné zarovnané lžičky na 1 dl vody). Porovnávat pak můžete tak, že si připravíte roztoky o různé koncentraci známého cukru/sladidla a budete srovnávat chuť těchto roztoků s připraveným roztokem testovaného vzorku. Pro zpřesnění určení „sladkosti“ se domluďte s nějakými dalšími lidmi, kteří se do srovnávání sladkosti zapojí (ale ne s ostatními řešiteli, ať má každý svoje vlastní řešení). U každého cukru zjistíte co nejpřesněji složení a výsledky vhodně zpracujete.

Nápověda Cukr se dá sehnat řepný rafinovaný (normální bílý cukr, co se obvykle u nás používá), ale je také k sehnání např. třtinový cukr (chemicky téměř jako řepný), hroznový cukr (dextróza; v Glukopuru) a ovocný cukr (fruktóza). Ze sladidel můžeme jmenovat sorbit, huxol, sukralózu (v Cukrenu, Cukravitu), aspartam (v Irbis big sweet). Ke slazení se také používá med. Doporučujeme použít sladidla s řádově podobnou sladivostí (u některých čistých sladidel, co sladí i 600 krát tolik, co obyčejný cukr, narazíte na problémy s odvažováním).

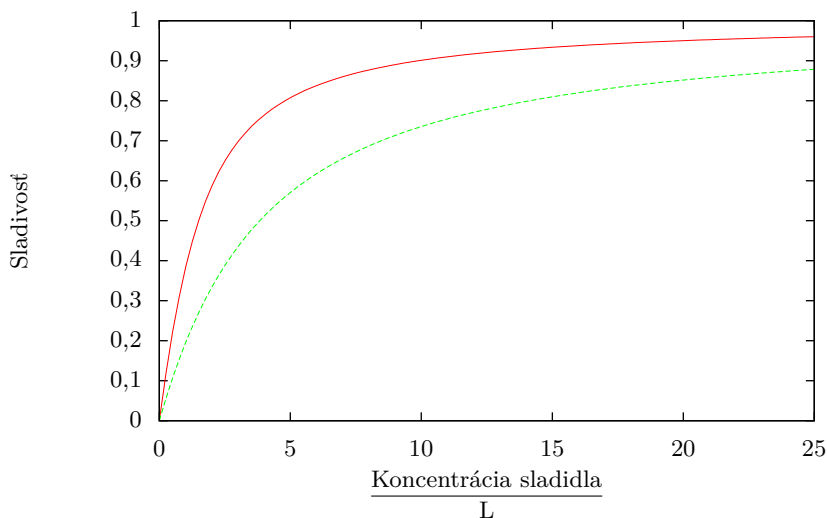
Varování Každá látka může být při zvýšené spotřebě nebezpečná. I destilovaná voda je jed. Snažte se tedy dodržovat doporučené denní dávky.

Teória

Každá látka pôsobí na receptory v ústach iným spôsobom. Pri každej koncentrácii sa vytvorí po chvíli rovnováha, pri ktorej budete cítiť istú sladkosť závislú od toho, na akej časti sladkocitlivých buniek je naviazané sladidlo. Tu však neplatí

pekná lineárna závislosť. To znamená, že pre dvojnásobnú koncentráciu sa percento viazaných receptorov nezdvójnásobí, pretože ich máme obmedzené množstvo.

V grafe 1 sú zobrazené závislosti sladivosti od koncentrácie pre dve rôzne sladidlá. Predstavme si, že sme našli rovnaké sladivosti pre koncentráciu nami poslaného sladidla c_1 a koncentráciu vášho kuchynského cukru c_2 . Čo by sa stalo, ak by ste teraz zistili koncentrácie zodpovedajúce rovnakým sladivostiam pre dvojnásobnú koncentráciu cukru? Koncentrácia sladidla by už *nebola* dvojnásobná! Dôvod je ten, že závislosti v grafe nie sú lineárne. Preto by ste mali používať referenciu, s ktorou porovnávate jednu konkrétnu koncentráciu sladidla, najlepšie odporúčanú jednu lyžičku cukru na 100 ml vody.



Obr. 34: Sladivosť dvoch rôznych sladidiel

Meranie

Prášku ste dostali obmedzené množstvo, takže bolo potrebné si dopredu trochu premyslieť, aké koncentrácie budete vyrábať. Najlepšie bolo držať sa zadania a vyrobiť referenčnú sladkosť jednej zarovnanej lyžičky cukru v 100 ml vody. Ďalej ste riedili alebo zahusťovali zmes sladidla s vodou, až pokiaľ ste dospeli ku nemerateľnému rozdielu.

Každý z vás dostal jednu z troch rôznych možných vzoriek a to: glukózu (Glukopur), fruktózu (Fruktopur) alebo zmes umelého sladidla a cukru (Fruktafam). My sme pri meraní postupovali nasledovne. Najprv sme porovnali sladkosť referenčného roztoku a roztoku s rovnakou koncentráciou sladidla, teda 1 zarovnaná lyžička na 100 ml vody. Ak sme potrebovali riediť, zriedili sme časť tohoto roztoku s rovnakým množstvom vody, čím sme koncentráciou sladidla zmenšili na

polovicu. Pri zahusťovaní sme zasa zmiešali rovnaké množstvo menej koncentrovaného a koncentrovanejšieho roztoku sladidla, čím sme dosiahli aritmetický priemer týchto koncentrácií.

Pri samotnom ochutnávaní ste si určite sami všimli, že stačilo malé množstvo na porovnanie, no oveľa istejší ste si boli po viacerých ochutnaniach oboch roztokov. Taktiež bolo vhodné pri tesnejších rozdieloch dať určiť sladkosť viacerým ľuďom.

Výsledky

Výsledky nášho merania sú zaznamenané v tabuľke 7. Ako základnú jednotku koncentrácie sme zvolili L, čo predstavuje jednu zarovnanú lyžičku látky na 100 ml vody.

Glukopur		Fruktopur		Fruktafam	
$\frac{c_g}{L}$	Vzorka bola	$\frac{c_f}{L}$	Vzorka bola	$\frac{c_s}{L}$	Vzorka bola
1	menej sladká	1	sladšia	1	sladšia
2	menej sladká	0,5	menej sladká	0,5	sladšia
3	sladšia	0,75	menej sladká	0,25	sladšia
2,5	sladšia	0,87	sladšia	0,12	menej sladká
2,25	nerozhodnuteľné	0,81	nerozhodnuteľná	0,19	sladšia
-	-	-	-	0,16	nerozhodnuteľné

Tabuľka 7: Namerané hodnoty

Pri výsledkoch merania označených nerozhodnuteľné sme vzorku testovali na 4 ľuďoch, ktorí nám povedali nie konzistenté porovnania sladkosti. Dostali sme teda takto interval, v ktorom sa určite nachádza výsledná sladkosť. Očakávaná hodnota tejto sladkosti leží zrejme v strede tohoto intervalu a stredná kvadratická chyba je niečo pod polovicou šírky tohoto intervalu (pre záujemcov, skúste si spočítať strednú kvadratickú chybu náhodnej veličiny, ktorá s rovnakou pravdepodobnosťou nadobúda všetky hodnoty medzi 0 a 1). Okrem tejto nepresnosti určenia výsledku sa vyskytujú aj iné chyby spôsobené hlavne nepresným odmeriavaním objemov vody a cukru. Takéto chyby sú však v porovnaní s touto chybou dostatočne nízke na to, aby sme ich mohli zanedbať. Ak ste to sami skúšali, vzorka sa v lyžica dala zarovnať skutočne celkom presne a rovnako porovnávanie výšky hladín sa dalo robiť s dostatočnou presnosťou.

Záver

Pre Glukopur dostávame teda výsledok, že $(2,25 \pm 0,20)$ lyžičky Glukopuru sladí rovnako ako 1 lyžička cukru. Glukopur nanešťastie neudáva sladivosť glukózy. Podľa Wikipédie¹⁷ je sladivosť glukózy okolo 70 % sladivosti sacharózy, ale ťažko sa určuje prepočet z jedného prášku na druhý z pomeru udávaného na Wikipédii. Naša glukóza je teda ešte o niečo menej sladká ako tá na Wikipédii.

¹⁷<http://en.wikipedia.org/wiki/Sweetness>

Pre Fruktopur udáva výrobca na obale sladivosť o 30 % vyššiu ako sacharózy. Nám vyšiel ekvivalent jednej lyžičky sacharózy na 100 ml vody ako $(0,81 \pm 0,04)$ L, čo predstavuje sladivosť o (23 ± 6) % vyššiu ako cukru, čo sa dobre zhoduje s uvádzanou hodnotou.

Pre umelé sladidlo Fruktafam dostávame koncentráciu $(0,16 \pm 0,02)$ L ako ekvivalent 1 L cukru. Výrobca uvádza, že jeho sladidlo je až päťkrát sladšie ako cukor. Nám táto hodnota vyšla $(6,3 \pm 0,8)$ -krát, čo je opäť v celkom slušnej zhode s udávanou hodnotou.

Celkovo by som teda meranie prehlásil za úspešné a až prekvapivo presné. Veľa zdravu pri sladení.

Úloha VI.E . . . plechová komprese

Skvělý způsob, jak rozdrtit prázdnu plechovku od coly (pokud se vám ji nechce drtit o svou hlavu a vlastně se vám nechce ji vůbec manuálně drtit), je kápnout na dno trochu vody, trochu utěsnit otvor v ní a dát ji na vařič zahřát. Když ji pak rychle ponoříte do studené vody, tak se vám s trochu šikovnosti krásně zdrtí. Vyzkoušejte si to a vyzkoušejte to i bez toho, že by v plechovce byla voda. Vysvětlete, proč to funguje jinak s vodou a bez ní, a zkuste svoji plechovku zdrtit na co nejmenší objem vůči původnímu. Ten změřte a popište podmínky, při kterých se vám to podařilo. Pošlete fotky zdrčených plechovek.

Pozor Při děláni pokusu k úloze se nespalte!

Teorie

Budeme uvažovat, že vzduch i vodní pára se chovají jako ideálny plyn, platí pro ně tedy stavová rovnice ideálneho plynu

$$pV = NkT, \quad (16)$$

kde p je tlak plynu, V jeho objem, N počet častíc, k Boltzmannova konstanta a T termodynamická teplota plynu. Jelikož není otvor v plechovce utěsněn, budeme uvažovat, že tlak plynu v plechovce je konstantní, $p = 101$ kPa.

Jestliže v plechovce je na začátku experimentu pouze vzduch a je-li objem plechovky V_0 konstantní (její teplotní roztažnosť uvažovat nebudeme) a zvyšuje-li se teplota plynu T , musí se snižovat počet častíc v plechovce N , aby platilo $NT = \text{konst}$; plyn tedy uniká z plechovky ven. V okamžiku, kdy plechovku ponoříme dnem vzhůru do vody, se plechovka rychle ochladí (téměř na teplotu vody T_v), a tedy se ochladí i vzduch v ní. Budeme předpokládat, že toto se stane během tak krátkého okamžiku, že se přes ucpaný (avšak ne utěsněný) otvor v plechovce dovnitř nedostane žádná voda. Ze začátku má plechovka stále stejný objem, snižuje se v ní tlak plynu. Jakmile rozdíl tlaků uvnitř a vně plechovky dosáhne určité hodnoty, plechovka se zdeformuje.

V druhém případě dáme do plechovky trochu vody. Plechovku zahřejeme tak, že voda začne vřít, a tedy se přeměňovat ve vodní páru. Hustota vodní páry při

atmosferickém tlaku a teplotě varu vody je asi $\rho_p = 0,60 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Jestliže do plechovky dáme vodu o hmotnosti 1 g, vznikne jejím vypařením přibližně 6 l vodní páry (tedy mnohem větší objem než je objem plechovky), která bude unikat z plechovky nedokonale utěsněným otvorem ven. Kromě vodní páry bude z plechovky unikat i vzduch, který v ní byl na začátku experimentu. Při vypnutí ohřevu pak bude v plechovce voda (jestliže se nestihla všechna vypařit), vodní pára a vzduch. Vzhledem k tomu, že vznikl velký objem vodní páry, která vytlačovala vzduch z plechovky, vzduchu bude v plechovce oproti vodní páře jen malé množství.

V okamžiku, kdy plechovku ponoříme dnem vzhůru do vody, se plechovka opět rychle ochladí (téměř na teplotu vody T_v), a tedy se ochladí i zbylá voda, vodní pára a vzduch v ní. Vodní pára začne kondenzovat, čímž (za předpokladu, že její tlak byl atmosferický) sníží svůj objem přibližně 1600-krát. V důsledku toho se tlak zbylého vzduchu v plechovce sníží mnohem více než v případě, kdy v plechovce žádná voda nebyla, deformace plechovky by tedy měla být větší.

Měření

Pro tento experiment byly použity plechovky od piv Gambrinus a Birell, u kterých je udáván objem 0,33 ml.

Pro zjištění objemu plechovky (nezdeformované i zdeformované) bylo použito měření hmotnosti plechovky naplněné vodou. Plechovka byla ponořena do vody a několikrát otočena, aby z ní unikl veškerý vzduch. Poté položena včetně vody na kuchyňskou váhu. Od změřené hmotnosti byla odečtena hmotnost prázdné plechovky m_0 , zjistili jsme tedy hmotnost m_v vody v plechovce. Jelikož hustota vody byla konstantní, poměr objemu zdeformované a nezdeformované plechovky byl stejný jako poměr hmotnosti vody ve zdeformované a ve nezdeformované plechovce.

Ohřev plechovek probíhal nad nejmenším hořákem sporáku, přičemž bylo třeba plechovku držet mírně nad plamenem, jelikož zápach hořícího nátěru plechovky není zrovna příjemný. Do plechovky bylo nejdříve nalito malé množství vody, plechovka s vodou byla dále zvážena a následně byl její otvor trochu utěsněn papírovou utěrkou. Ohřev probíhal v případě plechovek naplněných vodou tak dlouho, dokud nebyla nad plechovkou pozorovatelná unikající vodní pára. Plechovka bez vody byla ohřívána přibližně stejnou dobu jako plechovka s nejmenším množstvím vody. Poté byla plechovka rychle dnem vzhůru přemístěna do dřezu naplněného vodou o přibližně pokojové teplotě. Nakonec byla zdeformovaná plechovka naplněna vodou a určena její hmotnost.

Celkem bylo zdeformováno devět plechovek. Naměřené poměry objemů zdeformovaných a nezdeformovaných plechovek v závislosti na hmotnosti vody, kterou jsme do plechovky přidali, uvádíme v grafu 36. Fotografie některých zdeformovaných plechovek jsou na obrázku 35.

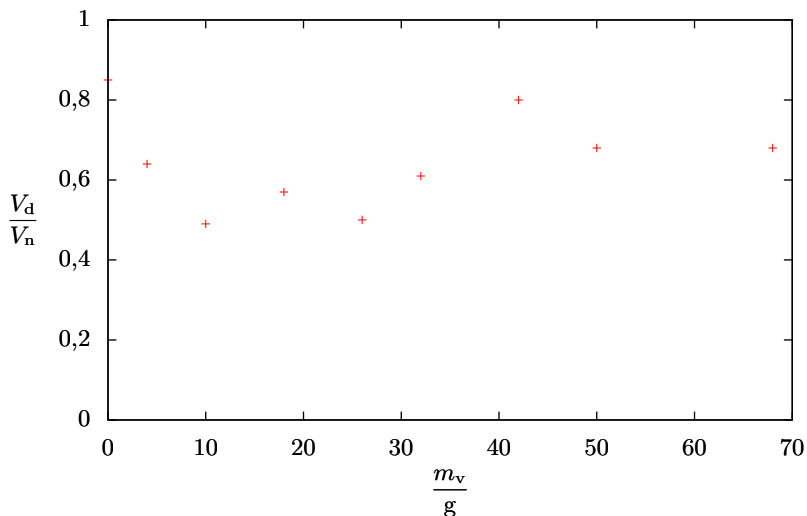
Dále byla pro zpracování změřena hmotnost prázdné plechovky $m_0 = (12 \pm 1) \text{ g}$ a hmotnost plechovky naplněné vodou $m_p = (370 \pm 1) \text{ g}$.

Nejistoty měření

Použitá kuchyňská váha vážila s přesností na 1 g, nicméně nejistota hmotnosti vody v plechovce byla vyšší z toho důvodu, že i přes otáčení plechovky je možné, že v ní



Obr. 35: Zdeformované plechovky



Obr. 36: Graf naměřené závislosti poměru objemu deformované a nedeformované plechovky na hmotnosti vody v ní

stále zůstal nějaký vzduch, naopak vynořená plechovka z vody byla mokrá a před položením na váhu byla osušena pouze málo, proto je možné, že se na váhu dostalo více vody, než bylo uvnitř plechovky.

Celé měření nebylo z důvodu nedostatku plechovek opakováno, nicméně dle pozorování je opakovatelnost měření velmi špatná, a tedy nejistoty naměřených hodnot velké. Například doba ohřevu by se i v případě stejného množství vody v plechovce značně lišila, jelikož závisela na výkonu ohřevu (sporák byl mezi jednotlivými měřeními z bezpečnostních důvodů vypnut a u použitého typu nelze zaručit nastavení stejného výkonu) a také od schopnosti pozorovatele rozeznat vodní páru vycházející z plechovky. Nicméně i přes tyto nejistoty se podařilo prokázat, že objem, na který se plechovka zdrtí, závisí na množství vody, které do ní vložíme.

Interpretace naměřených hodnot

Z naměřených hodnot je patrné, že nejméně se plechovka zdeformuje v případě, že v ní není žádná voda. V tom případě je v plechovce pouze vzduch, jehož objem se po ochlazení zmenší méně, než se změní objem vodní páry v případě kondenzace na vodu.

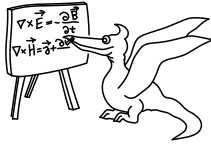
Nejvíce se plechovka zdeformovala v případě malé hmotnosti vody v ní. V tomto případě se během ohřevu velká část vody vypařila, přičemž v plechovce vzrostl tlak. Jelikož otvor v plechovce nebyl utěsněn, vodní pára spolu se vzduchem unikala z plechovky. Poměr objemu vodní páry a objemu vzduchu v plechovce tímto rostl, takže při vypnutí ohřevu byl v plechovce jen malý objem vzduchu, ale velký objem vodní páry. Při ochlazení pak vodní pára zkondenzovala, čímž se její objem několikanásobně zmenšil. Jelikož se otvor plechovky nacházel ve vodě, tlak uvnitř plechovky se rychle snížil a plechovka se zdeformovala.

Pokud jsme do plechovky přidali více vody, ne všechna se stihla během ohřevu vypařit. Při ponoření plechovky do vody tedy se v plechovce nacházela horká kapalná voda, vodní pára a vzduch. V tomto případě se tedy teplo uvolňovalo i kvůli ochlazení kapalné vody, a tedy ochlazení bylo pozvolnější. Z toho důvodu se plechovka zdeformovala méně.

Výsledky experimentu budou záviset mimo jiné i na způsobu utěsnění otvoru v plechovce. V našem případě byl u všech plechovek otvor utěsněn stejným způsobem.

Závěr

Suchá plechovka se zdrtila asi na 80 % svého původního objemu. Nejvíce se plechovka zdeformovala v případě, že v ní bylo jen několik gramů vody. V tom případě se plechovku podařilo zdrtit přibližně na poloviční objem.



Seriál o astrofyzice

Kapitola 1: Úvod

V letošním ročníku FYKOSího seriálu se budeme věnovat astronomii a astrofyzice. Astronomie je věda stará jako lidstvo samo, v každé kultuře najdete zprávy o lidech, již trávili své večery pozorováním nebes, ať už s úmysly náboženskými, vědeckými či čistě romantickými. Až s vynálezem dalekohledu, fotografické emulze a spektrografů se astronomie mohla stát i astrofyzikou, tedy vědou vysvětlující procesy, jež se odehrávají ve hvězdách.

Básníci říkají, že věda vzala hvězdám krásu, udělala z nich pouhé koule atomárního plynu. I já se mohu podívat na hvězdy za jasné noci. Ale vidím méně nebo více?
(Richard Feynman)

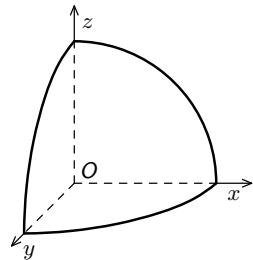
Zájemci o podrobnější výklad pak vždy mohou sáhnout po učebnicích.

- [1] Vanýsek V. *Základy astronomie a astrofyziky*. Praha: Academia, 1980. (Pozor, zejména v modernějších tématech je tato kniha nedostačující a informace v ní uvedené jsou ne vždy korektní.)
- [2] Carroll B.W., Ostlie D.A. *An Introduction to Modern Astrophysics (2nd edition)*. San Francisco: Pearson Addison-Wesley, 2007.

Případná další literatura bude uvedena v jednotlivých dílech seriálu. Krom toho nezapomeňte sledovat stránky seriálu, kde se občas objeví nějaký textík s doplňujícími informacemi, zajímavostmi nebo věnující se příbuznému tématu.

O souřadnicích, Pogsonovi a vůbec...

První díl seriálu bude věnován popisu toho, co na noční obloze můžeme spatřit a jak to můžeme popsat. Pro moderní astronomii, kde se o všechno postará automatizovaný dalekohled, se to může zdát zbytečné, ale člověk nikdy neví, kdy jej život donutí předpovídat z hvězd budoucnost. V takovém případě je fajn vědět, kde která souhvězdí najdeme a jak jejich polohu popíšeme. Podíváme se na zoubek podivným trojúhelníčkům s nestandardním součtem vnitřních úhlů, ztransformujeme všechny možné souřadnice a nakonec se budeme věnovat veledůležitému logaritmickému vztahu – Pogsonově rovnici.



Obr. 37: Sférický trojúhelník se všemi pravými úhly

Sférická geometrie

V běžném životě se stále a znovu setkáváme s euklidovskou, tedy plochou geometrií. Trojúhelníky se zde chovají slušně a mají součet vnitřních úhlů 180° , vzdálenosti udáváme v běžných délkových jednotkách a nejkratší spojnicí dvou bodů je přímka.

Ve sférické geometrii je tomu docela jinak. Součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180° a nejkratší spojnicí bodů jsou části kružnic. Podstatnou roli bude hrát hlavní kružnice, jejíž střed je totožný se středem zemským. Pomocí ní vystavíme souřadnicové systémy. Než se pustíme do samotných souřadnic, podíváme se na základní vztahy sférické geometrie. Je třeba si uvědomit, že vzdálenosti měříme ve stupních a vždy je budeme počítat po kružnici, jejíž obvod je maximální, tedy po hlavní kružnici. Vzdálenosti po hlavní kružnici budeme označovat malými latinskými písmeny, úhly mezi křivkami budeme označovat řeckými písmeny.

Pro sférické trojúhelníky, stejně jako pro rovinné, platí sinová věta

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma},$$

kosinová věta pro strany

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

a pro úhly

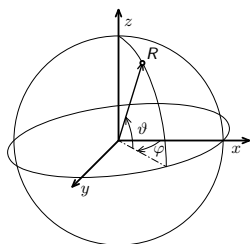
$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

A anomálie sférické geometrii vlastní, sinová-kosinová věta

$$\sin a \cos \beta = -\cos c \sin b \cos \alpha + \sin c \cos b.$$

Stejně jako v euklidovské geometrii zde můžeme provést aproximaci malých úhlů (v radiánech) $\sin \varepsilon \sim \varepsilon$ a $\cos \varepsilon \sim 1$. Tyto vztahy jsou užitečné zejména, pokud si chceme vyzkoušet spočítat pohyby hvězd na nebeské sféře.

Astronomické souřadnice



Obr. 38: Sférické souřadnice

Nejvíce v astronomii využívané jsou sférické souřadnicové systémy. Než se dostaneme k samotným astronomickým souřadnicím, ukážeme si, jak vypadá převod z kartézských souřadnic do sférických, který nám později bude nadmíru užitečný:

$$x = r \cos \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = r \cos \vartheta \sin \varphi,$$

$$z = r \sin \vartheta.$$

Úhly si samozřejmě můžeme určit naprosto libovolně (záleží na vašem náboženství, stejně jak s loupáním banánu, nakonec ale zjistíte, že je dobré preferovat jednu soustavu) a s tím se nám budou měnit i zmíněné transformační vztahy. Nespornou

výhodou astronomie je fakt, že o vzdálenost ze středu r se vůbec nemusíme starat, neboť popisujeme pouze nebeskou sféru, tedy nám postačí jednotkový poloměr. r tedy pokládáme za jedničku. Na druhou stranu je nepřijemné, že při používání astronomických souřadnicových systémů a transformací mezi nimi musíme udržet na paměti, zda pracujeme v pravotočivé, nebo levotočivé soustavě.

Abychom se mohli konečně podívat na nejpoužívanější souřadnicové systémy, je třeba si určit také význačné hlavní kružnice (pro nás ty, jejichž střed by ležel v zemském středu). Hlavní kružnice leží v rovinách významných pro souřadnicové systémy.

- Rovník – průmět zemského rovníku na nebeskou sféru.
- Poledníky – spojnice severního a jižního pólu. Kružnice, která Zemi takto obkrouží, má střed ve středu zemském. Důležité jsou pro nás průměty poledníku na nebeskou sféru. Význačné postavení má nultý poledník procházející Greenwichskou hvězdárnou v Anglii.
- Ekliptika – kružnice, po níž se po obloze zdánlivě pohybuje Slunce.
- Galaktický rovník – průmět roviny galaxie na oblohu.

Daším důležitým pojmem je *jarní bod*. Ten je průsečíkem ekliptiky a průmětu zemského rovníku na oblohu. Takové body jsou dva, v jednom se Slunce nachází v podzimní rovnodennosti (podzimní bod), ve druhém v jarní rovnodennosti. Jarní bod je často označován stejně jako znamení berana Υ , což vede k úvaze, že se nachází v tomto souhvězdí. V důsledku precese zemské osy se posunulo do souhvězdí ryb (správně tedy lidé narození okolo rovnodennosti nejsou berani, ale ryby. . . , ale vzhledem k efektivitě horoskopů můžete klidně číst to, co doposud).

V tuto chvíli jsme již připraveni seznámit se s hlavními systémy souřadnic používaných v astronomii.

Obzorníková/azimutální soustava

Obzorníková nebo též azimutální soustava je spojena s místem pozorování (topocentrická); základní rovinou, ke které vztahujeme měření, je horizont – rovina tečná na místo pozorování.

Hlavní směr je na severní polokouli určen na jih, opisující poledník. Pro zadání jednoznačné polohy nám stačí azimut A , kde $A \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$. Výška se měří po poledníku, a je tedy kolmá na horizont – označíme ji h , kde $h \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$, horizont leží v poloze 0° .

Krom výšky si můžeme také zavést zenitovou vzdálenost. Zenit nebo také nadhlavník je bod přímo nad pozorovatelem, vztážený k poloze pozorovatele (přímo pod pozorovatelem je pak nadír čili podnožník). Můžeme si zavést parametr zenitová vzdálenost z , což je doplněk výšky do 90° . Soustava je levotočivá a transformujeme dle vztahů

$$\begin{aligned}x &= r \cos h \cos A, \\y &= r \cos h \sin A, \\z &= r \sin h.\end{aligned}$$

Ekvatoriální soustava I. druhu

Soustava je topocentrická. Základním směrem je opět směr na jih po místním poledníku, základní rovinou je rovina rovníku. Soustava je levotočivá. Význačnými body této soustavy jsou průsečíky místního poledníku s rovinou rovníku. Používanými souřadnicemi jsou hodinový úhel t , narůstající směrem na západ, kde $t \in \langle 0^h, 24^h \rangle$ popř. $t \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ a deklinace δ , kde $\delta \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$. Pozor, deklinace a výška v azimutální soustavě se zpravidla neshodují. Analogicky k zenitové vzdálenosti si můžeme zadefinovat také pólovou vzdálenost, kterou je doplněk deklinace do 90° .

Dále si můžeme nadefinovat *hodinový úhel hvězdy*, který svírá deklinační kružnice (kružnice, jejíž střed by ležel v zemském středu a její rovina svírá s rovinou rovníku úhel rovný deklinaci hvězdy) proložená hvězdou s místním poledníkem, počítaný ve směru denního pohybu hvězdy. Transformační vztahy pak jsou

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta \cos t, \\y &= r \cos \delta \sin t, \\z &= r \sin \delta.\end{aligned}$$

Ekvatoriální soustava II. druhu

Ekvatoriální soustava II. druhu je zřejmě nepoužívanější astronomickou soustavou. Je spojena se zemí (geocentrická) a je pravotočivá. Hlavní rovinou je rovník, význačným směrem je směr k jarnímu bodu. Souřadnicemi jsou rektascenze (RA), označená α a deklinace (dec), značená δ . Rektascenze narůstá na východ (tedy proti dennímu pohybu hvězdy, která na východě vyjde a přes den se nám pohybuje na západ), $\alpha \in \langle 0^h, 24^h \rangle$, popř. $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$, deklinace $\delta \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$.

Pól těchto souřadnic je v souhvězdí jednorožce (zkratka Uni). Narozíl od souřadnic I. druhu se tyto souřadnice téměř nemění v čase, což je ideální pro popis polohy nebeských těles. Jak již bylo výše zmíněno, vzhledem k precesi se mění poloha jarního bodu (změna ale není bůhvíjak patrná, opsat precesi kružnici Zemi trvá jeden Platónský rok, což je 22 400 let). Tato změna je relativně malá, proto není třeba ji zahrnovat v každém výpočtu. Podíváme-li se však do astronomické ročenky, zjistíme, že polohy hvězd jsou udávány v J2000. Toto značí tzv. epochu. Znamená to, že dané polohy jsou vypočítány k referenčnímu bodu (pro aktuální epochu byl určen jako právě poledne greenwichského času 1. ledna 2000). K tomuto bodu jsou vypočítány polohy hvězd. Předchozí epocha byla určena v roce 1950 a předpokládá se, že další bude určena opět v roce 2050. Polohy hvězd se v těchto epochách změní poměrně málo, ale každé zpřesnění polohy výrazně zpřesní astronomické pozorování. Transformační vztahy jsou

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta \cos \alpha, \\y &= r \cos \delta \sin \alpha, \\z &= r \sin \delta.\end{aligned}$$

Ekliptikální soustava

Soustava je geocentrická, pravotočivá, hlavním směrem je směr k jarnímu bodu a za hlavní rovinu je zde považována rovina ekliptiky (s rovinou rovníku svírající úhel $\varepsilon = 23^{\circ}27'$). Požívané souřadnice jsou ekliptikální délka λ , kde $\lambda \in \langle 0^{\circ}, 360^{\circ} \rangle$ a ekliptikální šířka β , kde $\beta \in \langle -90^{\circ}, 90^{\circ} \rangle$. Pól této soustavy se nachází v souhvězdí draka (zkratka Dra). Transformujeme podle

$$\begin{aligned}x &= r \cos \beta \cos \lambda, \\y &= r \cos \beta \sin \lambda, \\z &= r \sin \beta.\end{aligned}$$

Galaktická soustava

Galaktická soustava byla definována na základě ekvatoriální soustavy. Hlavní rovinou je rovina, v níž leží průmět roviny galaxie na nebeskou sféru, tedy Mléčná dráha. Soustava je pravotočivá.

Vzhledem k tomu, že se jedná o neohraničený pás na obloze, byla hlavní rovina definována Mezinárodní Astronomickou Unií v roce 1958, tak, že s rovníkem tato rovina svírá inklinací úhel $i = 62,6^{\circ}$. Použité souřadnice jsou galaktická délka l a šířka b . Významným bodem, kde jsou obě souřadnice nulové, je zdroj Sagittarius A* (Sag A*, v ekvatoriálních souřadnicích RA $17^h 45^m 37,224^s$ dec $28^{\circ} 56' 10,23''$ (J2000)), dobře detekovatelný pomocí rádiových dalekohledů, který představuje centrum naší galaxie, tedy supermasivní černou díru. Pól míří do souhvězdí Vlasy Bereniky (zkratka Com). Transformační vztahy jsou

$$\begin{aligned}x &= r \cos b \cos l, \\y &= r \cos b \sin l, \\z &= r \sin b.\end{aligned}$$

Souřadnicových systémů si samozřejmě můžeme zavést mnoho, spojených s libovolným referenčním bodem. (Často se stává, že potřebujete-li ovládat družici, nadefinujete si vlastní soustavu spojenou s její oběžnou dráhou apod. To se však většinou nedostane do světa a je to spíš interní záležitost centra, odkud se družice ovládá. Do databází se dostanou polohy objektů převedené typicky do Ekvatoriální soustavy II. druhu.). V astronomické praxi se však setkáme povětšinou pouze se zmíněnými soustavami. Tip: podívejte se na oblíbenou stránku většiny astronomů <http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-fbasic>. Zadáte-li do vyhledávacího pole libovolné jméno hvězdy (kupříkladu Alpha Centauri), vyskočí vám její identifikace, včetně nejpoužívanějších souřadnic (libovolné FK je ekvatoriální soustava II. druhu).

Hvězdný čas

Než se vrhneme na převod jednotlivých systémů souřadnic, zadefinujeme si ještě jeden pojem – *hvězdný čas*. Hvězdný čas je hodinový úhel jarního bodu.

V okamžiku svrchního průchodu průmětu jarního bodu místním poledníkem je $0^h 0^m 0^s$. Tedy je-li hodinový úhel jarního bodu 15° (čili 1^h), je *místní hvězdný čas* (neplést s hvězdným časem) 1^h a ve své maximální výšce (tzv v kulminaci) se nachází hvězdy s rektascenzí 1^h . Zapadá-li jarní bod, je 6^h hvězdného času, v dolní kulminaci je 12^h hvězdného času.

Z uvedeného příkladu je patrné, že pro určení hvězdného času potřebujeme znát hodinový úhel jarního bodu a rektascenzi hvězdy. Hvězdný čas označíme písmenkem S , místní hvězdný čas písmenkem t a pak platí

$$S = \alpha + t.$$

Aby to nebylo tak jednoduché, tak hvězdný den (též siderický), tedy jedno otočení země vzhledem k hvězdám, je jiný než sluneční den (též synodický), který je definován jako doba mezi dvěma průchody slunce místním poledníkem. Siderický den je 23 hodin, 56 minut, 4,091 sekund, kdežto synodický den je 24 hodin. Tento rozdíl vedl k zavedení přestupného roku.

Transformace souřadnic

Celý nápad schovaný za transformací jednoho astronomického souřadného systému na druhý je v podstatě ohromně jednoduchý. Pořád se jedná o sférické systémy, které jsou vůči sobě nějak otočeny. Nejelegantnější způsob, jakým lze najít transformační vztah mezi jednotlivými souřadnými systémy, je pomocí transformačních matic. Avšak ti, kteří nevědí, jak s nimi zacházet, nemusejí všeset hlavu. Stačí jednoduché trigonometrické vztahy pro kosinus rozdílu úhlů atp. (samozřejmě mějme na paměti, že obloukové délky zde vyjadřujeme ve stupních, jsme na sférickém trojúhelníku). Pro milovníky matic je na <http://fykos.cz/serial> přehled matic otočení a příklad jedné souřadnicové transformace.

Bez matic postup není nerealizovatelný, což si můžeme ukázat na příkladu obzorníkového čili azimutálního systému a ekvatoriálních souřadnic I. druhu. Pro jednoduchost budeme souřadnice ekvatoriální značit indexem e a obzorníkové indexem o . Polohu na sféře můžeme v obou případech vyjádřit v kartézských souřadnicích

$$\begin{aligned} x_e &= \cos \delta \cos t, \\ y_e &= \cos \delta \sin t, \\ z_e &= \sin \delta, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} x_o &= \cos h \cos A, \\ y_o &= \cos h \sin A, \\ z_o &= \sin h. \end{aligned}$$

Místem, které popisujeme, můžeme beztestně vést přímkou rovinou poledníku, která protne západovýchodní směr v průsečíku x -ových a y -ových os. Díky

tomu můžeme popsat polohu bodu v obzorníkových souřadnicích pomocí otočení o zeměpisnou šířku φ vůči ekvatoriálním souřadnicím.

$$\begin{aligned}x_o &= x_e \cos(90^\circ - \varphi) - z_e \sin(90^\circ - \varphi), \\y_o &= y_e, \\z_o &= x_e \sin(90^\circ - \varphi) + z_e \cos(90^\circ - \varphi), \\x_e &= x_o \sin(90^\circ - \varphi) + z_o \cos(90^\circ - \varphi), \\y_e &= y_o, \\z_e &= x_o \cos(90^\circ - \varphi) - z_o \sin(90^\circ - \varphi).\end{aligned}$$

Do druhé trojice rovnic můžeme dosadit vyjádření souřadnic (17).

$$\begin{aligned}\cos \delta \cos t &= \sin h \sin(90^\circ - \varphi) + \cos h \cos(90^\circ - \varphi) \cos A, \\ \cos \delta \sin t &= \cos h \sin A, \\ \sin \delta &= \sin h \cos(90^\circ - \varphi) + \cos h \sin(90^\circ - \varphi) \cos A.\end{aligned}$$

Pokud chceme elegantnější tvar, lze použít zenitovou vzdálenost $z = (90^\circ - h)$ a goniometrické identity a vztahy potom přepsat následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\cos \delta \cos t &= \cos z \cos \varphi + \sin z \sin \varphi \cos A, \\ \cos \delta \sin t &= \sin z \sin A, \\ \sin \delta &= \cos z \sin \varphi - \sin z \cos \varphi \cos A.\end{aligned}$$

Obdobně pokud bychom dosazovali do první trojice rovnic, dostaneme opačný převod.

Variace na Pogsonovu rovnici

Pogsonova rovnice patří mezi nejzákladnější vztahy v astronomii. Už víme, jak popsat polohu hvězdy pomocí souřadného systému, řekneme si ještě něco o její jasnosti. Řecký astronom Hipparchos si řekl, že pro hvězdy vytvoří stupnici, kde jsou nejjasnější hvězdy označeny číslem 0, méně jasné 1 atp. Tohle dělení dalo základ popisu hvězd, které používáme dodnes. Jasnost hvězdy čili *hvězdnou velikost* (jednotka magnituda mag) máme dvoji. Jedna hvězdná velikost je zdánlivá (též relativní) jasnost, která jasnost objektu popisuje tak, jak ji vidíme ze Země. Druhá, absolutní hvězdná velikost, je jasnost vztažená na vzdálenost 10 parseků¹⁸.

Podle moderní definice zdánlivé hvězdné velikosti je etalonem hvězda Vega ze souhvězdí Lyry (α Lyr), která má zdánlivou hvězdnou velikost 0 mag (podle novějších měření 0,03 mag). Základní vztah, který nám určuje relativní hvězdné velikosti, označené m s příčnými indexy, je Pogsonova rovnice

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10} \frac{F_1}{F_2}.$$

¹⁸O vzdálenostech si budeme povídat příště.

Člověk se občas zamyslí nad tím, proč je vztah logaritmický. Je to jednoduché – může za to historická definice. Lidské oko vidí v logaritmické škále a tento fakt se přenesl i do základního astronomického vztahu, 2,5 je jen naškálování pro moderní potřeby.

Na pravé straně mohou vystupovat různé veličiny. Výše je uveden vztah se světelným tokem F , který může nahradit také poměr intenzit I . Důležitou modifikací Pogsonovy rovnice je modul vzdálenosti. Víme totiž, že světelný tok je nepřímo úměrný kvadrátu vzdálenosti. Za referenční vzdálenost budeme považovat 10 parseků (pc). Výsledkem pak bude absolutní hvězdná velikost

$$m - M = 5 \log_{10} \frac{d}{10 \text{ pc}},$$

$$m - M = -5 + 5 \log_{10} \frac{d}{\text{pc}}.$$

Velké M označuje absolutní hvězdnou velikost, malé m pozorovanou a d označuje vzdálenost.

Úloha I.S ... seriálová

6 bodů

- Některé hvězdy jsou považovány za obtočné, čili cirkumpolární. Znamená to, že jsou vidět po celý rok? Jaké hvězdy jsou v našich zeměpisných šířkách vidět po celý rok? Jaká souřadnice nám cirkumpolární hvězdy označuje? Jaká je situace u nás, na pólu a na rovníku? Pro ilustraci doporučujeme stáhnout program Stellarium¹⁹, kde si můžete zadat jakoukoliv zeměpisnou polohu a podívat se na jednotlivé situace.
- Srovnajte absolutní hvězdnou velikost nejjasnější hvězdy letní oblohy, Vegy (α Lyr, 7,76 pc daleko, zdánlivá hvězdná velikost $-0,01$ mag), a Betelgeuze (α Ori, 200 pc daleko, zdánlivá hvězdná velikost 0,42 mag). Jak by se nám hvězdy jevíly, kdyby si vyměnily vzdálenosti? Diskutujte viditelnosti.
- Transformace a zase transformace. Zkuste si spočítat transformaci mezi galaktickými a ekvatoriálními souřadnicemi II. druhu. Výrazy nemusíte upravovat do verze uvedené v literatuře.
- Janap má ve zvyku občas se ztratit. Ona za to nemůže, občas se to stane. Tentokrát však s sebou měla theodolit. Zázračnou krabičku, která umí určit výšku hvězd nad obzorem. Změřila si polohy hvězd Arcturus a Capella a zaznamenala přesný čas. Arcturus měl 123,20 grad v 18:46:30, Capella 113,60 grad v 19:18:30. Kdepak se Janap nacházela? (Nezapomeňte, že výška hvězd je uváděna v gradech, horizont je na úrovni 100 gradiánů, plný úhel je 400 gradiánů).

(řešení str. 127)

¹⁹<http://www.stellarium.org/>, licence GNU GPL, takže program je ke stáhnutí zdarma.

Kapitola 2: Vzdálenosti a základní fyzikální vlastnosti

Vzdálenosti

Od minulého dílu už tušíme, jak popsat polohu objektů na nebeské sféře. Ale upřímně, chtělo by to našemu plochému obrazu dodat nějakou hloubku. Na první pohled je zjevné, že odhadnout vzdálenosti objektů není triviální, neboť každý objekt je jinak jasný. Pro srovnání, Proxima Centauri, nám nejbližší hvězda je vzdálená 4,2 světelného roku a na obloze je nepostřehnutelná bez dalekohledu, neboť její zdánlivá hvězdná velikost je 11,5 mag. Naproti tomu nejjasnější hvězda letního nebe, Vega ze souhvězdí Lyry (α Lyr) má zdánlivou hvězdnou velikost 0 mag a je vzdálená 25,3 světelných let. Jasnost objektu zjevně neindikuje jeho vzdálenost. Abychom určili vzdálenost objektu, museli bychom znát kupříkladu intenzitu vyzařování, pak bychom mohli vzdálenost spočítat díky faktu, že intenzita klesá s kvadrátem vzdálenosti. Ale intenzitu přirozeně také neznáme. Jak tedy ven z kruhu?

Různá vzdálenost = různá jednotka

Intuitivně dokážeme říct, že Slunce je velmi blízko a cizí galaxie velmi daleko. A slovem velmi myslíme opravdu hodně řádů. Kilometry nám budou pro určování vzdáleností zjevně k ničemu. Stačí se podívat na vzdálenost Slunce²⁰. Ta činí $1,496 \cdot 10^8$ km. Tuto vzdálenost nazýváme *astronomická jednotka* (AU). Pár milionů kilometrů pro astronomii není žádná vzdálenost, proto se použití této jednotky omezuje na sluneční soustavu, popřípadě na popis vzdálenosti hvězd v dvouhvězdném systému.

Používanější jednotkou je *světelný rok* (ly)²¹. Jedním z postulátů speciální teorie relativity je konečná rychlost světla c . Světelný rok zadefinujeme jako vzdálenost, jakou světlo urazí za rok. Jeden světelný rok je 63 241 AU, což je $9,461 \cdot 10^{12}$ km. Posunuli jsme se o pět řádů, ale to pořád nestačí. Samozřejmě můžeme použít i násobky, jako Mly, Gly atp.

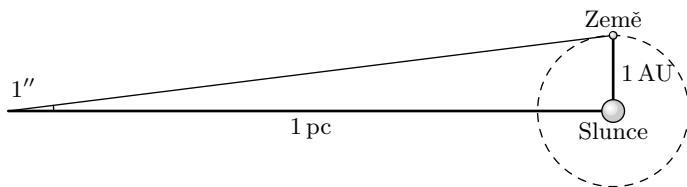
Nejpraktičtější jednotkou (protože největší) je *parsek* (pc). Je to vzdálenost z níž má jedna astronomická jednotka úhlový průměr jedné vteřiny. Přirozeně se pak používají násobky jako Mpc a Gpc (a víc už nikdy nepotřebujete). Převod je

$$1 \text{ pc} \doteq 3,262 \text{ ly} \doteq 206\,265 \text{ AU} \doteq 3,086 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

Jednotky jsme si zadefinovali, je na čase vzdálenost nějak změřit. Jak už bylo zmíněno, na intenzitu se spoléhat nemůžeme. Dobrý návod nám dává poslední jednotka, parsek. Slovo parsek vlastně znamená paralaxa za sekundu. A v paralaxe bude spočívat první způsob měření vzdálenosti.

²⁰Detaily o tom, jak se dá měřit vzdálenost Země – Slunce jsou k nalezení třeba na <http://fykos.cz/rocnik20/serie2.pdf>

²¹Tato jednotka je ve skutečnosti nejčastěji používána autory sci-fi knížek a filmů, protože prostě zní. V astronomické praxi až tak oblíbená není, stále je to málo.

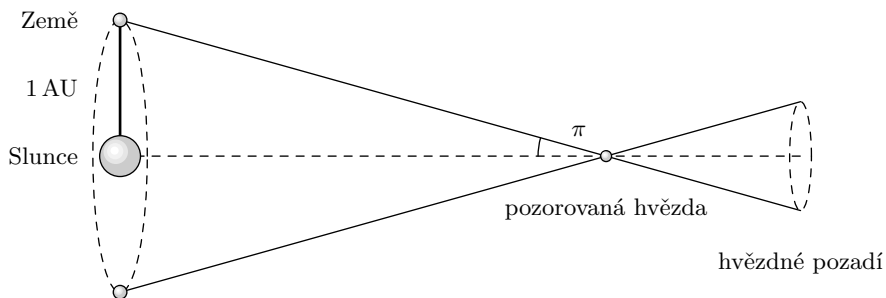


Obr. 39: Definice parseku

Jak se vzdálenost měří

Paralaxa

Hvězdy se nám na obloze jeví jako stálice. V průběhu noci se nám přirozeně nemění tvar souhvězdí, nicméně co když se na jednu hvězdu budeme dívat na jaře a na podzim. Bude její poloha stejná? Ukazuje se, že pro blízké hvězdy se poloha bude nepatrně měnit. Ilustrováno je to na obrázku 40.



Obr. 40: Roční paralaxa

Zdánlivý posun hvězdy na obloze je poměrně malý,²² takže paralaxa byla poprvé změřena až v roce 1838 Fridrichem Bessellem u hvězdy 61 Cygni. S paralaxou zjevně nejde obsáhnout celý vesmír. V roce 1989 byla změřena paralaxa u cca 100 000 hvězd pomocí družice Hipparcos (HIgh Precision PARallax COLlecting Satellite), jejímž následovníkem bude (snad) družice Gaia, která bude mít ještě lepší rozlišení (Hipparcos měl rozlišení 0,002 arcsec). Převrácená hodnota paralaxy je vzdálenost našeho objektu.

$$d = \frac{1}{\text{tg } \pi} \approx \frac{1}{\pi}.$$

Pořád se ale pohybujeme do vzdálenosti 1 600 ly, což vzhledem k velikosti vesmíru není moc. Opět srovnáme, vzdálenost k mlhovině v Orionu známé pod jménem

²²Proxima Centauri, naše nejbližší hvězda po Slunci, má paralaxu $(0,7687 \pm 0,0003)$ arcsec.

M 42 se uvádí jako 1 800 ly. Tato mlhovina je součástí naší galaxie, takže zdaleka nehrozí, že bychom v rozumném vyjádření uměli vyjádřit vzdálenost k odlehlým galaxiím.

Spektroskopická paralaxa

Z názvu by se snad mohlo zdát, že se jedná o další metodu určování vzdálenosti pomocí geometrie. Opak je pravdou. Tahle metoda má jeden podstatný háček, můžeme ji aplikovat pouze na hvězdy, z nichž pomocí spektrografu umíme získat spektrum a které jsou navíc v klidné části života a spalují v nitru vodík. Ze spektra hvězdy umíme odhadnout, jakého je hvězda typu a jak vyzařuje. Pomocí těchto informací umíme odhadnout absolutní hvězdnou velikost, kterou můžeme použít jako vstup do Pogsonovy rovnice. Relativní hvězdnou velikost umíme změřit.

$$m - M = 5 \log \frac{d}{1 \text{ pc}} .$$

Limit této metody je cca 10 000 pc.

Cepheidy

Do ještě větších vzdáleností se můžeme podívat díky proměnným hvězdám, které v průběhu času mění svojí hvězdnou velikost. Takových hvězd je mnoho, ale jen jedna třída, nazvaná podle hvězdy δ Cep, *cepheidy*, se hodí k určování vzdáleností. Studium cepheid se známými vzdálenostmi (z paralaxy) se zjistilo, že existuje empirický vztah mezi jejich jasností a periodou změn. Vztah vypadá takto

$$M_v = -2,78 \log_{10} P - 1,35 ,$$

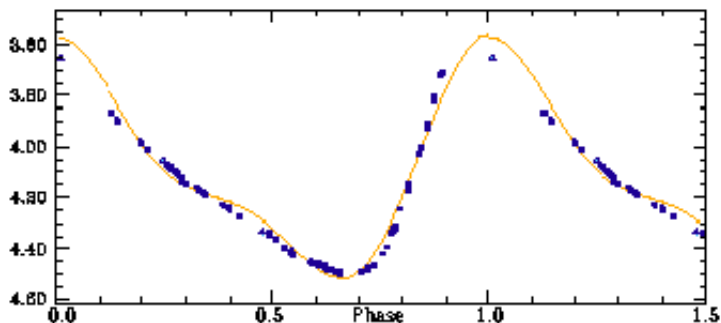
kde M_v je střední hodnota hvězdné velikosti. A známe-li M_v , umíme už určit vzdálenost z Pogsonovy rovnice. Cepheidy byly použity k určování vzdáleností galaxií. Pozorujeme-li nějakou galaxii a nalezneme v ní hvězdu s parametry cepheidy (opět je třeba získat spektrum), můžeme jednoduše zjistit její vzdálenost.

Supernovy typu Ia

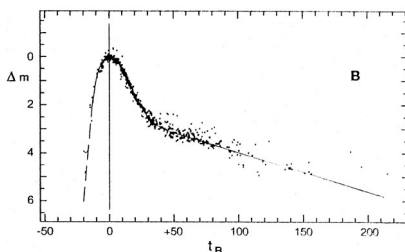
O supernovách jako takových se budeme bavit později, pro tento okamžik je důležité, že existuje třída supernov, které vznikají zhroucením stejně hmotné třídy hvězd, tudíž je velmi dobře definováno, jakou maximální energii může takový výbuch supernovy uvolnit a jaká je tedy v čase maximální absolutní hvězdná velikost (pro vizuální pozorování je to $-(19,3 \pm 0,3)$ mag. Pak stačí dle jasnosti supernovy nakalibrovat na vzdálenost. Supernovy nám umožňují určit vzdálenost ve škále megaparseků, asi 500 krát dál než cepheidy.

Červený posuv

Měřítka kterým dosáhneme suverénně nejdál je červený posuv, označovaný písmenem z . Toto bezrozměrné číslo je schopno v praxi obsáhnout veškeré nám dosažitelné vzdálenosti. K měření červeného posuvu budeme potřebovat spektrum objektu. Nejčastěji se vyskytující prvkem ve vesmíru je bezesporu vodík, o kterém



Obr. 41: Cepheida s katalogovým označením HIP 110991 (Zdroj: ESA, Hipparcos mission)



Obr. 42: Data ze 22 pozorování supernov. Na svislé ose je zdánlivá hvězdná magnituda, na vodorovné čas od výbuchu supernovy ve dnech. (Zdroj: Cadonau 1987, PhD práce.)

přesně víme, jak vypadá jeho spektrum. Najdeme-li spektrum nápadně podobné vodíkovému, ale posunutě směrem k červenému konci, můžeme určit červený posun.

$$z = \frac{\lambda_{\text{pozorované}} - \lambda_{\text{laboratorní}}}{\lambda_{\text{laboratorní}}}$$

Červený posun, který nás zajímá je dopplerovský²³, funguje pro něj vzorec

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \approx \frac{v}{c}$$

Vzdálenost můžeme dopočítat pomocí Hubbleovy konstanty²⁴

$$H_0 = (73,8 \pm 2,4) \text{ (km/s)/Mpc},$$

²³Kosmologický červený posun je v důsledkem expanze vesmíru, ten necháme prozatím ležet, stejně jako gravitační červený posun, který je důsledkem přítomnosti extrémně hmotného tělesa, díky kterému se světlo z unikajícího objektu zdá červenější.

²⁴Toto je hodnota Hubbleovy konstanty z měření Hubbleova vesmírného dalekohledu (HST)

kteřá je konstantou úměrnosti mezi vzdáleností objektu a rychlostí jeho vzdalování se (přibližování) od nás. Hubbleova konstanta je určena experimentálně ze znalostí červeného posuvu a vzdálenosti objektů, určenou jinak než pomocí Hubbleovy konstanty²⁵. Platí

$$v = H_0 d,$$

kde d je vzdálenost objektu a v je rychlost vzdalování (přibližování) objektu od nás, kterou můžeme dosadit do vztahu pro červený posuv.

Absolutně černé těleso

Jakýkoliv objekt zahřátý na nějakou teplotu vyzařuje světlo ve všech vlnových délkách. Hvězdy bezesporu září právě proto, že jsou teplé a vyzařují tedy v kontinuum, stejně jako absolutně černé těleso. Vtip je v tom, že všechny hvězdy nejsou stejně teplé a maximum vyzařování je pro každou teplotu na jiné vlnové délce.

Hvězdy by se nám tedy potenciálně mohly jevit různě barevné. Skutečně tomu tak je. Pokud se na zimní obloze podíváte do souhvězdí Oriona a vyhledáte podle mapky hvězdu Betelgeuze (pro začátečníky v nebeském hledání opět doporučujeme sáhnout po programu Stellarium, více minulý díl seriálu), nebo na jarní obloze hvězdu Arcturus ze souhvězdí Pastýře (Bootes), zjistíte, že tyto hvězdy se nám jeví oproti ostatním naoranžovělé. Znamená to, že maximální vlnová délka, na které vyzařují λ_{\max} je posunuta k červenému konci viditelného spektra a hvězdy jsou poměrně chladné. V matematické formulaci je toto posunutí spektra, též Wienův posunovací zákon

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{akT},$$

kde h je neredukovaná Planckova konstanta, c je rychlost světla a $a \doteq 2,821$ ²⁶.

Ještě důležitějším pro astrofyziku je Stefanův-Boltzmanův zákon, který dává do souvislosti efektivní teplotu objektu T_{ef} , luminositu (svítivost) L a plochu S

$$L = S\sigma T_{\text{ef}}^4.$$

Zvlášť pro sféru

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4.$$

Stefan-Boltzmanova konstanta $\sigma = 5,670400 \cdot 10^{-8} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$. Efektivní teplota je definována na povrchu hvězdy, neříká nám nic o tom, jaké procesy se dějí ve hvězdném nitru. Nicméně i taková veličina nám může být velmi užitečná

z roku 2011. V publikacích se můžeme nejčastěji setkat s hodnotami 70 (km/s)/Mpc nebo 71 (km/s)/Mpc. V každé publikaci je tedy třeba uvést, jaká hodnota je použita. Pro přehled historických měření je k dispozici stránka <https://www.cfa.harvard.edu/~dfabricant/huchra/hubble.plot.dat>.

²⁵Pozor! Hubbleova konstanta, ač je podle názvu konstantní, rozhodně konstantní není. Naopak je funkcí červeného posuvu. Zajímáme-li se o mladý vesmír, musíme vzít v úvahu jinou hodnotu, než používáme pro současná pozorování.

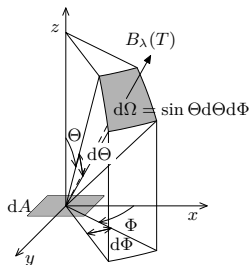
²⁶Jde o kořen rovnice $xe^x - 3e^x - 3 = 0$.

k hrubému přiřazení hvězd do tříd. Efektivní teplotu zjišťujeme pomocí povrchového toku, který klesá s druhou mocninou vzdálenosti od objektu. Tok označíme F a můžeme psát

$$F_{\text{povrch}} = \sigma T_{\text{ef}}^4.$$

Předchozími dvěma zákony jsme popsali jak se chová křivka pro vyzařování černého tělesa, chtělo by to ještě vyjádřit křivku samotnou. Tu lze popsat pomocí Planckovy funkce

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}.$$



Obr. 43: Vyzařování do úhlu $d\Omega$

Planckova funkce nám dává mocný nástroj pro vyjádření nejdne fyzikální veličiny. Kupříkladu budeme-li se zajímat o energii vyzařenu na intervalu $\langle \lambda, \lambda + d\lambda \rangle$ do prostorového úhlu $d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi$ přes plochu dS , kde těleso má teplotu T , jednoduše napíšeme

$$B_\lambda(T) d\lambda dS \cos \Theta d\Omega = B_\lambda(T) d\lambda dS \cos \Theta \sin \Theta d\Theta d\Phi.$$

Z Planckova vyzařovacího zákona umíme odvodit třeba monochromatickou luminositu. Předpokládejme, že absolutně černé těleso vyzařuje izotropicky. Energie vyzařená za sekundu v infinitesimálním intervalu vlnových délek $\langle \lambda, \lambda + d\lambda \rangle$ je

$$L_\lambda d\lambda = \int_{\Phi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_S B_\lambda d\lambda dS \cos \Theta \sin \Theta d\Theta d\Phi.$$

Výraz prointegrujeme a vzpomeneme si na Stefanův-Boltzmannův zákon a vyjádření luminosity. Samozřejmě se pořad pohybujeme na sféře.

$$\begin{aligned} L_\lambda d\lambda &= 4\pi R^2 B_\lambda d\lambda \\ &= \frac{8\pi^2 R^2 hc^2 / \lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda. \end{aligned}$$

Z monochromatické luminosity je také možné získat monochromatický světelný tok, stejně jako pro tok ve všech vlnových délkách, zde stačí použít zákon o obrácených čtvercích:

$$F_\lambda d\lambda = \frac{L_\lambda}{4\pi r^2} d\lambda = \frac{2\pi hc^2 / \lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \left(\frac{R}{d}\right)^2 d\lambda.$$

Malé d je vzdálenost ke hvězdě. Monochromatický tok můžeme považovat za počet jouůl v intervalu $\langle \lambda, \lambda + d\lambda \rangle$, které dopadnou za sekundu na jeden čtvereční metr detektoru namířeného na hvězdu. Samozřejmě nepočítáme s žádnou absorpcí atp.

K čemu všemu v astrofyzice použít aproximaci černým tělesem? V prvním přiblížení se hvězdy chovají jako černá tělesa. Toto přiblížení je velmi hrubé, stačí se

podívat na záznam ze spektrografu. Je patrné, že ve spektru hvězd najdeme čáry (ať už absorpční nebo v méně případech emisní). Černé těleso tedy zůstane pouze rozumně použitelným modelem, ze kterého lze odhadnout základní charakteristiky hvězd. Pomocí nich můžeme v zásadě uvažovat i nad děním ve hvězdném nitru, nicméně jak se dostaneme mimo centrum hvězdy samotné, musíme opět začít uvažovat o absorpcích a emisích prvků v hvězdě obsažených.

Úloha II.S ... vzdálenosti a černé těleso

6 bodů

- Absolutně černé těleso z definice pohltí všechno světlo, co na něj dopadne, a ve všech vlnových délkách. Zároveň je to ideální zářič s charakteristickým spektrem. Můžeme si ho představit třeba jako temné okno domu. Slunce však na první pohled energii pouze vydává. Jak je tedy možné, že jeho záření lze v prvním přiblížení aproximovat absolutně černým tělesem?
- V textu jsme vyjádřili Planckovu funkci jako funkci vlnové délky a teploty. Zkuste ji vyjádřit v závislosti na teplotě a frekvenci. Dokažte, že pro velké vlnové délky a vysoké teploty Planckova funkce přechází v Raighleyův-Jeansův zákon $B_\lambda(T) = 2ckT/\lambda^4$ a naopak ve Wienův zákon $B_\lambda = 2hc^2/\lambda^5 \exp(-hc/\lambda kT)$ pro nízké teploty a malé vlnové délky.
- Kruh, který napozoroval Hubbleův vesmírný dalekohled v supernově SN1987A, má podél hlavní poloosy úhlový průměr $1,66''$. Má jít o cirkulární objekt, který je díky natočení vůči nám pozorován jako elipsa. Světlo ze vzdálenější části elipsy doletělo k Zemi o 340 dnů později než z bližšího konce. Proměřte fotografii²⁷, určete úhel natočení vůči pozorovateli a zkuste spočítat poloměr kruhu. S pomocí trigonometrie určete vzdálenost objektu.
- Pro určení červeného posuvu se zpravidla používají spektrální čáry vodíku. Odhadněte, do jaké hodnoty červeného posuvu z se pomocí spekter můžeme dostat. Zkuste zjistit (nebo navrhnout), jak se měří z u vzdálenějších objektů.

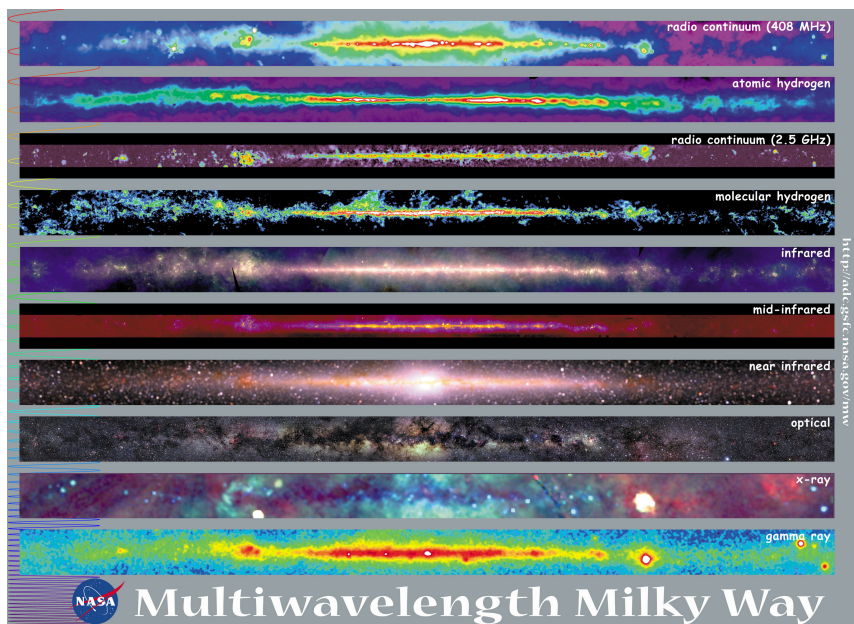
(řešení str. 131)

Kapitola 3: Hvězdný zvěřinec

V minulých dílech jsme se dozvěděli, jak popsat polohu objektů na nebeské sféře, jejich jasnost a vzdálenost. Je načase se podívat na pozorovatelné objekty samotné. Pokud se nacházíme na ideálním pozorovacím místě, dominantou oblohy bude Mléčná dráha. Volnému oku se bude zdát mlhavá, vezmeme-li si na pomoc dalekohled, uvidíme, že mlhavost je ve skutečnosti způsobena tisíci hvězd. Taková situace je ale pouze ve viditelných vlnových délkách. Směrem k infračervené části spektra budeme pozorovat spíše molekuly a prach, směrem k rentgenové části budeme pozorovat záření, na nějž jsou zodpovědní bílí trpaslíci²⁸.

²⁷http://www.stsci.edu/~inr/observ/dpics/SN1987A_Rings.gif

²⁸Co se týče vysokoenergetického galaktického záření, jeho zdroj byl dlouho nejistý. V posledních letech se má za to, že rentgenové záření pochází ze zmíněných bílých trpaslíků, kteří jsou rozestí podél galaktického rovníku.

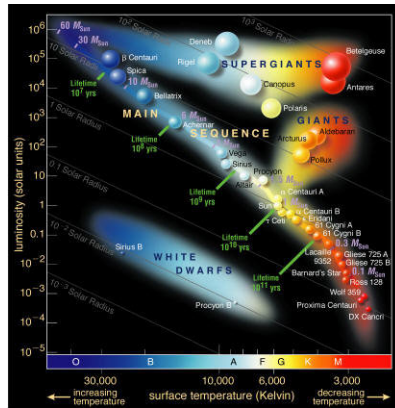


Obr. 44: Pohled na rovinu naší Galaxie v různých vlnových délkách. Obrázek byl převzat ze stránek NASA.

Nicméně zpátky ke hvězdám. Odpoutáme-li se od Mléčné dráhy, uvidíme více či méně rovnoměrně rozeseté hvězdy. Všechny náležejí do naší galaxie (která je v anglofonní literatuře nazývána Mléčná dráha – Milky Way, nicméně v česky psané literatuře se častěji setkáme s obecnějším označením Galaxie – s velkým písmenem). Pokud si na pomoc nevezmeme dalekohled, budou všechny hvězdy a další objekty, jež pozorujeme, náležet Galaxii, s třemi výjimkami. Okem lze spatřit mlhavou skvrnu v souhvězdí Andromeda, nazývanou Mlhovina v Andromedě. Ve skutečnosti se jedná o nejbližší spirální galaxii. Dalšími dvěma výjimkami jsou taktéž galaxie, konkrétně Velké a Malé Magellanovo mračno na jižní obloze. Jedná se o galaxie²⁹, které jsou souputníky galaxie naší. Budeme-li hvězdy pozorovat pozorně, zjistíme, že mají různou barvu. Podíváme-li se třeba na hvězdu Betelgeuze (α Ori, levé rameno Orionu), zjistíme, že je načervenalá, kdežto Vega (α Lyr) je spíše bílá. Není to dáno vzdáleností, nýbrž rozdílným stádiem vývoje. To, jak se hvězdy vyvíjejí, samozřejmě není pozorovatelné na časové škále lidského života. Znalosti o vývoji hvězd získáváme pozorováním hvězd v různém stádiu. Když si začnete zakreslovat hvězdy do grafu s osami označenými jako absolutní hvězdná

²⁹Pozor na terminologii, ve spoustě učebnic a knih (dokonce ne nutně starých), se setkáme s tím, že se jedná o nepravdělné galaxie. To je pravda pouze pro Malé Magellanovo mračno. Velké je ve skutečnosti stará galaxie s příčkou.

velikost M a teplota (nebo, jak se dále dozvíme, barva), dostaneme nehomogenní diagram, který vešel ve známost jako *Hertzsprungův–Russellův diagram* (zkráceně HR diagram).



Obr. 45: HR–diagram

Dříve, než se pustíme do kvalitativního popisu hvězd na HR diagramu, dovolím si upozornit na seriál z desátého ročníku FYKOSu. Krom pěkného přehledu Keplerových zákonů je zde také pěkně vysvětlena fyzika hvězd a jejich stavba. Historii nebudeme opakovat, takže na podrobnější výklad stavby hvězd se podívejte tam.

Na diagramu najdeme dominantní uhlopříčku, kterou nazýváme *hlavní posloupnost* (HP, anglicky *main sequence*, MS). Pod hlavní posloupností nalezneme posloupnost bílých trpaslíků, nad ní posloupnosti obrů a veleobrů. Kde se hvězda bude nacházet a jakými vývojovými stádii projde, bude záviset na počátečních podmínkách. V našem případě bude stěžejní hmotnost hvězdy.

Život hvězdy

Hvězdy se rodí v mlhovinách. Taková nejbližší hvězdná porodnice mlhovina M42 v souhvězdí Oriona³⁰, vzdálená cca 1800 ly. Mlhovina je v podstatě jakýsi oblak plynu. Aby se z něj mohla utvořit hvězda, musí splňovat několik kritérií. Musí být dostatečně chladný, hustý a velký. Dále potřebujeme vnější podnět, který nám vytvoří „zhustek“, jenž začne gravitačně kolabovat. Takový podnět je třeba šoková vlna od výbuchu blízké supernovy. Ne všechny takové vnější podněty uspějí. Proti gravitačnímu kolapsu působí mimo jiné tepelný pohyb molekul, který zvětšuje průměr oblaku plynu a tím znemožňuje kolaps. Navíc potřebujeme, aby měl oblak plynu určitou kritickou hmotnost. Tyto dvě veličiny lze vyjádřit jako Jeansovu

³⁰Součást velkého molekulárního mraku v Orionu (Orion GMC).

délku λ_J a Jeansovu hmotnost M_J

$$\lambda_J \approx \sqrt{\frac{15k_B T}{4\pi G \rho \mu}}, \quad M_J = \frac{4}{3} \pi \rho \lambda_J^3,$$

kde k_B je Boltzmanova konstanta, T termodynamická teplota, G je gravitační konstanta, ρ je hustota mraku a μ je hmotnost na částici mraku. Typické rozměry a hustoty jsou $\lambda_J \sim 10^{15}$ m a $\rho_J \sim 10^{-16}$ kg·m⁻³. Cokoliv nad Jeansovu délku je nestabilní a začne se gravitačně hroutit. Gravitační volný pád samozřejmě nemůže pokračovat donekonečna. Jádru kolabujícího mraku se zahřívá a začíná vyzařovat. Nejdříve v infračervené části spektra. Překročí-li teplota 2000 K, disociují se molekuly H₂ a dostáváme atomární vodík – hlavní ingredienci pro stavbu hvězdy. Dosáhne-li teplota a hustota v jádru dostatečných hodnot, zažehnou se termonukleární reakce (prvně se spálí deuterium, poté lithium, dále bor a až pak vodík). Ve chvíli, kdy se hlavním zdrojem energie hvězdy stane fúze, hvězda vstoupí na zmiňovanou hlavní posloupnost. Hvězda na hlavní posloupnosti tráví přibližně 90 % svého života. Spokojeně přetváří vodík na helium, a to pomocí proton–protonového řetězce, nebo CNO cyklu (nutno podotknout, že CNO cyklus je také spalování vodíku na helium, ale za přítomnosti katalyzátorů, jakými jsou uhlík, kyslík a dusík). Mechanismus záleží na počáteční hmotnosti hvězdy. Obecně lze říci, že hvězdy lehčí než dvě hmotnosti slunce jsou poháněny proton–protonovým řetězcem a hvězdy hmotnější CNO cyklem. Počáteční hmotnost je v podstatě to, co nám určuje, jak se hvězda bude vyvíjet³¹. Hmotné hvězdy žijí řádově 10⁷ let, kdežto ty nejméně hmotné i více než 10¹¹ let. Hmotnost tedy hraje významnou roli. Hmotnost je důležitá nejenom pro rychlost vývoje hvězdy, ale i pro její osud. Málo hmotné hvězdy pomalu „vyhasnou“, kdežto ty největší čekají dynamické poslední fáze vývoje³².

Pro řádovou představu centrálních podmínek hvězdy: teploty zde dosahují 15,7·10⁶ K, hustota 1,5·10⁵ kg·m⁻³ a tlak 2,3·10¹⁶ Pa. Hvězda si spokojeně spaluje vodík na helium, čímž stále udržuje rovnováhu ve svém nitru, které je v tomto procesu pořád přestavováno. Počet částic na 1 kg látky klesá. Tedy abychom udrželi ve hvězdě rovnováhu, když se nám jádro zahušťuje, musíme zvýšit její výkon, tedy nám narůstá potenciální energie hvězdy, která se nám začne pomalu nafukovat.

Pozdní stádia vývoje

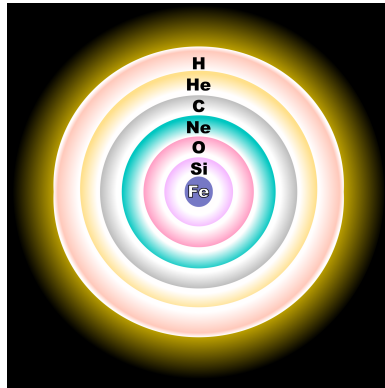
Co se stane ve chvíli, kdy jádro už hvězdu nezvládá energeticky držet? Dobrým přírodním zdrojem je smrštnění hvězdy (jen do určitého poloměru, ne úplně). K jádru se tak strhne nový vodík, který hvězda může spalovat. Nicméně spalování vodíku se nebude dít přímo v jádru (to teď tvoří jaderný odpad – helium), ale ve slupce jádro obklopující. Slupka je výkonnější než původní jádro, část toku energie ze slupky se zadrží ve vnějších oblastech hvězdy a ta se opět začne nafukovat. Ve chvíli, kdy teplota v heliovém jádru vzroste na 10⁷ K a hmotnost jádra dosáhne

³¹ Viděli nebo četli jste-li 2001: *Vesmírná odyssea*, možná si pamatujete poznámku, že kdyby byl Jupiter větší, byl by hvězdou. To je hloupost, musel by být hmotnější.

³² Následující popis vývoje hvězdy si rozhodně nedělá nárok na úplnost. Pokud chcete jít do detailů, sáhněte po literatuře.

$0,4 M_{\odot}$, zažehnou se heliové reakce v jádru, jejichž produktem bude nakonec jádro uhlíkové. Heliové reakce nemohou energeticky dosáhnout výkonu vodíkových reakcí. Hvězda je stále poháněna vodíkovými reakcemi ve vnější slupce. Vodíková slupka se bude postupně ztenčovat, a to je okamžik, kdy hvězda bude opouštět hlavní posloupnost a dostane se do oblasti HR diagramu označované jako červení obří (Red Giants Branch, RGB).

Podobný mechanismus bude probíhat i pro uhlíkové jádro. To bude obklopotvat heliová, a tu vodíková slupka. Vývoj hvězdy probíhá v jakýchsi slupkách. Vždy nám naroste hmotnost jádra, ve kterém se hromadí produkty termonukleárních reakcí, zvýší se teplota a to nám umožní zažehnutí energeticky náročnějších reakcí. Tento vývoj se nám odrazí i na pozici hvězdy na HR diagramu. Ve chvíli, kdy se kolem uhlíkového jádra vytvoří heliová slupka, hvězda vstoupí na asymptotickou větev obrů – Asymptotic Giant Branch (AGB).



Obr. 46: Složení hvězdy na konci jejího života. Obrázek pod licencí Wikimedia Common.

Řetězec prvků je $H \rightarrow He \rightarrow C \rightarrow Ne \rightarrow O \rightarrow Si \rightarrow Fe$. Hvězda v pozdním stádiu vývoje v jádru vypadá jako cibule. Zatímco spalováním vodíku v jádru hvězda tráví většinu svého života, spalování dalších prvků je mnohem rychlejší, v případě křemíku bychom mohli řádově mluvit o dnech. Ne všechny hvězdy svůj jaderný vývoj dokončí celý, některé na to nejsou dost hmotné.

Řekni, kolik vážíš, a já ti řeknu, jak skončíš

Jak bylo několikrát zmíněno, vše závisí na hmotnosti hvězdy. Následující výčet je velmi hrubým rozdělením toho, jak bude vývoj hvězd pokračovat.

Hvězdy do hmotnosti 11 hmotností slunečních končí svůj vývoj maximálně u uhlíkového jádra. Ve chvíli, kdy je helium spalováno na uhlík a vnější obal hvězdy se rozpíná, rozeprve se rychleji, než aby jej gravitace přitáhla zpět na hvězdu. V centru tak zůstane malý bílý trpaslík tvořený degenerovaným elektronovým plynem,

který je vlastně obnaženým jádrem hvězdy, vyzařujícím v ultrafialové části spektra. Takové objekty jsou poměrně pěkné na pohled, neboť vysokoenergetické záření ionizuje okolní obal hvězdy a my pozorujeme planetární mlhovinu³³. Bílý trpaslík bude mít hmotnost do $1,4 M_{\odot}$.

Vývoj hvězd vyšší hmotnosti bude rychlejší. Hvězda bude žít kratší dobu a v jádru dojde k syntéze prvků skupiny železa. Jádro se stále zmenšuje, ale zároveň roste jeho hmotnost. Ve chvíli kdy překročí tzv. *Chandasekharovu mez*, asi 1,4 sluneční hmotnosti, jádro se zhroutí a vznikne malá, velmi hmotná hvězda z degenerovaného neutronového plynu – *neutronová hvězda*. Průměr takového objektu dosahuje jednotek až desítek kilometrů při hmotnosti sluneční. Odhození okolohvězdné obálky je v takovém případě explozivního charakteru a my pozorujeme výbuch supernovy typu II, jejíž spektrum nám ukáže čáry vodíku³⁴.

Extrémem jsou hvězdy hmotnější než 50 sluncí. Po nich nezůstane ani neutronová hvězda, ale rovnou černá díra stelárního typu, jakou je například objekt Cygnus X-1 v souhvězdí Labutě, který má hmotnost okolo 14 slunečních hmotností. Výbuch takové hvězdy pozorujeme jako výbuch supernovy typu Ib, bez čar vodíku, zato s absorpčními čarami těžších prvků. Takový objekt můžeme zachytit jen díky tomu, že svojí silnou gravitací ovlivňuje okolí.

A co takhle dvojhvězdy?

Samostatné hvězdy mohou vzniknout jen do hmotnosti cca 120 slunečních hmotností. Nicméně pokud se nám v zárodečném mraku povede vytvořit více „zhustků“, které začnou kolabovat, můžeme vytvořit hvězdy spolu sousedící – dvojhvězdy (nebo také celé skupiny hvězd, hvězdokupy). To je energeticky samozřejmě poměrně výhodné. Dvě hvězdy jsou zhruba stejně staré, mají totožné chemické složení a podobnou hmotnost. Právě ona podobnost je velmi důležitá. Nemají-li tyto hvězdy hmotnost stejnou, dříve nebo později hmotnější z hvězd urychlí svůj jaderný vývoj a opustí hlavní posloupnost. Může se stát, že hmotnější hvězda se dostane do stadia bílého trpaslíka, kdežto její souputnice je stále hvězdou hlavní posloupnosti. Bílý trpaslík je objekt hmotný a hustý, se silným gravitačním polem, díky kterému začne na sebe přetahovat vnější vrstvy hvězdy hlavní posloupnosti. Materiál z hvězdy bude dopadat na bílého trpaslíka, až opět dosáhneme Chandasekharovy meze. V tu chvíli už není možné hvězdu energeticky udržet a hvězda se hroutlí jako supernova typu Ia, v jejímž spektru najdeme čáry vodíku, křemíku a železa. Supernovy typu Ia jsou důležité pro určení vzdálenosti, vizte minulý díl seriálu, jelikož každá taková hvězda supernova vybuchne stejným mechanismem a je jednoduché pak nakalibrovat vzdálenost.

³³Zkuste do Googlu zadat třeba M51, jedná se o Prstencovou mlhovinu pozorovatelnou na letní obloze v souhvězdí Lvy.

³⁴Po takových supernovách můžeme pozorovat pěkné pozůstatky, zkuste si do prohlížeče zadat Krabí mlhovina nebo M1. Jedná se o pozůstatek ze supernovy, která vybuchla v roce 1054. Nalezneme ji v souhvězdí Býka, ale je velmi špatně pozorovatelná dalekohledem z města, neboť je to objekt docela nejasný.

Úloha III.S ... hvězdný zvěřinec

6 bodů

- Proč je třeba, aby byl molekulární mrak, ze kterého jsou tvořeny hvězdy, chladný? Zkuste odhadnout a zdůvodnit rozumnou teplotu.
- Podíváme-li se na HR diagram některé z hvězdokup, najdeme velký rozptyl okolo hlavní posloupnosti. Jaké jsou způsoby, jak takový rozptyl může vzniknout? Ilustrační obrázek pro hvězdokupu Plejády – M45 – najdete třeba tady³⁵.
- Jak dlouho by žila hvězda, kdyby nebyla živena termonukleárními reakcemi, ale jen energií ze smršťování se?
- Planetární mlhovina Helix má průměr 16' a nachází se ve vzdálenosti cca 213 pc od Země. Jaký je její skutečný poloměr a jak je stará, pokud se její obálka rozpíná s rychlostí 20 km/s?

(řešení str. 135)

Kapitola 4: Kdysi dávno v jedné galaxii...

V minulém díle jsme zlehka natukli fakt, že všechny objekty, co nad našimi hlavami vidíme pouhým okem, jsou až na tři výjimky v naší Galaxii. Zmíněné výjimky jsou malé satelitní galaxie Velké a Malé Magellanovo mračno a spirální galaxie v Andromedě, M31. Díky práci Edwina Hubblea dneska už jistojistě víme, že se jedná vzdálené hvězdné ostrovy³⁶.

Vidličkový diagram

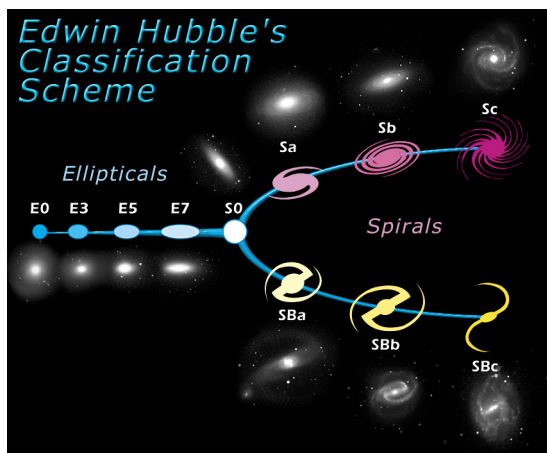
Podíváme-li se na nějaký pěkný přehled galaxií³⁷, zjistíme, že galaxie rozhodně nejsou jedna jako druhá. Toho si při pozorováních všiml i Hubble a rozřadil galaxie do dvou kategorií – eliptické „rané“ galaxie a „pozdní“ spirální galaxie. Předpokládal, že struktura galaxií je evoluční efekt a vytvořil tzv. *vidličkový diagram*. Samostatnou kategorií mimo vidličkový diagram tvoří nepravidelné galaxie (označené I, jako *irregular*, pěkným příkladem nepravidelné galaxie je Malé Magellanovo mračno).

S postupem času se zjistilo, že není nutně pravda, že spirální galaxie jsou pozdní a eliptické rané. Galaktická morfologie závisí na mnoha parametrech, nicméně teorie v tomto směru rozhodně není jednotná. Je zřejmé, že velkou roli budou v tomto případě hrát galaktické srážky a kanibalismus (pohlcování menších galaxií a slapové trhání sousedních galaxií). Do detailního vysvětlování tvorby nebo zániku spirálních ramen se tedy radši nebudeme pouštět. Popis omezíme na čistou fenomenologii (i ta je víc než složitá).

³⁵<http://www.astrophysicspectator.com/images/diagrams/PleiadesHRDiagramSup2.jpg>

³⁶Ačkoliv ještě v první polovině dvacátého století byla podstata galaxií neznámá. Ve starší literatuře je často najdete označené jako spirální nebo eliptické mlhoviny.

³⁷Třeba na stránkách Hubble Heritage Team – http://heritage.stsci.edu/gallery/gallery_category.html



Obr. 47: Vidličkový diagram podle E. Hubblea. Eliptické „rané“ galaxie jsou označeny písmenem E, spirální „pozdní“ galaxie jsou označeny písmenem S. Druhé (a případně jakékoliv další) písmeno značí jemnější rozlišení tvaru. Obrázek ve vlastnictví Space Telescope Science Institute.

Jak popsat galaxii

Podíváme-li se na různé galaxie, zjistíme, že se v jejich morfologii opakují některé znaky. Spirální ramena, středové zjasnění nebo podivné kruhy a příčky. Eliptické galaxie typicky nevykazují příliš morfologických struktur. Jediné, co lze popsat je jejich elipticita

$$\varepsilon = 1 - \beta/\alpha,$$

kde α , resp. β je velká, resp. malá poloosa elipsy promítnuté na nebeskou sféru. Hubbleova klasifikace se vyjadřuje jako 10ε , přičemž galaxie, kde by $\varepsilon > 0.7$ nebyly pozorovány, proto klasifikace končí u E7.

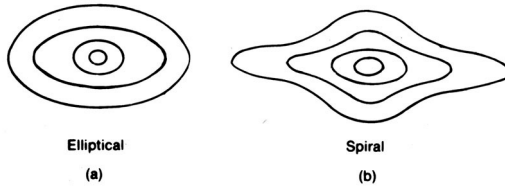
U spirálních galaxií najdeme strukturu mnohem zajímavější. Středové zjasnění se nazývá *galaktická výduť* (bulge), obklopuje ji *disk*. Pro morfologické třídy je důležitý poměr luminosit výduť a disku ($L_{\text{bulge}}/L_{\text{disc}}$). Pokud je tento poměr přibližně 0,3, pozorujeme těsně namotanou spirálu a galaxii nazveme Sa. Pro poměr přibližně 0,05 pozorujeme volnější ramena, třída se nazývá Sc. Když se trefíme „někam mezi“, nazveme třídu galaxií Sb. Krom disku a výduť můžeme pozorovat i *příčku* (v současné době věříme, že naše galaxie má příčku). Pokud ji pozorujeme, přidáme do názvu galaxie B. (Galaxie bez příčky se často značí A a pokud existuje jen náznak příčky, jedná se o AB.)

V klasifikaci můžeme jít ještě dál. Můžeme popsat, zda se v galaxii nachází kruh (ring, značeno r), jaká spektrální třída hvězd je v nich dominantní (A, F, G, K podle odpovídajících spektrálních tříd hvězd, O a B nikdy nejsou převažující, stejně tak M). Dále lze popsat úhel natočení číslem 1 (přímý pohled, *face on*)

až 7 (pohled z boku, *edge on*). Galaxii v Andromedě tak klasifikujeme jako kS5 (převažují hvězdy spektrální třídy K, jedná se o spirálu a má poměrně vysokou inklinaci).

Výjimku z klasifikace tvoří galaxie S0, tzv. *čočkové galaxie* (lenticular), které jsou z morfologického hlediska stále velkou záhadou. Krom zmíněných morfologických znaků můžeme pozorovat ještě hvězdné halo, ve kterém se nachází kulové hvězdokupy, a poslední, neviditelnou složku, sférické halo temné hmoty.

Krom popisu morfologického se můžeme pokusit i o popis analytický. Proč jenom pokusit? Galaxie jsou obecně velmi komplexní systémy, které je analyticky prakticky nemožné popsat. V podstatě veškeré informace, které o galaxiích máme jsou výsledkem pozorování a numerických simulací. Jednou z mála popsatečných veličin je distribuce plošného jasu. Abychom ji mohli popsat, musíme si zadefinovat pár pojmů. Jedním z nich je *isofota* (isophote), oblast s konstantním počtem vyzařovaných fotonů.



Obr. 48: Isofoty eliptické a spirální galaxie orientované *edge on*. Převzato z Introduction to Cosmology, J.V. Narlikar, Cambridge University Press.

Isofoty potřebujeme pro nadefinování poloměru galaxie, neboť pokud nemáme ostrý okraj (což galaxie ostatně nemá), je poměrně těžké ho určit. Poloměr, který budeme potřebovat se jmenuje efektivní poloměr r_e , což je projektovaný poloměr, ve kterém je obsáhnuta plocha, která emituje polovinu celkového vyzařování galaxie. Pro výdutě spirálních galaxií a eliptické galaxie jde povrchová jasnost napsat ve formě tzv. *de Vacoulerova profilu*,

$$\mu(r) = \mu_e + 8,3268 \left(\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/4} - 1 \right),$$

kde μ značí povrchový jas. Obecnější je tzv. *Sérsicův profil*

$$\mu(r) = \mu_e + 8,3268 \left(\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right),$$

kde jsou tři volné parametry n , μ_e a r_e . Záměnou těchto parametrů se můžeme pokusit popsat i složitější struktury (všimněme si, že de Vacoulerův profil je v podstatě jen konkrétní případ Sérsicova profilu).

Co k různým jasnostem v galaxii přispívá? Nic jiného než rozložení hvězd. Hus-tota hvězd v halu je menší než v disku a proto se nám disk bude zdát jasnější.

Tento fakt umíme popsat veličinami *integrální a diferenciální počet hvězd*. Bud $n_M(M, S, \Omega, r)$ (jednotka $\text{pc}^{-3} \text{mag}^{-1}$) hustota hvězd s absolutní hvězdnou velikostí v intervalu $\langle M, M + dM \rangle$ s atributem S (kupříkladu daná luminositní třída), které leží v prostorovém úhlu Ω ve vzdálenosti r . Počet hvězd vyhovujících našim parametrům spočítáme jako

$$n(S, r, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} n_M(M, S, \Omega, r) dM.$$

Změníme-li integrační meze a omezíme-li integrovaný interval na $\langle 0, d \rangle$, dostaneme počet hvězd, které se nachází mezi námi a daným objektem. Použijeme-li $dV = \Omega r^2 dr$, tedy

$$N_M(M, S, \Omega, d) = \left(\int_0^d n_M(M, S, \Omega, r) \Omega r^2 dr \right) dM,$$

získáme vzorec pro *integrální počet hvězd*. Pokud tento vztahu zdiferencujeme, získáme zpět $n_M(M, S, \Omega, r)$,

$$n(S, r, \Omega) dM = \frac{1}{\Omega r^2} \frac{dN_M dM}{dr}.$$

V tuto chvíli si musíme uvědomit, že hvězdy se stejnou absolutní hvězdnou velikostí se nám budou jevit různě jasné, budou-li v různých vzdálenostech. Limitní vzdálenost d můžeme nahradit zdánlivou hvězdnou velikostí m a vyjádříme počet hvězd $\bar{N}_M(M, S, \Omega, m) dM$. Pokud vzroste limitní hvězdná velikost jen lehce, limitní vzdálenost vzroste podle ní a do prostorového úhlu se vleze více hvězd, konkrétně

$$\left(\frac{\bar{N}_M(M, S, \Omega, m)}{dm} dm \right) dM.$$

Pomocí toho si nadefinujeme *diferenciální počet hvězd*

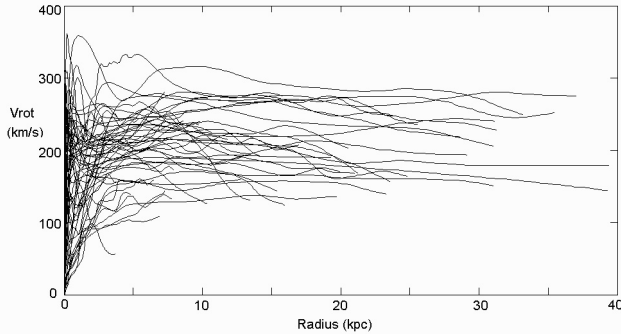
$$A_M(M, S, \Omega, m) dM dm \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{N}_M(M, S, \Omega, m)}{dm} dM dm,$$

kde se hvězdy nachází nejen v intervalu absolutních hvězdných velikostí, ale i v intervalu zdánlivých velikostí. Tyto vztahy jsou samozřejmě hodně idealizované, neboť neberou v úvahu přítomnost prachu a plynu mezi pozorovanou galaxií a pozorovatelem.

Rotační křivky

Výše zmíněné vztahy umí galaxii popsat tak, jak ji vidíme, ale jsou nedostatečné, mají-li popsat základní kinematiku galaxie. Jako všechno ve vesmíru, i galaxie rotují³⁸. K tomu, abychom zjistili, jak rotují, se používají rotační křivky. Pozorováním bylo zjištěno, že rotační křivky jsou si nápadně podobné a nezáleží, zda pozorujeme spirální, eliptickou nebo čočkovou galaxii.

³⁸Naše Slunce oběhlo střed galaxie cca 21krát. Jeden oběh se nazývá galaktický rok a trvá přibližně 220 miliónů let.



Obr. 49: Rotační křivky galaxií. Na y -ové ose je rotační rychlost, na x -ové ose vzdálenost od středu galaxie.

Pokud se jednotlivé křivky začnou porovnávat s typem galaxií nebo jejich jasností, objeví se korelace. Se vzrůstající luminositou v B filtru roste rotační rychlost strměji a dosahuje vyšší maximální rychlosti V_{\max} . Máme-li stejnou luminositu v B filtru, rané spirální galaxie budou mít vyšší V_{\max} než pozdní typ. Hodnota V_{\max} může být různá, ale tvar křivky vždy zůstává. Toto se stalo jedním z důkazů existence *temné hmoty*. Jak je výše zmíněno, existuje korelace mezi V_{\max} a L platící pro spirální galaxie. Rotaci galaxie lze změřit pomocí mapování neutrálního vodíku obsaženého ve spirálních ramenech galaxie. Část galaxie, která se přibližuje k nám bude posunuta do modré části spektra a vzdalující se do červené. Takový případ je ideální pro použití vztahu pro Dopplerův efekt, kde $\Delta\lambda$ je rozdíl vlnových délek, kde se detekoval maximální tok zčervenalých a zmodralých fotonů z pozorované galaxie.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{klid}}} \approx \frac{v_r}{c} = \frac{V \sin i}{c},$$

kde v_r je radiální rychlost, i je inklináční úhel mezi pozorovatelem a směrem kolmým na galaktickou rovinu a V je rotační rychlost. Korelace mezi rotační rychlostí a absolutní hvězdnou velikostí (nebo luminositou) se nazývá *Tullyho-Fisherova relace*. Jedná se o empirický závěr, pro jednotlivé Hubbleovy typy galaxií se závislost liší.

$$M_B = -9,95 \log_{10} V_{\max} + 3,15 \quad \text{typ Sa,}$$

$$M_B = -10,2 \log_{10} V_{\max} + 2,71 \quad \text{typ Sb,}$$

$$M_B = -11,0 \log_{10} V_{\max} + 3,31 \quad \text{typ Sc.}$$

Jak již bylo výše zmíněno chceme něco zjistit o kinematice. Pro takový případ je pěkné odhadnout hmotnost objektu, který se hýbe a zkusit zjistit, zdali umíme alespoň přibližně dojít k empirickým vztahům. Můžeme si jednoduše napsat Newtonův gravitační zákon a dostředivou sílu, které dáme do rovnosti (hvězdy se

drží na více či méně stabilních trajektoriích). Hmotnost hvězdy je m , vzdálenost od středu galaxie r a hmotnost galaxie obsažené v poloměru r je M_r .

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{GM_r m}{r^2} \Rightarrow M_r = \frac{V^2 r}{G},$$

kde za V můžeme dosadit i V_{\max} . Pro zjednodušení zavedeme konstantu $C_{ML} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L}{L_r/M_r}$ a můžeme vyjádřit luminositu

$$L = C_{ML} \frac{V^2 r}{G}.$$

Pokud uvažujeme, že všechny spirály mají stejnou povrchovou jasnost v centru galaxie, můžeme zavést další konstantu $C_{SB} \stackrel{\text{def}}{=} L/r^2$, díky které se ve vztahu pro hmotnost zbavíme poloměru. Luminositu následně přepíšeme,

$$L = \frac{C_{ML}^2}{C_{SB}} \frac{V_{\max}^4}{G^2} = CV_{\max}^4,$$

kde jsme všechny konstanty schovali do C . Máme-li luminositu, můžeme si odvodit i absolutní hvězdnou velikost. Vzpomeneme si na Pogsonovu rovnici a píšeme

$$M = M_{\text{Sun}} - 2,5 \log_{10} \frac{L}{L_{\text{Sun}}},$$

$$M = -10 \log_{10} V_{\max} + \text{konst.}$$

Uvedený vztah je porovnatelný s empiricky naměřenými relacemi. Deviace vznikají v důsledku příliš ideálních předpokladů ($V = \text{konst}$ a konstantní povrchová jasnost v centru galaxie).

Nahlédnutí do temna

Výše jsme zmínili, že ploché rotační křivky jsou jedním z důkazů o existenci temné hmoty. To můžeme zkusit podpořit jednoduchým výpočtem. Vyjdeme z výsledku porovnání gravitační síly a dostředivé síly (označení zachováváme),

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{GM_r m}{r^2},$$

$$M_r = \frac{V^2 r}{G}.$$

Vztah derivujeme podle r , neboť chceme aby platil i pro infinitesimální intervaly,

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{V^2}{G}.$$

Dále si uvědomíme, že máme sféricky symetrický systém, který by měl splňovat nějaký pěkný zákon zachování, kupříkladu hmotnosti

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Dáme-li oba vztahy do rovnosti, dojdeme k vyjádření hustoty hmoty ve vnějších částech galaxie

$$\varrho(r) = \frac{V^2}{4\pi Gr^2}.$$

Proč vnější části? Když bychom uvažovali malá r , zjistíme, že hustota diverguje, což nikde nebylo pozorováno. A samotný důkaz existence temné hmoty? Ve vztahu pro hustotu vidíme závislost r^{-2} , což neodpovídá rozložení hvězd v galaxii, kde z pozorování profilů jasnosti byla určena závislost na $r^{-3,5}$. Pro vysvětlení se použil neviditelný hmotný komponent projevující se pouze gravitačně, temná hmota. Pomocí simulací byl upraven i vztah pro hustotu, aby byl brán v úvahu i střed galaxie.

Vztah

$$\varrho_{\text{CDM}}(r) = \frac{\varrho_0}{\left(\frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2}$$

je dnes znám jako *cold dark matter*, tedy chladná temná hmota. a je volitelný parametr, stejně jako ϱ_0 . Blízko středu galaxie se tento profil chová jako $1/r$, ve většině galaktického hala jako $1/r^2$ a na samé hraně galaktického hala jako $1/r^3$. Vzhledem k možnosti volby parametru se tento profil ukázal jako univerzální pro všechny galaxie, nezávisle na jejich typu.

Úloha IV.S ... seriálová

6 bodů

a) Spirální galaxie můžeme velmi hrubě popsat logaritmickou spirálou

$$r(\varphi) = r(0) \exp(\varphi \operatorname{tg} \Phi),$$

kde r a φ jsou polární souřadnice a Φ je úhel otevření odpovídající úhlu, který svírá kolmice k průvodiči s tečnou ke spirále (úhel otevření roste ve směru hodinových ručiček, vyjadřujeme jej v radiánech, přičemž hodnota může nabývat více než 2π). Zvažme $\Phi = 10^\circ$. Odvoďte vztah pro poměr vzdáleností dvou sousedních závitů téhož spirálního ramene od centra galaxie. Jak by se poměr změnil, kdyby ramena byla čtyři (rovnoměrně rozložená). Vyjádřete vzdálenost pro sousední ramena v $r(0) = 8 \text{ kpc}$.

b) Uvažujte nekonečný vesmír s konstantní hustotou hvězd a bez extinkce. Vyjádřete vztahy pro integrální a diferenciální počet hvězd v závislosti na zdánlivé hvězdné velikosti. Co se stane, bude-li zdánlivá hvězdná velikost velká?

Bonus Jaká je pravděpodobnost, že dvě hvězdy se nám v galaxii promítnou za sebe? Uvažujte osamocené hvězdy, ne dvojhvězdy.

(řešení str. 138)

Kapitola 5: Aktivní galaxie

V minulém díle jsme si představili základní morfologii galaxií, které běžně pozorujeme na obloze, máme-li k dispozici dalekohled. Krom morfologie kterou jsme si

představili, můžeme galaxie rozdělit na aktivní a neaktivní. Za aktivitu považujeme výtrysk (dále budeme používat anglický název *jet*) z centrální supermasivní černé díry, která se nachází v jádru každé galaxie.

Je tam černá díra nebo ne?

Postulovat, že uprostřed každé aktivní galaxie je černá díra je poněkud odvážné, neboť jako sám název napovídá, černou díru nemůžeme jednoduše pozorovat, neboť její gravitace je natolik silná, že z ní neuniká ani světlo. Musíme se zamyslet nad tím, co v případě takové aktivní galaxie vidíme³⁹. Aktivní galaxie se vyznačují tím, že je vidíme na velké vzdálenosti, což naznačuje, že mají vysokou luminositu L . Pro výpočet provedeme několik zjednodušení. Zdroj budeme považovat za stabilní a izotropní, budeme také uvažovat o tom, že centrum naší aktivní galaxie je tvořeno ionizovaným vodíkem. Aby nebylo dezintegrováno, musí gravitační síla vyrovnávat tlak záření. Vyjádříme si tok záření F , což je energie, která za jednotku času proce slupkou o poloměru r .

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}.$$

Zamysleme se na chvíli nad hybností. Pro foton hybnost vyjádříme $p = E/c$ a pro tok záření to bude obdobné. Hybnost toku záření je v podstatě to, co nazveme tlakem záření

$$P_{\text{rad}} = \frac{F}{c} = \frac{L}{4\pi r^2 c}.$$

Pokud nás zajímá zářivá síla, tak se musíme zajímat ještě o účinný průřez jednoho elektronu σ_e . Vztáhneme-li sílu na jednotkový vektor v radiálním směru \mathbf{r} , můžeme napsat

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \sigma_e \frac{L}{4\pi r^2 c} \mathbf{r}.$$

To bychom měli záření, teď přijde na řadu gravitace. Vzhledem k tomu, že máme ionizovaný vodík, můžeme gravitační sílu mezi částicemi napsat jako

$$\mathbf{F}_{\text{grav}} = -\frac{GM(m_p + m_e)}{r^2} \mathbf{r} \approx -\frac{GMm_p}{r^2} \mathbf{r},$$

jelikož hmotnost elektronu je zanedbatelná. Galaktické jádro se pomalu nerozpíná, takže je zřejmé, že gravitační síla, směřující dovnitř musí být větší nebo rovna zářivé síle

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{rad}} &\leq \mathbf{F}_{\text{grav}} \\ \sigma_e \frac{L}{4\pi r^2 c} &\leq \frac{GMm_p}{r^2} \\ L &\leq \frac{4\pi Gcm_p}{\sigma_e} M. \end{aligned}$$

³⁹Lze dokázat, že černá díra se nachází i uprostřed neaktivních galaxií, ale tím se zde zabývat nebudeme.

Po vyčíslení dostaneme $6,31 \cdot 10^4 \text{ erg}\cdot\text{s}^{-1} \approx 1,26 \cdot 10^{38} (M/M_\odot) \text{ erg}\cdot\text{s}^{-1}$. Výše uvedený vztah pro luminositu se nazývá *Eddingtonův limit*. Určuje nám minimální hmotnost, kterou může mít zdroj o luminositě L . Vztah pro hmotnost můžeme přepsat jako

$$M_E = 8 \cdot 10^5 L(10^{44}) M_\odot,$$

kde $L(10^{44})$ znamená luminositu v jednotkách $10^{44} \text{ erg}\cdot\text{s}^{-1}$. Pro takovou aktivní galaxii je typická hodnota $L \approx 10^{46} \text{ erg}\cdot\text{s}^{-1}$, což odpovídá hmotnostem okolo 10^8 hmotností slunečních. Vzhledem k tomu, že pozorovaný objekt je bodový, jako hvězda, musí být poměrně malý a velmi hmotný. Takové kritérium nespĺňuje nic jiného než právě černé díry.

Kde se bere jet aneb kouzlo akrece

Už jsme zmínili, že za aktivitou galaxie je jakýsi jet a černá díra. Tyto dva fenomény můžeme spojit. Materiál na černou díru nepadá přímo, ale po spirále⁴⁰, což formuje tzv. *akreční disk*. Ten černou díru v podstatě krmí. Materiál který na ní dopadne pak „exploduje“ a vytvoří jet⁴¹. Můžeme si zkusit odvodit, kolik hmoty černá díra musí sežrat, aby si udržela aktivitu. Předpokládejme, že černá díra není dokonalá a existuje nějaký koeficient efektivity μ . Celkovou vyčerpatelnou energii můžeme vyjádřit jako $E = \mu M c^2$. Vyzářená energie se dá napsat jako $L = dE/dt$. Ve vztahu pro energii je jediný v čase měnitelný faktor hmotnost černé díry samotné, můžeme tedy napsat (tečka značí časovou derivaci)

$$L = \mu \dot{M} c^2,$$

kde časová derivace hmotnosti je tempo akrece na centrální objekt. Z empirických závěrů víme, že

$$\dot{M} = \frac{L}{\mu c^2} \approx 1,8 \cdot 10^{-3} \left(\frac{L(10^{44})}{\mu} \right) M_\odot \text{ rok}^{-1}.$$

To jak moc bude akrece účinná závisí na faktoru μ , který nám vlastně popisuje úspěšnost přeměny gravitační energie na záření. Potenciální energie černé díry samotné je $U = GMm/r$, kde m je hmotný element ve vzdálenosti r od černé díry, provedeme-li jeho časovou derivaci, výsledkem bude pozorovaná luminosita

$$L \approx \frac{dU}{dt} = \frac{GM}{r} \frac{dm}{dt} = \frac{GM\dot{m}}{r}.$$

Z uvedených rovnic můžeme uhodnout, že $\mu \propto M/r$. To nám definuje jakousi kompaktnost objektu samotného. Můžeme si zadefinovat i poloměr objektu, jelikož jde o černou díru, použijeme poloměr⁴²,

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \cdot 10^{13} M(10^8) \text{ cm} \approx 10^{-2} \text{ světelných dní}.$$

⁴⁰Lze pěkně demonstrovat na gumové bláně na kterou položíme těžkou kuličku. Pustíme-li k ní kuličku lehčí, nespustí se přímo doprostřed, ale bude kroužit po spirále.

⁴¹Samotný mechanismus vzniku jetu je neznámý, proto uvozovky.

⁴²Poloměr okolo hmotného objektu, jehož úniková rychlost je rovna rychlosti světla, jinak řečeno.

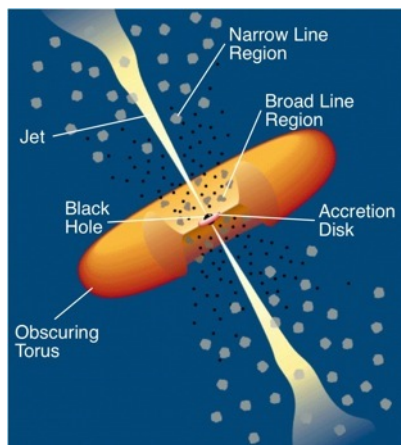
Odhlédneme-li od relativistických efektů a určíme, že náš testovací hmotnostní bod je ve vzdálenosti $5R_S$ od centra černé díry, můžeme zjednodušeně napsat

$$U = \frac{GMm}{5R_S} = \frac{GMmc^2}{10GM},$$

což po vyčíslení vychází cca $0,1mc^2$, kde 0,1 je faktor μ . Pro srovnání, fúze vodíku na hélium má $\mu = 0,007$. Co to znamená? Že pro vyžáření obrovské energie, kterou pozorujeme ve skutečnosti stačí neuvěřitelně málo hmoty, konkrétně $\dot{M} \approx 2M_\odot \text{rok}^{-1}$. Zakomponujeme-li do výpočtu Eddingtonův limit, dostaneme maximální tempo akrece, což je $2,2M(10^8)M_\odot \text{rok}^{-1}$. Náš model je samozřejmě výrazně zjednodušený, neboť jsme celou dobu počítali se sférickým systémem (už při odvození Eddingtonova limitu). Ve vesmíru často narazíme na tzv. super Eddingtonovské luminosity. Ty vznikají, je-li systém nikoliv sférický, ale diskový. Akrece pak probíhá zejména v ekvatoriálním disku, kde ji nejčastěji také pozorujeme. Kolem černé díry pak vzniká charakteristický torus akrečního disku, který je obklopen prachovým materiálem, který se neúčastní akrece.

Všechny aktivní galaxie rovný jsou

Aktivitu galaxií pozorujeme různou. Někdy velmi silnou, někdy slabší a hlavně u takových zdrojů pozorujeme různá spektra, která má na svědomí toroidální disk tvořený různými lehkými prvky v různém stavu. V první polovině devadesátých let byla vyslovena teorie, že všechny aktivní galaxie jsou vlastně jeden druh objektu, pozorovaný z různého úhlu. Vzniklo tzv. *unifikované schéma aktivních galaxií* (pro jednoduchost budeme dále pro ono aktivní jádro galaxie používat zkratku AGN – z anglického active galactic nucleus).



Obr. 50: Náčrtek AGN

Pozorované objekty dostaly z historického důvodu různá označení (teorie bohužel přišla až po pozorování), neboť se vyznačují různými vlastnostmi.

Seyfertovy galaxie (Sy)

První objevené aktivní galaxie, rozdělují se na několik podtříd podle vzhledu spektra. Základním dělením je Sy 1 a Sy 2. V případě Sy 2 de díváme do roviny prachového a akrečního disku a vidíme pouze úzké spektrální čáry, kdežto na Sy 1 se koukáme z většího úhlu (dle obrázku cca úhel kde se objeví broad line region, BLR) a pozorujeme i oblast se širokými spektrálními čarami. Mezi těmito dvěma třídami ještě existuje jemnější dělení jako Sy 1,5, Sy 1,8 podle inklinálního úhlu. Ačkoliv mluvíme o úzkých a širokých spektrálních čarách, ve srovnání s obvyčejnými galaxiemi jsou obojí velmi široké, což je způsobeno Dopplerovým efektem. To naznačuje, že pozorovaný materiál velmi rychle rotuje.

Kvasary (QSO)

Kvasar je zkratkové slovo, které vzniklo z anglického *quasi stellar object*. S hvězdou takový objekt samozřejmě nemá nic společného, ale při objevu bylo konstatováno, že se jedná o hvězdě podobný objekt s neobvyklým spektrem s velmi širokými spektrálními čarami. Jedná se o jedny z nejvzdálenějších objektů, které umíme pozorovat, neboť jsou extrémně jasné (nejvzdálenější kvasary mají červený posun cca 7). Jsou pozorovatelné z podobného úhlu jako Sy 1, ale liší se tím, že jsou o něco jasnější (můžeme to srovnat tak, že jasnost jádra v případě Sy je srovnatelná s jasností všech hvězd v galaxii, která objekt obklopuje, kdežto kvasary jsou asi stokrát jasnější). Hranice mezi Seyfertovými galaxiemi a kvasary je poměrně nejasná a velmi často záleží jen na autorech článků/učebnic. Kvasary navíc narozdíl od Seyfertových galaxií můžeme pozorovat i v rádiové oblasti, ale ne všechny. To implikuje dělení na tzv. rádiové – *radio loud* (QSR) a obvyčejné (QSO).

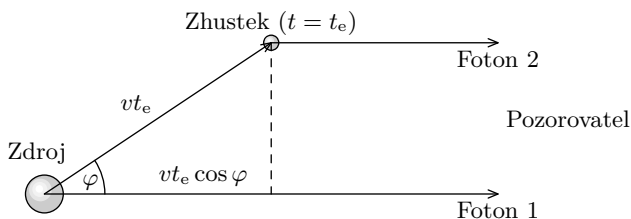
Rádiové galaxie

Narozdíl od kvasarů jsou rádiové galaxie pozorovány hlavně v dlouhovélné části spektra a naopak třeba v rentgenu jsou poměrně slabé. Na takové galaxie nahlížíme z ještě většího úhlu. V rádiové oblasti začínáme pozorovat hlavně materiál jetu. Stále však pozorujeme i okolní plyn, který se projevuje ve spektrech objektů. Rádiové galaxie opět můžeme rozdělit podle přítomnosti širokých čar na tzv. BLRG – *broad line radio galaxy*, která ve spektru obsahuje rozšířené čáry, stejně jako úzké, a NLRG – *narrow line radio galaxy*, kde jsou pozorovatelné jen úzké spektrální čáry.

Blazary

Název blazar vzniknul z pojmenování *blazing quasi stellar object*. Jakýmsi hlavním zástupcem (po kterém se zároveň jmenuje podtřída těchto objektů) je objekt BL Lac. Kapitálky jsou tradičně označeny proměnných hvězd, tahle je konkrétně v souhvězdí Lacerta (Ještěrka). Než se zjistil galaktický původ, mělo se za to, že jde o poměrně záhadnou hvězdu, která svoji jasnost zvládne změnit až o 30% za 24 hodin a za delší čas až o faktor 100. Vedle třídy BL Lac sem patří i tzv. OVV

– *optically violently variable quasars*, které jsou jasnější než třída BL Lac. OVV mají ve spektru detekovatelné široké a úzké čáry a jsou silně polarizovány. Spektru BL Lac dominuje kontinuum, spektrální čáry tu nejsou časté. Je to dáno tím, že pozorujeme-li blazar, koukáme se téměř přímo do jetu vycházejícího z centrálního objektu. Při pozorování blazarů se přišlo na to, že podle rádiového pozorování vykazují nadsvětelný pohyb. Podle základního principu teorie relativity něco takového nemohlo být možné. Ukazuje se, že nadsvětelné rychlosti jsou u blazarů běžné, neboť za ně může geometrie pozorování.



Obr. 51: K výkladu zdánlivé nadsvětelné rychlosti

Představme si objekt, který se pohybuje rychlostí v (skutečná rychlost, ne zdánlivá) a od linie pozorování je jeho jet odkloněn o úhel φ (obrázek 51). Objekt emituje foton podél linie pozorování v čase $t = 0$, zdroj je v tu chvíli od pozorovatele vzdálen na vzdálenost d . Představme si druhý foton, emitovaný v čase t_e , vzdálenost objektu od Země je v tu chvíli $d - vt_e \cos \varphi$. Vyjádříme si časy, ve kterých oba fotony dorazí k pozorovateli

$$t_1 = \frac{d}{c},$$

$$t_2 = t_e + \frac{d - vt_e \cos \varphi}{c}.$$

Z toho můžeme spočítat časový rozdíl mezi dvěma detekcemi na Zemi

$$\Delta = t_2 - t_1 = t_e \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi \right),$$

což je čas *kratší* než t_e . Zdánlivá rychlost naměřená pozorovatelem je

$$v_{zd} = \frac{vt_e \sin \varphi}{\Delta t} = \frac{v \sin \varphi}{1 - (v/c) \cos \varphi}.$$

Z výše uvedené rovnice můžeme vyjádřit poměr v/c

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{v_{zd}/c}{\sin \varphi + (v_{zd}/c) \cos \varphi}.$$

Nadsvětelné rychlosti lze pozorovat zejména v dlouhovlnné části elektromagnetického spektra, ve které vidíme samotný jet⁴³.

⁴³Pěkně je to znázorněno pro příklad galaxie M87 z kupy galaxií v Panně kupříkladu zde <http://www.stsci.edu/ftp/science/m87/color3.gif>.

Úloha V.S ... seriálová

6 bodů

- Aktivní galaxie se na obloze stejně jako hvězdy jeví jako bodové zdroje. Zkuste navrhnout co nejvíce způsobů, jak rozlišit hvězdu a aktivní galaxii.
- Z rádiového pozorování kvasaru 3C 273 se zjistilo, že shluk hmoty v jetu se pohybuje od aktivního jádra s úhlovou rychlostí $\mu = 0,0008 \text{ rok}^{-1}$. Předpokládejte, že shluk se pohybuje v rovině oblohy kolmo na linii pozorování, vzdálenost je $d = 440/h \text{ Mpc}$, h je Hubbleova konstanta. Vyjádřete zdánlivou rychlost v_{zd} .
- Odvodte, pro jakou hodnotu úhlu φ bude β_{zd} maximální?
- Předpokládejme, že supermasivní černá díra v centru galaxie má účinnost 30 %. Kolik energie vyzáří, pohltí-li objekt o hmotnosti Země?

(řešení str. 141)

Kapitola 6: Kupy galaxií a výlet do kosmologie

V uplynulých dílech seriálu jsme zjistili, že hvězdy se shlukují do galaxií, které můžeme rozdělit nejen podle jejich morfologie, ale i podle toho, jestli se jedná o galaxie aktivní nebo neaktivní. Pozorováním se ukázalo, že galaxie ve vesmíru nejsou rozprostřeny homogenně, ale na velkých škálách tvoří jakousi kosmickou síť. Tu si můžeme představit jako pěnu v koupeli. Bubliny jsou prázdný prostor mezi galaxiemi, stěny bublin jsou místa, která tvoří kosmickou síť a tam, kde se bubliny protínají, sedí kupy galaxií. Naše pozorování jsou samozřejmě omezená, nicméně numerické modely nám pomáhají nasimulovat vesmír ve velkých škálách. Zatím nejkompexnější provedenou simulací je tzv. Millenium simulation⁴⁴, která simuluje vývoj vesmíru na krychli o straně 2 miliardy světelných let. Začíná ve chvíli, kdy je náš vesmír star 0,2 miliardy let a končí v současnosti. Jasně body v této simulaci nejsou samotné galaxie, ale kupy galaxií.

Co je to kupa galaxií

Kupa galaxií je gravitačně vázaná skupina galaxií. Mohou jich být desítky, ale i tisíce. Ve viditelné části spektra vidíme pouze kolekci galaxií, pro které se jeví velmi nepravděpodobné, že by mohly být gravitačně svázány, neboť jejich radiální rychlosti jsou příliš velké. Chybějící hmota má dvě části, jednu z nich je tzv. *intercluster medium* – ICM, které představuje horký plyn, který je detekovatelný pouze na rentgenových vlnových délkách, neboť jeho teplota dosahuje $10^7 - 10^8 \text{ K}$. Jedná se především o brzdné záření (bremsstrahlung) a záření v emisních atomových čarách. Znalost morfologie tohoto plynu je pro nás velmi důležitá, neboť nese informace o historii kupy galaxií. Z rozložení teplot a chemického složení takového plynu se můžeme kupříkladu dozvědět, zda kupa galaxií interagovala s jinou kupou nebo jestli nějakou menší kupu pohltila.

Viditelná složka kup galaxií představuje asi 1 % hmoty kupy, ICM představuje cca 9 %. Zbýlých 90 % představuje již nechvalně známá temná hmota. Kupy galaxií

⁴⁴ Simulaci můžete zkontrolovat třeba na <http://www.youtube.com/watch?v=jzFbLHLJhnM>, popřípadě o ní zjistit více informací na její domovské stránce <http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/millennium/>.

byly mezi prvními systémy, kde byla temná hmota nepřímou pozorována.

Jak odvodit existenci temné hmoty

Existenci temné hmoty jsme ukázali už pro galaxie. Jak se dokazuje pro kupy galaxií? Pomocí tzv. viriálového teorému, který vyjadřuje poměrně jednoduchou skutečnost. Dává do spojitosti středovanou potenciální energii $\langle V \rangle$ a středovanou kinetickou energii $\langle K_T \rangle$ stabilního systému N částic, který je vázán potenciální energií systému

$$2\langle K_T \rangle = - \sum_{k=1}^N \langle V_k \rangle.$$

Předpokládejme, že systém je mechanicky stacionární. Radiální vektor od místa v kupě k určité galaxii o hmotnosti M_σ si označíme \mathbf{r}_σ . Výslednou sílu působící na testovací galaxii můžeme napsat jako

$$M_\sigma \frac{d^2 \mathbf{r}_\sigma}{dt^2} = \mathbf{F}_\sigma,$$

po skalárním vynásobení dostaneme tvar

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (M_\sigma r_\sigma^2) = \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{F}_\sigma + M_\sigma \left(\frac{d\mathbf{r}_\sigma}{dt} \right)^2.$$

Sečteme příspěvky od všech galaxií v kupě a vyjádříme si viriál (čili vlastně potenciální energii, ale aby viriál Vir byl potenciální energií, budeme ho muset vycentrovat). Polární moment hybnosti je

$$\Theta = \sum_{\sigma=1}^N M_\sigma r_\sigma^2$$

$$Vir = \sum_{\sigma=1}^N \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{F}_\sigma.$$

Pokud si K_T označíme součet kinetických energií, můžeme výše napsané skalární rovnice napsat jako

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = Vir + 2K_T.$$

Vzpomeneme si na náš počáteční předpoklad stacionárního systému. V takovém systému je změna momentu hybnosti konstantní, respektive osciluje kolem konstantní hodnoty. Zavedeme-li takový předpoklad, pak

$$Vir = -2K_T, \quad Vir = E_p,$$

potenciální energie v tomto případě je energií gravitační. Můžeme pak napsat

$$E_p = - \sum_{\sigma < \gamma} \frac{GM_\sigma M_\gamma}{r_{\sigma\gamma}},$$

$$-E_p = 2K_T = \sum_{\sigma} M_\sigma \overline{v_\sigma^2},$$

kde v_σ je rychlost galaxie. Zkusme předpokládat, že galaxie jsou uniformně distribuované ve sféře o poloměru R , jejíž potenciální energii spočítáme jako gravitační energii, kterou sféra drží pohromadě. Představme si, že je tvořena vzájemně na sebe působícími slupkami, každá slupka působí gravitačně na hmotu jí obepnutou, pak

$$dE_p = -G \frac{dm_{\text{slupka}} m_{\text{koule}}}{r},$$

$$E_p = -G \int_0^R \frac{(4\pi r^2 \varrho) (\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho)}{r} dr,$$

$$E_p = -\frac{16\pi^2}{15} G \varrho^2 R^5,$$

$$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

kde M značí celkovou hmotnost.

Uděláme ještě malou úpravu, rychlosti budeme středovat i přes hmotnosti (proto dvojitě středování)

$$\sum_{\sigma} M_\sigma \overline{v_\sigma^2} = \mathcal{M} \overline{v^2}$$

$$\mathcal{M} = \frac{5R \overline{v^2}}{3G}.$$

Síla a viriál pak nabývají tvarů

$$\mathbf{F}_\sigma(r) = -\frac{G\mathcal{M}M_\sigma \mathbf{r}_\sigma}{R^3},$$

$$Vir = \sum_{\sigma} \mathbf{r}_\sigma \mathbf{F}_\sigma = -\sum_{\sigma} \frac{G\mathcal{M}M_\sigma r_\sigma^2}{R^3},$$

$$Vir = -2K_T = \sum_{\sigma} M_\sigma \overline{v_\sigma^2} \Rightarrow v_\sigma^2 = \frac{GM r_\sigma^2}{R^3}.$$

Vztah pro potenciální energii, který bere v úvahu celkovou hmotnost kupy galaxií, je překvapivě silný, pokud je konfrontován s pozorováním. Měli jsme předpoklad sférickosti kupy galaxií, ale není těžké zjistit, že perfektně sférické nejsou.

Trochu si náš vztah naškálujeme. Vzájemné vzdálenosti naškálujeme na $R/10$ a budeme předpokládat, že většina hmoty je koncentrována ve dvou galaxiích o hmotnostech $\mathcal{M}/2$ a $\mathcal{M}/3^{45}$. Vztahy pro potenciální energii můžeme následně přepsat

$$E_p = -\frac{2,5G\mathcal{M}^2}{R}, \quad E'_p = -\frac{10}{3}\frac{G\mathcal{M}^2}{R}.$$

E_p by měla řádově být stejná jako u původního odhadu a proto beztestně můžeme napsat

$$2K_T = -E_p < \frac{3G\mathcal{M}^2}{5R},$$

$$\mathcal{M} > \frac{3R\overline{v}^2}{5G}.$$

Z pozorování kupy galaxií (známé jako Coma cluster) v souhvězdí Vlasy Bereniky (*Coma berenices*), bylo zjištěno, že $R = 2 \cdot 10^6$ ly. Rychlost neznáme, pouze její průmět. Předpokládejme rozložení $\overline{v}^2 = 3\overline{v}_{\text{los}}^2$ (los = line of sight). Pak hmotnost přepíšeme jako

$$\mathcal{M} > \frac{\overline{v}_{\text{los}}^2}{5G}.$$

Porovnáme s napozorovaným průmětem $\overline{v}_{\text{los}}^2 = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, což implikuje $\mathcal{M} > 9 \cdot 10^{46} \text{ g}$. Z celkové hmotnosti odhadneme průměrnou hmotnost galaxií jako $\overline{M} = 4,5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$. Změřená luminosita je $8,5 \cdot 10^7 L_{\odot}$. Víme, že pro hvězdy platí $L \propto M^{3,5}$. Konverzní faktor je pro nám známé systémy cca 3,5, ale z pozorování pro kupy galaxií vyplývá, že by musel být asi 500, což je nesmysl. Udělali jsme snad chybu v předpokladu stacionarity? Pro nestacionární systém by platilo

$$2K_T + Vir \geq 0,$$

což by pro vyšší potenciální energie znamenalo ještě vyšší hmotnosti a pro nižší by kupa galaxií nemohla držet pohromadě. Pro pozorovaný konverzní faktor by muselo platit $E > 0$ a $K_T \ll -E_p$, což je nesmysl, neboť takto by se kupy galaxií formovaly jen díky tomu, že se geometricky nachází blízko sebe a ne díky gravitačnímu působení. Jediným vysvětlením je tedy temná hmota.⁴⁶

Kosmologie

Známe-li povahu většiny těles nacházejících se ve vesmíru, můžeme se zabývat vesmírem samotným a jeho vznikem. Obecně se přijímá, že vesmír vznikl okamžikem, který se nazývá *Velký třesk*. Co bylo před ním, je fyzikálně nezodpověditelné, neboť Velký třesk je okamžik, kdy vznikl čas a prostor. Od té doby se vesmír rozpíná. To má za následek základní kosmologický princip. Vzhledem k tomu, že vesmír

⁴⁵Tento předpoklad není vůbec špatný, kupříkladu v případě kupy galaxií v Panně je centrální galaxií soustřeďující většinu hmoty galaxie M87.

⁴⁶Analogický výpočet provedl astronom Fritz Zwicky ve své práci v první polovině 20. století. Právě on nabídl vysvětlení obrovských hmotností nepozorovanou hmotou.

vznikl defacto v bodě, nemůže mít žádný bod současného vesmíru privilegované postavení. V principu to znamená, že vesmír musí být homogenní a izotropní. Jak jsme si uvedli na začátku tohoto dílu seriálu, vesmír vypadá jako koupelňová pěna. Vezmeme-li si krychli o dostatečně velké hraně, budeme moci ukázat, že vesmír na skutečně velké škále homogenní a izotropní je. Přistoupíme-li na fakt, že vesmír se rozpíná, můžeme základní rysy chování vesmíru odvodit s použitím obyčejné newtonovské mechaniky.

Newtonovský model vesmíru

Předpokládejme, že pro rychlost rozpínání vesmíru platí $\mathbf{v} = H\mathbf{r}$, kde H je Hubbleova konstanta (každý nechť použije její libovolnou hodnotu, které fandí). Jak jsme zmiňovali v předchozích dílech seriálu, Hubbleova konstanta vlastně není tak konstantní a mění se v čase. Při časových derivacích tedy nesmíme zapomenout na tuto závislost. Představme si, jak by vypadal vesmír bez gravitace

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= 0, \\ \frac{dH\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{r} \frac{dH}{dt} + H \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r} \frac{dH}{dt} + (H\mathbf{r})H = 0, \\ \frac{dH}{dt} &= -H^2, \end{aligned}$$

velikost Hubbleovy konstanty nám klesá, zintegrujeme-li tento vztah dostaneme

$$\frac{dH}{H^2} = -dt \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{t}.$$

Toto je tempo klesání hodnoty Hubbleovy konstanty; bude-li působit i gravitace, Hubbleova konstanta bude s časem klesat rychleji.

Pro komplexnější model si zdefinujeme tzv. *škálovací faktor*. Jedná se o bezrozměrnou veličinu popisující velikost vesmíru v daný okamžik a charakterizuje jeho okamžité rozpínání. Jedná se o bezrozměrnou veličinu. Pro současnost ($t = 0$) pro škálovací faktor platí $R(t = 0) = 1$, kdežto v momentě Velkého třesku by byl roven nule. Můžeme si vyjádřit vzdálenost mezi dvěma body v čase t

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0)R(t), \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{r}(0) \frac{dR(t)}{dt} = \frac{\mathbf{r}(t)}{R(t)} \dot{R}(t), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{r}(t)H(t) \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\dot{R}}{R}. \end{aligned}$$

Rozpínání vesmíru může být navíc zrychlené/zpomalené. Pro vyjádření této skutečnosti byl zdefinován tzv. *decelerační parametr*, který je zdefinován jako

$$q = -\frac{R\ddot{R}}{R^2}.$$

Ve vlastním modelu zanedbáme tlak, hmotnost budeme považovat za konstantní a látku budeme brát za naprosto obyčejný prach uzavřený v kouli.

$$M = M_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \varrho_0 \rightarrow \varrho = \varrho_0 R^{-3}.$$

Zároveň víme, že síla působící na jednotku hmoty je dle Newtonova zákona úměrná R^{-2} . Zvolme si na hranicích koule testovací objekt o jednotkové hmotnosti, pak

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}v^2 - G\frac{M}{r}, \\ &= \frac{1}{2}(Hr)^2 - G\frac{4}{3}\pi\varrho r^2, \\ &= \frac{1}{2}r_0^2 R^2 H^2 - \frac{4}{3}\pi G r_0^2 R^2 \varrho, \end{aligned}$$

což po upravení dá

$$\begin{aligned} \frac{3E}{4\pi G r_0^2 R^2} &= \frac{3H^2}{8\pi G} - \varrho, \\ &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} - \varrho_0, \\ &= \frac{3\dot{R}^2}{8\pi G R^2} - \varrho. \end{aligned}$$

Je-li energie pozitivní, čas roste do nekonečna a hustota jde k nule, v takovém případě se rozpínání nezastaví a my budeme mít co do činění s tzv. *otevřeným vesmírem*. Při záporné energii tomu bude přesně opačně a vesmír se po čase začne smršťovat. Ukazuje se, že pro vesmír zřejmě platí $E = 0$, což je vesmír s tzv. kritickou hustotou, která je funkce okamžité Hubbleovy konstanty. Pro současnost platí

$$\varrho_k = \frac{3H_0}{8\pi G}.$$

Zkusme si vyřešit, jak by při $E = 0$ vypadal vesmír plný prachu.

$$\begin{aligned} \frac{3\dot{R}^2}{8\pi G R^2} &= \varrho = \frac{\varrho_0}{R^3}, \\ \dot{R}\sqrt{R} &= \sqrt{\frac{8\pi G \varrho_0}{3}}. \end{aligned}$$

Vyřešíme metodou separace proměnných

$$\begin{aligned} R^{1/2} dR &= \left(\frac{8\pi G \varrho_0}{3}\right)^{1/2} dt = H_0 dt, \\ \frac{2}{3} R^{3/2} &= \left(\frac{8\pi G \varrho_0}{3}\right)^{1/2} t, \\ R &= (6\pi G \varrho_0)^{1/3} t^{2/3}, \\ \varrho &= \frac{\varrho_0}{R^3} = \frac{1}{6\pi G t^2}. \end{aligned}$$

Konstanty schováme do k a můžeme psát

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{k^{2/3}t^{-1/3}}{kt^{2/3}} = \frac{2}{3t},$$

$$q = \frac{1}{2}.$$

Takový model platí pro náš blízký vesmír, ale neumí popsat větší oblasti, neboť nebere v úvahu záření. Pro případ záření bychom museli počítat s hustotou energie dělenou c^2 . Decelerační parametr pro vesmír naplněný pouze zářením bude 1, hmotnost vesmíru bude s jejím rozpínáním klesat a pro čas by platilo $T = T_0 \sqrt{t/t_0}$.

Pro určení geometrie vesmíru a další parametry nám už newtonovská fyzika nebude stačit a museli bychom uvažovat efekty obecné teorie relativity. V současné době je vesmír nekonečný, plochý, eukleidovský (trojúhelníky mají součet vnitřních úhlů 180°). Plochost vesmíru znamená, že poměr hustoty ke kritické hustotě je jednotkový (kdyby nebyl, vzdálené objekty by se nám zdály bližší/vzdálenější).

Jak dokázat správnost modelu

Kosmologické simulace stále trpí tím, že je velmi složité namodelovat vývoj vesmíru a zahrnout do něj látku, záření, temnou hmotu a ještě navíc exotickou temnou energii, která sice vyplňuje tři čtvrtiny vesmíru, ale nevíme o ní zhora nic, krom toho, že náš vesmír jistým způsobem udržuje na kritické hustotě. Zatímco vesmír v průběhu historie prošel fázemi, kdy mu dominovalo záření a později hmota, vypadá to, že jsme právě ve fázi, kdy dominuje temná energie. Ani jednu z těchto skutečností jsme samozřejmě v našem modelu nebrali do úvahy.

Samotný fakt, že dokážeme podpořit teorii Velkého třesku bez toho, abychom si pomáhali rozsáhlými simulacemi a jejich konfrontací se skutečností, je velkým úspěchem. Samotná teorie byla konkurující teorii statického vesmíru. Mezi těmito dvěma teoriemi se prakticky rozhodlo jediným objevem, a to objevem reliktního záření, ozvěny Velkého třesku. Záření samotné bylo objeveno v šedesátých letech, ale objev samotný nestačil. Proč? Záření bylo detekováno na přesně takové frekvenci (2,7 K) a přesně opisovalo křivku záření absolutně černého tělesa, kterou bychom očekávali. Pokud by totiž záření bylo dokonale homogenní, nemohlo by vysvětlit vznik nehomogenit, ze kterých se formovaly hvězdy a galaxie. V devadesátých letech byla vypuštěna družice COsmic Background Explorer (COBE), která potvrdila, že nehomogenity ve v reliktním záření vyskytují. Pomocí nich můžeme dokonce detekovat kupy galaxií. Jak mohly takové nehomogenity vzniknout?

Poměrně ambiciózní a pravděpodobná teorie, která je umí vysvětlit, je takzvaná inflační fáze vesmíru, kterou jsme vůbec nezahrnovali do našeho jednoduchého newtonovského modelu. Původně homogenní vesmír se poměrně spěšně rozpínal a řádnul, nicméně ono řádnutí zjevně způsobilo, že se ke slovu dostalo pseudovakuum s obrovskou energií, které vesmír doslova rozfouklo do obrovských rozměrů. Rozpínání vesmíru bylo v tu chvíli zrychlené, což znamená, že druhá derivace škálovacího faktoru bude pozitivní. Zajímavé je, že i dnes pozorujeme zrychlené rozpínání. Ono pseudovakuum v dnešní době převládá za temnou energii, která

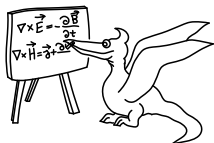
plní funkci kosmologické konstanty, která brání vesmíru, aby se při rozpínání nakonec úplně roztrhnul. Co se týče budoucnosti vesmíru, hustota temné energie se měnit nebude, ale hustota hmoty bude s rostoucími rozměry klesat, protože se nemění její celková hmotnost. A proto temná energie nakonec ve vesmíru převládne úplně.

Úloha VI.S ... seriálová

6 bodů

- a) Vyjděte z Newtonova modelu vesmíru odvozeného v seriálu. Pro $E = 0$ vyřešte případ, kdy se vesmír rozpíná a hustota energie vakua se nemění. Odhadněte, jaká je na základě tohoto modelu budoucnost vesmíru.
- b) Pokud je vesmír plný hvězd, jistě k nám dříve nebo později dorazí světlo z každé hvězdy. Jak je možné, že je i přesto v noci tma? Zdůvodnění zkuste podpořit i kvantitativními odhady.
- c) V seriálu je uvedeno, jak odvodit existenci temné hmoty na kupě galaxií pomocí poměrně jednoduchého modelu. Zkuste navrhnout další způsob, jak dokázat existenci temné hmoty v kupách galaxií. Není třeba nutně podpořit výpočtem, stačí jednoduchý návrh.

(řešení str. 143)



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I.S ... seriálová

- Některé hvězdy jsou považovány za obtočné, čili cirkumpolární. Znamená to, že jsou vidět po celý rok? Jaké hvězdy jsou v našich zeměpisných šířkách vidět po celý rok? Jaká souřadnice nám cirkumpolární hvězdy označuje? Jaká je situace u nás, na pólu a na rovníku? Pro ilustraci doporučujeme stáhnout program Stellarium⁴⁷, kde si můžete zadat jakoukoliv zeměpisnou polohu a podívat se na jednotlivé situace.
- Srovnajte absolutní hvězdnou velikost nejjasnější hvězdy letní oblohy, Vegy (α Lyr, 7,76 pc daleko, zdánlivá hvězdná velikost $-0,01$ mag), a Betelgeuze (α Ori, 200 pc daleko, zdánlivá hvězdná velikost 0,42 mag). Jak by se nám hvězdy jevily, kdyby si vyměnily vzdálenosti? Diskutujte viditelnosti.
- Transformace a zase transformace. Zkuste si spočítat transformaci mezi galaktickými a ekvatoriálními souřadnicemi II. druhu. Výrazy nemusíte upravovat do verze uvedené v literatuře.
- Janap má ve zvyku občas se ztratit. Ona za to nemůže, občas se to stane. Tentokrát však s sebou měla theodolit. Zázračnou krabičku, která umí určit výšku hvězd nad obzorem. Změřila si polohy hvězd Arcturus a Capella a zaznamenala přesný čas. Arcturus měl 123,20 grad v 18:46:30, Capella 113,60 grad v 19:18:30. Kdepak se Janap nacházela? (Nezapomeňte, že výška hvězd je uváděna v gradech, horizont je na úrovni 100 gradiánů, plný úhel je 400 gradiánů).

Cirkumpolární hvězdy

Slovo cirkumpolární znamená v latině *kolem pólu*. V češtině takovým hvězdám říkáme obtočné. Tyto hvězdy jsou vidět po celý rok v závislosti na naší zeměpisné poloze. Nacházíme-li se na severním pólu, máme Severku (či Polárku, nebo α UMi) přímo v zenitu. Zapomeneme na chvíli na to, že Země vykonává precesní pohyb,⁴⁸ a budeme Severku považovat za pevný bod. Celá obloha se zdánlivě otáčí kolem ní, takže budeme budeme pozorovat pohyb hvězd rovnoběžný s obzorem. Budeme tedy ochuzeni o jakákoliv jižní souhvězdí. Celý rok uvidíme pouze souhvězdí severní polokoule.

Situace bude přesně opačná na rovníku. Máme-li ideální obzor, severka bude ležet přesně na něm. Obloha se bude doslova valit kolmo na obzor. V průběhu roku se nám na obloze vystřídají všechna souhvězdí severní i jižní oblohy.

⁴⁷<http://www.stellarium.org/>, licence GNU GPL, takže program je ke stáhnutí zdarma.

⁴⁸Chová se jako setrvačnick, precesi Země nazýváme *Platónský rok*, trvá 25 765 let, takže precesi skutečně zanedbat můžeme.

Situace v našich zeměpisných šířkách (Praha: $50^{\circ}05' N$ $14^{\circ}25' E$) je někde mezi oběma extrémy. Hvězdy, které u nás označíme jako cirkumpolární, musí splňovat

$$\text{vzdálenost od nebeského pólu} \leq 90^{\circ} - \text{zeměpisná šířka pozorovatele}.$$

Pro Prahu se pohybujeme na cca 40 stupních od Severky. Jinak řečeno všechny hvězdy s deklinací větší než 40° jsou u nás viditelné celý rok. Jedná se kupříkladu o souhvězdí Velké a Malé Medvědice, Cefeja, Cassiopei nebo Draka.

Hvězdné velikosti

Jediné, co potřebujeme k tomuto příkladu, je jedna z modifikací Pogsonovy rovnice. Konkrétně ta, která zahrnuje vzdálenost:

$$m - M = -5 + 5 \log_{10} \frac{d}{\text{pc}}$$

Dosadíme-li do vzorce údaje pro Venu, dostaneme absolutní hvězdnou velikost 0,54 mag. Pro Betelgeuze dostaneme údaj $-6,09$ mag. Je tedy zřejmé, že Betelgeuze je jasnější, nicméně se nám tak nejeví, neboť je dál. Kdyby si obě hvězdy vyměnily vzdálenosti, na naší obloze by se nám jevíly následovně: Vega by byla sotva viditelná bez dalekohledu, neboť by její relativní hvězdná velikost dosáhla hodnoty 7,05 mag (za průměrných podmínek v České republice, tedy ne v centru Prahy, člověk rozliší hvězdy do cca 6,5 mag). Naproti tomu Betelgeuze by se stala dominantou zimní oblohy se zdánlivou hvězdnou velikostí $-6,64$ mag. Byla by jasnější než Venuše, což by z ní dělalo po Slunci a Měsíci nejjasnější objekt na noční obloze.

Transformace

Je třeba si uvědomit, o co a jak jsou souřadnice posunuté. Sklon roviny galaxie vůči průmětu rovníku na nebeskou sféru je $62,6^{\circ}$. Otočením o tento úhel si vyrovnáme inklinaci. Teď je třeba pouze vyrovnat rozdíl mezi jarním bodem a středem Galaxie. Počátek galaktické délky je definován v souhvězdí Střelce (SagA*), počátek rektascenze je v jarním bodu. Potřebujeme tedy znát rektascenzi bodu, ve kterém galaktický rovník protne světový rovník. S pomocí hvězdného atlasu atlasu zjistíme, že $RA = 18^h 49^m$ (označíme α_0 , na stupně je to $282,25^{\circ}$). Dále víme, že galaktická délka nezačíná v jarním bodu, ale ve středu galaxie. Otáčíme kolem galaktického pólu o $l_0 = 33^{\circ}$.

Jako nečárkovanou soustavu si označíme tu, kterou chceme dostat, čárkovanou označíme tu původní. Teď je třeba si uvědomit, jaká otočení děláme:

- Čárkovanou soustavu otočíme o $l_0 = 33^{\circ}$ kolem osy z' .
- Nečárkovanou soustavu otočíme o $i = 62,6^{\circ}$ kolem osy x a o $\alpha_0 = 282,25^{\circ}$ kolem osy z .

Galaktické souřadnice mají tvar

$$\begin{aligned} x' &= r \cos b \cos l, \\ y' &= r \cos b \sin l, \\ z' &= r \sin b. \end{aligned}$$

Po výše zmíněném otočení získáme tvar

$$\begin{aligned}x' &= r \cos b \cos (l - l_0), \\y' &= r \cos b \sin (l - l_0), \\z' &= r \sin b.\end{aligned}$$

Teď otočíme ekvatoriální soustavu II. druhu o úhel α_0

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_0), \\y &= r \cos \delta \sin (\alpha - \alpha_0), \\z &= r \sin \delta.\end{aligned}$$

Zbývá otočení okolo osy x , pro které obecně platí, otáčíme-li o úhel i

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= y \cos i + z \sin i, \\z' &= -y \sin i + z \cos i.\end{aligned}$$

Dosadíme-li za čárkované a nečárkované souřadnice, dostaneme transformační rovnice mezi galaktickými a ekvatoriálními souřadnicemi II.druhu.

$$\begin{aligned}\cos b \cos (l - l_0) &= \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_0) \\ \cos b \sin (l - l_0) &= \cos i \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_0) + \sin i \sin \delta \\ \sin b &= -\sin i \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_0) + \cos i \sin \delta.\end{aligned}$$

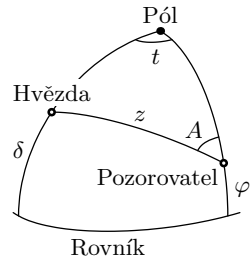
Hvězdné GPS

Co je v této úloze důležité? Uvědomit si, co všechno známe. Známe výšku obou hvězd nad obzorem a víme, o které hvězdy se jedná. Známe také hvězdný čas pozorování (není uvedeno datum, takže můžeme předpokládat, že se jedná o místní hvězdný čas, tedy GMT + 2).

Z toho, že víme, o jaké hvězdy se jedná, můžeme určit jejich rektascenzi a deklinaci dle katalogu. Arcturus má deklinaci $19,18241^\circ$ a rektascenzi $14^h 15^m 39,67^s$. Capella má deklinaci $45,99799^\circ$ a rektascenzi $05^h 16^m 41,35^s$.

Znalost času, resp. místního hodinového úhlu nám bude nemálo nápomocná. Známe také deklinaci hvězd, která je v ekvatoriální soustavě konstantní. Nakreslíme-li si situaci, zjistíme, že se pohybujeme na sférickém trojúhelníku. Bohužel je zřejmé, že bez nějakého počátečního odhadu to jen tak nepůjde. Zkusme si napsat rovnice popisující situaci.

Vzpomeneme si na zákon o kosinech pro strany sférického trojúhelníku. Chceme popsat stranu z . Předpokládanou pozici označíme indexem PP , zeměpisnou



Obr. 52: Sférický trojúhelník

šířku budeme označovat *Lat* z anglického *latitude*, délku budeme označovat *Lon* z anglického *longitude*.

$$\cos z = \cos(90^\circ - \text{Lat}_{\text{PP}}) \cos(90^\circ - \text{dec}) + \sin(90^\circ - \text{Lat}_{\text{PP}}) \sin(90^\circ - \text{dec}) \cos t$$

Použijeme vztahu $\cos(90^\circ - x) = \sin x$ a rovnici upravíme do slušnější podoby

$$\cos z = \sin \text{Lat}_{\text{PP}} \sin \text{dec} + \cos \text{Lat}_{\text{PP}} \cos \text{dec} \cos t.$$

z je v našem případě zjevně vzdálenost počítaná po hlavní kružnici, spojující předpokládanou polohu a zeměpisnou polohu hvězdy a zároveň i zenitová vzdálenost. Co je příjemné a nepříjemné na takové rovnici? Popsali jsme naši situaci. Technicky vzato máme jednu rovnici pro dvě neznámé. Na druhou stranu máme dvě hvězdy, tak by to nemusel být takový problém. Horší je to s nelinearitou rovnice. Ta eliminuje jakékoliv na první pohled triviální řešení. Nejlepším řešením je naprogramovat si řešení nějaké pěkné iterativní metody.

Inspirace může vypadat třeba takto:

- *f* je zeměpisná šířka, která je převáděna na radiány,
- *l* je zeměpisná délka, která je převáděna na radiány.

Všechny úhly považujte za vyjádřené v radiánech. Písmeno *d* označuje deklinaci, *t* čas opravený na Greenwichský, *a* označuje rektascenzi.

```
int main(int argc, char **argv) {
    printf("Tato místa vyhovuji nejlepe:\n");
    tol = 0.0002;
    krok = 1;
    for ( f = -90; f <= 90; f += krok) {
        for ( l = 0; l <= 360; l += krok) {
            x1 = -cos(z1)+sin(f*M_PI/180)*sin(d1)+cos(f*M_PI/180)*cos(d1)*
                cos(t1+(1*M_PI/180)-a1);
            x2 = -cos(z2)+sin(f*M_PI/180)*sin(d2)+cos(f*M_PI/180)*cos(d2)*
                cos(t2+(1*M_PI/180)-a2);
            chyba2 = x1*x1+x2*x2;    // nebo "chyba1 = x1+x2;"

            if (chyba2 <= tol) {    // nebo "(chyba1 <= tol && chyba1 >= -
                tol)"
                printf("sirka: %f delka: %f (chyba2: %lg) \n", f, l,
                    chyba2);
            }
        }
    }

    printf("\nPrejete si vypocet zpresnit?\n");
    printf("Vyberte si interval zemepisnych sirek\n");
    printf("Cisla oddelte dvojteckou napr.: 45:55.53\nSeverni sirka se pocita
        kladne, jizni zaporne. \n");
    scanf("%lg:%lg",&f1,&f2);
    printf("Vyberte si interval zemepisnych delek\n 1 znamena 1 st. vychodni
        delky, 359 je 1 stupen zapadni delky.\n");
    scanf("%lg:%lg",&l1,&l2);

    printf("\nPocitam s presnosti na 0.01 stupnu (asi 1 minuta, asi 1 km)\n\n"
        );
    printf("Tato místa vyhovuji nejlepe:\n");
    tol = tol/10000;
    krok = krok/100;
}
```

```

for ( f = f1; f <= f2; f += krok) {
    for ( l = l1; l <= l2; l += krok) {
        x1 = -cos(z1)+sin(f*M_PI/180)*sin(d1)+cos(f*M_PI/180)*cos(d1)*
            cos(t1+(1*M_PI/180)-a1);
        x2 = -cos(z2)+sin(f*M_PI/180)*sin(d2)+cos(f*M_PI/180)*cos(d2)*
            cos(t2+(1*M_PI/180)-a2);
        chyba2 = x1*x1+x2*x2;    // nebo "chyba1 = x1+x2;"

        if (chyba2 <= tol) {    // nebo "(chyba1 <= tol && chyba1 >= -
            tol)"
            printf("sirka: %f delka: %f (chyba2: %lg) \n", f, l,
                chyba2);
        }
    }
}

printf("\nPrejete si vypocet zpresnit?\n");
printf("Vyberte si interval zemepisnych sirek\n Doporucuji nejvyse
jednostupnovy interval\n");
scanf("%lg:%lg",&f1,&f2);
printf("Vyberte si interval zemepisnych delek\n Doporucuji nejvyse
jednostupnovy interval\n");
scanf("%lg:%lg",&l1,&l2);

printf("\nPocitam s presnosti na 0.0001 stupnu (asi 1 vterina, asi 10 m)\n
");
if ((f2 - f1)*(l2 - l1) >= 10) {
}

printf("Tato mista vyhovuji nejlepe:\n");
tol = tol/10000;
krok = krok/100;
for ( f = f1; f <= f2; f += krok) {
    for ( l = l1; l <= l2; l += krok) {
        x1 = -cos(z1)+sin(f*M_PI/180)*sin(d1)+cos(f*M_PI/180)*cos(d1)*
            cos(t1+(1*M_PI/180)-a1);
        x2 = -cos(z2)+sin(f*M_PI/180)*sin(d2)+cos(f*M_PI/180)*cos(d2)*
            cos(t2+(1*M_PI/180)-a2);
        chyba2 = x1*x1+x2*x2;    // nebo "chyba1 = x1+x2;"

        if (chyba2 <= tol) {    // nebo "(chyba1 <= tol && chyba1 >= -
            tol)"
            printf("sirka: %f delka: %f (chyba2: %lg) \n", f, l,
                chyba2);
        }
    }
}

printf("\nDal uz to neumim.\n\n");
return 0;
}

```

Reálně se měřilo před brněnskou hvězdárnou na Kraví Hoře. Nicméně nic není ideální, takže Janap měřením vyšla zeměpisná délka $16,439^\circ$ a šířka $49,267^\circ$, což by znamenalo Veverskou Bitýšku, která je kousek od Brna kolem přehrady. Kde vznikají chyby? Ve špatně seřazených hodinkách, nepřesnosti měření theodolitu a také v iterativním výpočtu.

Úloha II.S ... vzdálenosti a černé těleso

- Absolutně černé těleso z definice pohltí všechno světlo, co na něj dopadne, a ve všech vlnových délkách. Zároveň je to ideální zářič s charakteristickým spektrem. Můžeme si ho představit třeba jako temné okno domu. Slunce však na první pohled energii pouze vydává. Jak je tedy možné, že jeho záření lze v prvním přiblížení aproximovat absolutně černým tělesem?
- V textu jsme vyjádřili Planckovu funkci jako funkci vlnové délky a teploty. Zkuste ji vyjádřit v závislosti na teplotě a frekvenci. Dokažte, že pro velké vlnové délky a vysoké teploty Planckova funkce přechází v Rayleighyův-Jeansův zákon $B_\lambda(T) = 2ckT/\lambda^4$ a naopak ve Wienův zákon $B_\lambda = 2hc^2/\lambda^5 \exp(-hc/\lambda kT)$ pro nízké teploty a malé vlnové délky.
- Kruh, který napozoroval Hubbleův vesmírný dalekohled v supernově SN1987A, má podél hlavní poloosy úhlový průměr $1,66''$. Má jít o cirkulární objekt, který je díky natočení vůči nám pozorován jako elipsa. Světlo ze vzdálenější části elipsy doletělo k Zemi o 340 dnů později než z bližšího konce. Proměřte fotografii⁴⁹, určete úhel natočení vůči pozorovateli a zkuste spočítat poloměr kruhu. S pomocí trigonometrie určete vzdálenost objektu.
- Pro určení červeného posuvu se zpravidla používají spektrální čáry vodíku. Odhadněte, do jaké hodnoty červeného posuvu z se pomocí spekter můžeme dostat. Zkuste zjistit (nebo navrhnout), jak se měří z u vzdálenějších objektů.

Černé těleso

Pro odpověď na tuto otázku se stačí zamyslet nad definicí absolutně černého tělesa (dále AČT) a nad tím, jak se asi sluneční záření od záření AČT liší. Podíváme-li se na spektrální distribuci slunečního záření, zjistíme, že křivka AČT je narušena pouze absorpčními čarami. Pokud Slunce vyzářuje jako AČT, musejí být procesy vyzářování a absorpce zcela v rovnováze. Když se podíváme na Slunce detailněji, zjistíme, že jeden foton, který unikne ze slunečního jádra, má před sebou dlouhou cestu, kdy je opakovaně pohlcen, vyzářen, rozptýlen, což mu prodlouží cestu na cca 40 000 let. Pokud je každý foton takto po cestě absorbován a vyzářován, ve velkém měřítku nakonec vidíme rovnováhu, tedy AČT. A kde se vezmou absorpční čáry (kupříkladu ty Fraunhoferovy)? Dokud je plyn ve Slunci dost teplý, rovnováha funguje, ale jakmile se dostaneme ke vnějšímu okraji Slunce, plyn už tak horký nebude a bude pouze absorbovat.

Chování Planckovy funkce

Pro vyřešení této úlohy se potřebujeme pouze pár matematických triků a dobrý úsudek. Základem bude napsat si Planckův vyzářovací zákon

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}.$$

⁴⁹http://www.stsci.edu/~inr/observ/dpics/SN1987A_Rings.gif

Pokud tento zákon chceme vyjádřit v závislosti na teplotě a frekvenci, musíme si uvědomit, že musí platit nejenom globálně, ale i lokálně. Lokální platnost nám napovídá, že bude třeba derivovat a využít pravidla derivace složené funkce, které říká

$$\frac{\partial B}{\partial \nu} = \frac{\partial B}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \nu}.$$

$$B_\lambda(T)|d\lambda| = B_\nu(T)|d\nu|,$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu^2}d\nu,$$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}.$$

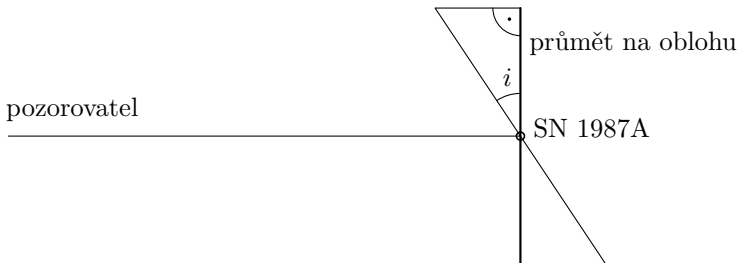
Splňuje Planckova funkce pro dlouhé vlnové délky Rayighleyův-Jeansův zákon? Pro dlouhovlnné záření platí $\lambda k_B T \gg hc$. Podíváme-li se výše na argument exponenciály, zjistíme, že je blízký nule. Zkusíme tedy provést Taylorův rozvoj okolo nuly

$$\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) \approx 1 + \frac{hc}{\lambda k_B T}.$$

Tento výraz dosadíme namísto exponenciály a po jednoduchých úpravách získáme tvar $B_\lambda(T) = 2ckT/\lambda^4$. Pro Wienův zákon je situace ještě jednodušší. λ je malé číslo, tudíž exponent je číslo velké. V tom případě tedy můžeme zanedbat odečítanou jedničku a výsledkem je Wienův zákon $B_\lambda = 2hc^2 \exp(-hc/\lambda kT)/\lambda^5$.

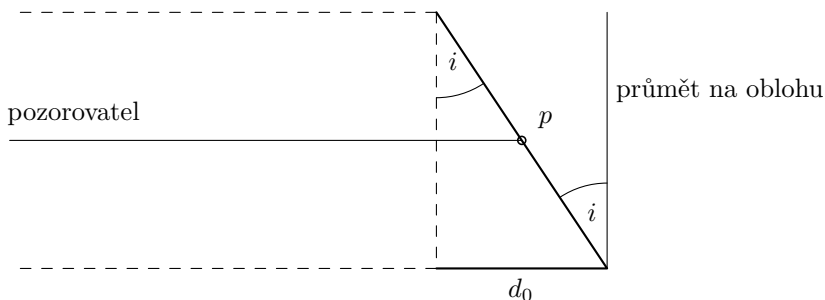
Hubbleův teleskop

Uvědomíme si, jaké informace jsou nám známé. Úhlový průměr a fakt, že se jedná o dokonalý kruh, který je díky geometrii pozorování zdeformovaný na elipsu. Bude se nám hodit hlavně informace, že jde o dokonalý kruh. Máme štěstí, neboť známe alespoň úhlový průměr hlavní poloosy. Vytiskneme si obrázek, proměříme hlavní poloosu, proměříme vedlejší poloosu a jednoduchou trojčlenkou určíme její úhlový průměr (spíše pro zajímavost, stačí nám poměr). Teď můžeme z jednoduché geometrické představy určit inklinanční úhel – úhel natočení.



Obr. 53: Zkosení vlivem nepřímého pohledu

Dále se nám hodí znát skutečný průměr kruhu, jinak se nám vzdálenost bude počítat poměrně špatně. K tomu využijeme znalost rychlosti světla c a zpoždění detekce o 340 dnů, která je uvedena v zadání. Opět si pomůžeme jednoduchou trigonometrií.



Obr. 54: Zpoždění signálu z protějších konců disku

Jakmile známe průměr kruhu, jsme za vodou a můžeme počítat vzdálenost.

A jak to vypadá číselně? Velikost obrázku samozřejmě závisí na tiskárně, popřípadě na zobrazení monitoru. Pro jeden konkrétní případ byla velká poloosa 51 mm, malá poloosa 37 mm. K určení inklinančního úhlu můžeme použít úhlový průměr nebo jen poměr naměřených velikostí. Můžeme napsat

$$\cos i = \frac{\text{malá poloosa}}{\text{velká poloosa}} = 43,49^\circ.$$

Zpoždění je $t = 340$ dnů, rychlost světla c , opožděnou vzdálenost označíme d_o , průměr p . Z geometrické představy vidíme, že

$$\begin{aligned} \sin i &= \frac{d_o}{p}, \\ d_o &= ct, \\ p &= \frac{ct}{\sin i}, \\ p &\approx 1,5 \cdot 10^{16} \text{ m}. \end{aligned}$$

Se znalostí průměru kruhu nakonec vypočítáme samotnou vzdálenost $d = p/\text{velká poloosa} = 61,7$ kpc. Vzdálenost můžeme zkusit porovnat se skutečnou naměřenou hodnotou. Podíváme-li se třeba na Wikipedii či do odborných článků, zjistíme, že skutečná vzdálenost je $(51,2 \pm 3,1)$ kpc (Panaglia et al. 1991 & erratum 1992). Metoda použitá v článku byla taktéž založena na geometrii, nicméně v jejich případě byly stanoveny přesnější parametry kruhu (už inklinanční úhel se liší, neboť správná hodnota je $(42,8 \pm 2,6)^\circ$).

Červený posuv

Úloha je zaměřená hlavně na vyhledání všemožných informací. Spíše než nad principem se musíme zamyslet nad limitem technologie. Oblíbená spektrální čára většiny astronomů je poměrně výrazná čára Balmerovy série vodíku H_α , která sama o sobě je poměrně červená (656,281 nm). Co když ji posuneme třeba na $z = 9$?

Z jednoduchého vztahu

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{pozorovaná}}}{\lambda_{\text{emitovaná}}},$$

zjistíme, že jsme desetkrát natáhli vlnovou délku, na které bychom takovou spektrální čáru pozorovali. Zkusme najít, jaké extrémní vlnové délky umějí pozorovat naše dalekohledy. Kupříkladu z Wikipedie zjistíme, že takové vlnové délky jsou považovány za střední infračervené (mid IR). Takové vlnové délky by mohl pozorovat třeba Spitzerův vesmírný dalekohled. Kde je háček? Uvažovali jsme ideální případ. V reálném případě je mezi námi a naším zdrojem hromada vesmírného smetí a prachu, který rád zrovna infračervenému záření cloní. Připočteme pak fakt, že intenzita záření klesá s druhou mocninou vzdálenosti. Objekty s takovým červeným posuvem se nám budou odhalovat hodně špatně.

Pokud se poohlédneme po internetových vodách, zjistíme, že nejvzdálenější objekt, který má spektroskopicky změřený červený posuv, má $z = 8,55$. V tomto případě se měření neprovádí pomocí H_α , ale pomocí vodíkové čáry Lymanovy série, Ly_α , která má laboratorní vlnovou délku 121,7 nm. Zatímco H_α je přechod ze 3. na 2. energiovou hladinu, Ly_α je přechod z 2. na 1. hladinu. Zmíněný objekt se jmenuje *UDFy-38135539* (Ultra Deep Field) a byl pozorován pomocí spektrografu SINFONI na Very Large Telescope (VLT) v Chile. Aby bylo spektrum takového objektu co k čemu, muselo se exponovat okolo 14 hodin, což není proveditelné pro každý objekt.

Řekněme tedy, že v ideálním případě jsme schopni pozorovat objekt do $z = 9$. Ve skutečnosti je takové pozorování zatíženo výraznou chybou. Objektů nad $z = 8$ je pomálu, nad $z = 7$ to také slavné není. Obtížné je získat i $z > 6$. Rozumným odhadem bude cca 50 % nejvyššího naměřeného červeného posuvu.

A co se dá dělat, když spektrum nestačí? Nastoupí tzv. fotometrický červený posuv. Využijeme toho, že snímání oblohy v různých filtrech o známých vlnových délkách je vlastně vytváření spektra s velmi nízkým rozlišením. Pozorováním určitého typu objektu v různých funkcích můžeme zkusit odhadnout, jak se takový objekt bude chovat posunutý do červené částí spektra. Tato metoda však obecně dává vyšší červené posuvy.

Úloha III.S . . . hvězdný zvěřinec

a) Proč je třeba, aby byl molekulární mrak, ze kterého jsou tvořeny hvězdy, chladný? Zkuste odhadnout a zdůvodnit rozumnou teplotu.

- b) Podíváme-li se na HR diagram některé z hvězdokup, najdeme velký rozptyl okolo hlavní posloupnosti. Jaké jsou způsoby, jak takový rozptyl může vzniknout? Ilustrační obrázek pro hvězdokupu Plejády – M45 – najdete třeba tady⁵⁰.
- c) Jak dlouho by žila hvězda, kdyby nebyla živena termonukleárními reakcemi, ale jen energií ze smršťování se?
- d) Planetární mlhovina Helix má průměr 16' a nachází se ve vzdálenosti cca 213 pc od Země. Jaký je její skutečný poloměr a jak je stará, pokud se její obálka rozpíná s rychlostí 20 km/s?

Molekulární mrak

V molekulárních mracích je neustálý tepelný pohyb částic. Částice, které se rychle pohybují, mají vysokou energii, což implikuje i jejich vysokou teplotu. V textu seriálu je zmíněno, že proti gravitačnímu kolapsu mraku působí právě tepelný pohyb částic. Čím je molekulární mrak teplejší, tím lépe vyrovná podněty, které by vyvolaly gravitační zhroucení oblaku a formaci hvězdy. Jednoduchý odhad teploty mraku můžeme udělat pomocí Jeansovy délky

$$\lambda_J \approx \sqrt{\frac{15k_B T}{4\pi G \rho \mu}},$$

kde k_B je Boltzmanova konstanta, T termodynamická teplota, G je gravitační konstanta, ρ je hustota mraku a μ je hmotnost na částici mraku. Hodnoty konstant jsou známé ($G = 6,67300 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $k_B = 1,3806503 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$), typická Jeansova délka a hustota mraku jsou uvedeny v seriálu ($\lambda_J = 10^{15} \text{ m}$, $\rho = 10^{-16} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). Poslední hodnota, kterou potřebujeme, je μ . Uvědomíme si, že hvězdy jsou na počátku tvořeny převážně vodíkem, který je také nejčastějším prvkem ve vesmíru. μ tedy bude hmotnost jednoho atomu vodíku, $1,674 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Rozměrovou analýzou zjistíme, že teploty by se měly pohybovat okolo desítek kelvinů.

HR diagram

Pro zodpovězení této otázky je třeba si uvědomit, že vesmír se nám sice promítá na plochu – nebeskou sféru, ale ve skutečnosti mezi námi a objektem mohou být jiné objekty, popřípadě prach a plyn. Velký rozptyl okolo hlavní posloupnosti HR diagramu je částečně způsoben chybou měření, neboť určování hmotností hvězd je stále poměrně nepřesné. Ale i za předpokladu, že hmotnost určit umíme velmi přesně, rozptyl bude existovat právě díky objektům v popředí či v pozadí. V uvedeném příkladu se jedná o hvězdokupu M45. Kupříkladu z internetu nebo kterékoliv chytré knížky si můžeme zjistit, že se jedná o mladou a otevřenou hvězdokupu. Mladé hvězdy jsou typicky modřejší než hvězdy staré, takže většina hvězd, které se jeví být mimo hlavní posloupnost a jsou velmi červené, budou objekty v pozadí nebo na popředí. Tento fakt se dá použít i jako test, zda hvězda náleží hvězdokupě nebo ne. Nápadné zčervenání některých hvězd patřících do hvězdokupy také může

⁵⁰<http://www.astrophysicsspectator.com/images/diagrams/PleiadesHRDiagramSup2.jpg>

značit molekulární oblak mezi pozorovatelem a hvězdokupou. Pokud bychom měli hvězdokupu kulovou, třeba M13, bude to naopak. Kulové hvězdokupy jsou velmi staré, takže nejhmotnější a nejteplejší modré hvězdy už došly do stádia, kdy jsou červenými obry apod. Takové hvězdokupy se nám budou jevit spíše červené, takže hvězdy výrazně modré, nezapadající na hlavní posloupnost, můžeme považovat za hvězdy v popředí/pozadí.

Délka života hvězdy

Vzpomeneme si, jak vzniká hvězda. Vnější síla působí na molekulární oblak o vhodných parametrech, ten se začne smršťovat a ve chvíli, kdy je jeho centrum dostatečně husté, zažehnou se termonukleární reakce. Hvězdou se objekt stane tehdy, dostane-li se do hydrodynamické rovnováhy a ztráty energie smršťováním se jsou uhrazeny termonukleárními reakcemi. Pokud se zajímáme o délku života hvězdy bez termonukleárních reakcí, bude to to samé, jako kdybychom se zabývali časem, který trvá volný pád materiálu na centrum oblaku. Na počátku je takový oblak v hydrostatické rovnováze, kterou musíme narušit ve prospěch gravitace.

$$\frac{dp}{dr} = -\varrho g = -\frac{GM_r}{r^2} \varrho.$$

Dále v řešení zanedbáme tlak a budeme uvažovat pouze gravitaci. Obě strany rovnice vykrátíme hustotou (levou stranu si musíme vyjádřit jako sílu na plochu, dp/dr je v podstatě rozdíl tlaku na vršek jednotkového objemu a spodek jednotkového objemu) a získáme tvar

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M_r}{r^2}.$$

Abychom získali kolaps jako funkci času, budeme muset rovnici integrovat. Hmotnost mraku se nám navíc nemění, takže M_r nahradíme $4\pi r_0^3/3$. Abychom mohli rovnici dobře zintegrovat, pomůžeme si vynásobením obou stran rychlostí dr/dt .

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} &= -\left(\frac{4}{3}\pi G r_0^3 \varrho_0\right) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}, \\ \int \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} dt &= \int -\left(\frac{4}{3}\pi G r_0^3 \varrho_0\right) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} dt, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{4}{3}\pi G r_0^3 \varrho_0\right) \frac{1}{r} + C_1. \end{aligned}$$

Integrační konstantu C_1 odvodíme z faktu, že na začátku kolapsu, kdy $dr/dt = 0$, je $r = r_0$ a potom $C_1 = 4\pi G r_0^2 \varrho_0/3$. Dosadíme do rovnice a po vytknutí dostaneme

$$\frac{dr}{dt} = -\left[\frac{8}{3}\pi G r_0^2 \varrho_0 \left(\frac{r_0}{r} - 1\right)\right]^{1/2}.$$

Pro integraci takové rovnice si musíme pomoci substitucemi $\psi \equiv r/r_0$ a $\chi \equiv (8\pi G \rho_0/3)^{1/2}$. Získáme rovnici

$$\frac{d\psi}{dt} = -\chi \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right)^{1/2}.$$

Takovou rovnici není nejjednodušší vyřešit, nejlepší je sáhnout po nějaké šikovné kuchařce nebo programu, co si s podobnou rovnicí poradí. Je totiž nutná ještě jedna substituce $\psi \equiv \cos^2 \xi$. Řešení nalezneme ve tvaru

$$\frac{\xi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\xi = \frac{\xi}{2} t + C_2,$$

kde konstantu C_2 opět odvodíme z předpokladu $r = r_0$ pro $t = 0$. Po dosazení do substitucí dostaneme $C_2 = 0$, takže rovnice kolapsu je

$$\xi + \frac{1}{2} \sin 2\xi = \xi t,$$

odkud už můžeme odvodit čas volného pádu za předpokladu, že víme, že na konci bude poloměr nulový a proto ze substituce $\psi = 0$ a tedy $\xi = \pi/2$. Po dosazení vyjde vztah pro čas volného pádu $t_{\text{ff}} = \frac{\pi}{2\xi}$. Po odsubstituování dostaneme finální vztah

$$t_{\text{ff}} = \left(\frac{3\pi}{32G\rho_0} \right)^{1/2}.$$

Zkusme si do takového vztahu dosadit nějaká čísla. Pro hustotu $3 \cdot 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ nám vyjde čas volného pádu $3,8 \cdot 10^5$ let. Došli jsme ke stotisícům let, což je prokazatelně méně, než je stáří Země samotné. Kdyby hvězdy byly poháněny pouze díky volnému pádu, jevilo by se nám nebe mnohem dynamičtější a proměnlivější. *Poznámka k řešení* Vyřešit onu diferenciální rovnici není zrovna triviální, jako správné řešení je tedy uznáno i takové, které rovnici jen navrhne, popřípadě pěkně popíše, co všechno je třeba uvážit.

Planetární mlhovina Helix

Jedná se o jednoduchý trigonometrický problém. Skutečný poloměr určíme z pravoúhlého trojúhelníku, u něhož známe jeden úhel a jednu odvěsnu – vzdálenost. Označíme-li si vzdálenost d , poloměr r a úhel čili úhlový poloměr objektu α , pak

$$r = d \operatorname{tg} \alpha.$$

Vzhledem k tomu, že α je blízké nule, $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ a $r = d\alpha$. Po dosazení vychází $r = 4,73$ pc. Známe skutečnou velikost a rychlost rozpínání. Uvědomíme si, že v nulovém stáří můžeme říct, že objekt byl nulové velikosti. Po převedení na roky nám vychází stáří 23 125,3 let.

Poznámka k řešení Na Wikipedii objevíte jiná čísla. V zadání jsou prostě a jenom starší údaje, z toho není třeba si dělat hlavu.

Úloha IV.S . . . seriálová

a) Spirální galaxie můžeme velmi hrubě popsat logaritmickou spirálou

$$r(\varphi) = r(0) \exp(\varphi \operatorname{tg} \Phi),$$

kde r a φ jsou polární souřadnice a Φ je úhel otevření odpovídající úhlu, který svírá kolmice k průvodiči s tečnou ke spirále (úhel otevření roste ve směru hodinových ručiček, vyjadřujeme jej v radiánech, přičemž hodnota může nabývat více než 2π). Zvažme $\Phi = 10^\circ$. Odvoďte vztah pro poměr vzdáleností dvou sousedních závitů téhož spirálního ramene od centra galaxie. Jak by se poměr změnil, kdyby ramena byla čtyři (rovnoměrně rozložená). Vyjádřete vzdálenost pro sousední ramena v $r(0) = 8 \text{ kpc}$.

b) Uvažujte nekonečný vesmír s konstantní hustotou hvězd a bez extinkce. Vyjádřete vztahy pro integrální a diferenciální počet hvězd v závislosti na zdánlivé hvězdné velikosti. Co se stane, bude-li zdánlivá hvězdná velikost velká?

Bonus Jaká je pravděpodobnost, že dvě hvězdy se nám v galaxii promítnou za sebe? Uvažujte osamocené hvězdy, ne dvojhvězdy.

Spirální galaxie

V prvé řadě chceme odvodit vztah pro poměr vzdáleností dvou sousedních závitů. Jedná se o jedno a to samé rameno, takže musíme uvažovat, co se bude měnit podle čeho. Vzdálenost od středu galaxie se zjevně bude měnit s úhlem φ . Změny nejsou skokové, ale naopak docela malé, a pořád musí platit, že jde o logaritmickou spirálu. Chceme-li malé změny vzdálenosti od středu, budeme derivovat podle φ (ostatně na ničem jiném r závislé není).

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= r(0) \exp(\varphi \operatorname{tg} \Phi) \\ \frac{dr}{d\varphi} &= r(0) \exp(\varphi \operatorname{tg} \Phi) \operatorname{tg} \Phi, \end{aligned}$$

kde $r(0)$ je konstanta. Podíváme-li se pozorně na vztah, zjistíme, že se nám v derivované spirále opět objevilo $r(\varphi)$. Můžeme ji přepsat

$$\frac{dr}{r} = \operatorname{tg} \Phi d\varphi,$$

což je velmi jednoduchá diferenciální rovnice, kterou lze vyřešit metodou separace proměnných.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r} &= \operatorname{tg} \Phi d\varphi \\ \int_0^\varphi \frac{dr}{r} &= \int_0^\varphi \operatorname{tg} \Phi d\varphi \\ [\ln r]_0^\varphi &= [\varphi \operatorname{tg} \Phi]_0^\varphi \\ \ln \frac{r(\varphi)}{r(0)} &= \varphi \operatorname{tg} \Phi, \end{aligned}$$

což je obecný vztah. Nás zajímá, jak je tomu po jednom zákrutu. Jeden zákrut je de facto opsání kruhu, což je 2π . Zároveň vztah zlogaritmujeme

$$\frac{r(2\pi)}{r(0)} = \exp(2\pi \operatorname{tg} \Phi),$$

což je vztah, který jsme chtěli. Dosadíme-li $\Phi = 10^\circ$, dostaneme poměr 1 : 3,03.

V případě, že budou spirální ramena čtyři, musíme se zamyslet nad tím, jak vlastně bude vypadat obrázek galaxie. Mezi každé dva závity jednoramenné galaxie musíme vměstnat tři další. Spirála bude zdánlivě pouze čtyřikrát hustěji namotaná. V praxi to znamená, že vztah pro logaritmickou spirálu změníme na $r(\varphi) = r(0) \exp(4\varphi \operatorname{tg} \Phi)$. Počítáme úplně stejně jako v předešlém případě.

$$\ln \frac{r(\varphi)}{r(0)} = 4\varphi \operatorname{tg} \Phi$$

$$\frac{1}{4} \ln \frac{r(\varphi)}{r(0)} = \varphi \operatorname{tg} \Phi,$$

což je po úpravě $\sqrt[4]{r(2\pi)/r(0)} = \exp(2\pi \operatorname{tg} \Phi)$. Po dosazení $\sqrt[4]{1 : 3,03}$.

Nakonec se ptáme, jaká je vzdálenost pro sousední ramena Slunce. Předpokládejme, že Slunce leží někde mezi rameny. Prostor mezi rameny má stejný tvar jako ramena samotná, nicméně vzhledem k tomu, že hustota hmoty je zde výrazně menší, tvoří jen jakási virtuální ramena, která nám pomohou ve výpočtu. Předpokládejme, že Slunce se nachází v jednom takovém virtuálním rameni (což je předpoklad nutný, abychom zkoumali jeho vzdálenost od dvou ramen skutečných). Ramen virtuálních i skutečných máme dohromady osm. Budeme počítat úplně stejně jako v předešlém případě, ale započítáme i virtuální ramena. Poměr se tak změní na

$$\sqrt[8]{\frac{r(2\pi)}{r(0)}} = \exp(2\pi \operatorname{tg} \Phi).$$

Pro sousední ramena poměr máme vyčíslený jako $\sqrt[8]{1 : 3,03}$, spočítáme vzdálenosti a dosadíme vzdálenost Slunce $r(0)$ ze zadání

$$\sqrt[8]{3,03} - \sqrt[8]{1/3,03} = 0,28r(0) = 2,2 \text{ kpc}.$$

Vzdálenost mezi dvěma rameny, mezi kterými se nachází Slunce, je 2,2 kpc.

Počítáme hvězdy

V textu seriálu je uveden vzorec pro počet hvězd mezi námi a daným objektem

$$N_M(M, S, \Omega, d) dM = \left(\int_0^d n_M(M, S, \Omega, r) \Omega r^2 dr \right) dM.$$

Zamyslíme se nad tím, jaké jsou v zadání předpoklady. Konstantní hustota nám říká, že nám zmizí závislost na prostorovém úhlu a vzdálenosti od pozorovatele $n_M(M, S, \Omega, r) = n_M(M, S) = \text{konst}$. Vzhledem k tomu, že nezapočítáváme

mezihvězdné zčervenání, tedy extinkci, nebude se nám měnit ani absolutní hvězdná velikost hvězd, tzn. zmizí faktor dM . Zahrneme-li tyto předpoklady, můžeme tento vztah přepsat jako

$$N_M(M, S, \Omega, d) = n_M(M, S) \Omega \int_0^d r^2 dr = \frac{\Omega d^3}{3} n_M(M, S).$$

Pro vyjádření ve zdánlivých hvězdných velikostech si vzpomeneme na starou dobrou Pogsonovu rovnici ve tvaru $m = M + 5 \log_{10} d - 5$. Odtud si můžeme vyjádřit d a výše uvedený vztah napíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{N}_M(M, S, \Omega, m) &= \frac{\Omega}{3} n_M(M, S) 10^{3(m-M+5)/5} = \\ &= \frac{\Omega}{3} n_M(M, S) \exp(\ln 10^{3(m-M+5)/5}) = \\ &= \frac{\Omega}{3} n_M(M, S) \exp\left(\frac{3(m-M+5)}{5} \ln 10\right). \end{aligned}$$

V textu seriálu je uveden i vztah pro diferenciální počet počet hvězd

$$A_M(M, S, \Omega, m) dM dm = \frac{\bar{N}_M(M, S, \Omega, m)}{dm} dM dm,$$

který můžeme přepsat podle našich úvah jako

$$\begin{aligned} A_M(M, S, \Omega, m) &= \frac{\bar{N}_M(M, S, \Omega, m)}{dm} \\ &= \frac{\ln 10}{5} \Omega n_M(M, S) 10^{3(m-M+5)/5} \\ &= \frac{3 \ln 10}{5} \bar{N}_M(M, S, \Omega, m), \end{aligned}$$

což je výsledný vztah. Zkusme se zamyslet nad tím, co se stane, když bude velmi velké m . Abychom zachovali konstantní počet hvězd, úhel Ω bude velmi rychle divergovat s tím, jak m poroste. Dojdeme k tomu, že v nekonečné vzdálenosti by k nám mělo docházet nekonečné množství světla. Jedná se o tzv. *Olberův paradox*.

Olberův paradox je známý také jako paradox tmavé noci. Za našich předpokladů by obloha v noci totiž měla být spíše jasná. Představme si jakési slupky o určité tloušťce. V jedné slupce je určitý počet hvězd, ale v těch následujících, které jsou větší a vzdálenější počet hvězd roste. Nicméně jelikož jsou vzdálenější, klesá intenzita světla, které k pozorovateli doputuje. Nakonec každá slupka bude v součtu zářit stejně. Máme-li nekonečný vesmír, slupek je nekonečně mnoho a obloha v noci musí být jasná, k čemuž jsme došli i naším výpočtem. Kde je chyba v předpokladech? Prvním chybným předpokladem je nekonečnost vesmíru, ten má totiž konečné stáří. Hvězdy se navíc netvořily od prvopočátku vesmíru. Existuje tedy pouze konečný počet hvězd, který můžeme spatřit. Také jsme zanedbali extinkci, což v realitě nelze udělat. A nakonec červený posuv (diskutovaný ve druhém díle seriálu), díky němuž se záření posune do okem nespátřitelných vlnových délek.

Úloha V.S ... seriálová

- Aktivní galaxie se na obloze stejně jako hvězdy jeví jako bodové zdroje. Zkuste navrhnout co nejvíce způsobů, jak rozlišit hvězdu a aktivní galaxii.
- Z rádiového pozorování kvasaru 3C 273 se zjistilo, že shluk hmoty v jetu se pohybuje od aktivního jádra s úhlovou rychlostí $\mu = 0,0008 \text{ rok}^{-1}$. Předpokládejte, že shluk se pohybuje v rovině oblohy kolmo na linii pozorování, vzdálenost je $d = 440/h \text{ Mpc}$, h je Hubbleova konstanta. Vyjádřete zdánlivou rychlost v_{zd} .
- Odvodte, pro jakou hodnotu úhlu φ bude β_{zd} maximální?
- Předpokládejme, že supermasivní černá díra v centru galaxie má účinnost 30 %. Kolik energie vyžáří, pohltí-li objekt o hmotnosti Země?

Hvězda vs. galaxie

Máme-li k dispozici dostatečně dobrou technologii, mohli bychom aktivní galaxie od hvězd principiálně rozlišit tak, že kolem aktivní galaxie budeme pozorovat mlhavé halo, tedy samotnou hostitelskou galaxii. Takového výsledku je v principu možné dosáhnout s největšími dalekohledy na světě, jako je Gran Telescopio Canarias (GTC na La Palmě), Very Large Telescope (VLT v Chile) nebo Keck I a II (na Mauna Kea). Nicméně ne každý má k dispozici velký dalekohled. Principiálně lze aktivní galaxii od hvězdy rozlišit podle vyzařovaného spektra. Aktivní galaxie jsou pozorovatelné od rádiových vlnových délek až po gama. V případě hvězd nic takového nepozorujeme. Výjimkou jsou například pulsary nebo neutronové hvězdy, které můžeme pozorovat přes poměrně široké elektromagnetické spektrum.

V takovém případě nám pomůže spektrum samotných objektů. Spektrální čáry, které pozorujeme u aktivních galaxií, jsou neztotožnitelné s ničím, co bychom pozorovali u hvězd. U hvězd pozorujeme zejména spektrální čáry vodíku (neboť právě z něj jsou hvězdy tvořeny) a několika dalších těžších prvků, popřípadě u chladných hvězd, molekul. V aktivních galaxiích pozorujeme silně ionizované záření, které v hvězdách nemá co dělat. Samozřejmě roli hraje i vzdálenost. Spektra aktivních galaxií jsou posunuta do červené části spektra díky červenému posuvu. Hvězdy by na takovou vzdálenost nebyly pozorovány.

Další způsob, jak odlišit hvězdu a aktivní galaxii, je proměnlivost. Pozorujeme-li proměnlivé hvězdy, zjistíme, že proměnlivost je zpravidla periodická. V případě aktivních galaxií tomu tak není. Periodicita nebyla dosud pozorována (periodicita je způsobena pravděpodobně dopadem shluků hmoty na supermasivní černou díru, shluky nemusí mít stejnou hmotnost a díky tomu pozorujeme různé intenzity).

Kombinací těchto pozorovatelných parametrů můžeme poměrně snadno zjistit, zda-li se jedná o hvězdu nebo galaxii (a nepotřebujeme k tomu dokonce ani nejlepší dalekohledy světa).

Zdánlivě rychlá hmota

Představíme si, jak jsou promítnuty rychlosti a dojdeme k jednoduchému vztahu pro zdánlivou rychlost $v_{zd} = d\mu$. Po dosazení máme hodnotu $1,67 \cdot 10^9 \text{ h}^{-1} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 5,57c \text{ h}^{-1}$. Do tohoto vztahu vyjádření dosadíme Hubbleovu konstantu a dostaneme hodnotu $v_{zd} = 7,85c$. Shluk hmoty se tedy pohybuje skoro osmkrát rychleji

než světlo. Taková rychlost je ve fyzice nepřístupná. Zamyslíme-li se nad tím, kde je v úvaze chyba, zjistíme, že jsme předpokládali, že zhustek se pohybuje v rovině oblohy. Taková podmínka zjevně nemůže platit.

Maximum

Chceme znát, jaké nejvyšší nadsvětelné rychlosti budeme pozorovat ve zdánlivých rychlostech. V seriálu je uveden poměr β pro skutečnou rychlost, nás by zajímal pro zdánlivou

$$\beta_{zd} = \frac{v_{zd}}{c} = \frac{v \sin \varphi}{c(1 - \beta \cos \varphi)},$$

kde $\beta = v/c$. Vztah můžeme přepsat do tvaru

$$\beta_{zd} = \frac{\beta \sin \varphi}{1 - \beta \cos \varphi}.$$

Ptáme se, pro jaký úhel bude hodnota β_{zd} maximální, takže budeme derivovat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{zd}}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{zd}}{\partial \varphi} &= \frac{\beta \cos \varphi}{(1 - \beta \cos \varphi)} - \frac{(\beta \sin \varphi)(\beta \sin \varphi)}{(1 - \beta \cos \varphi)^2}, \\ \beta \cos \varphi(1 - \beta \cos \varphi) &= \beta^2 \sin^2 \varphi = \beta^2 - \beta^2 \cos^2 \varphi, \\ \varphi_{\max} &= \arccos \beta. \end{aligned}$$

Výsledek dosadíme do vztahu, který jsme derivovali a vypůjčíme si goniometrické identity

$$\sin(\arccos \beta) = \sqrt{(1 - \beta^2)}.$$

Nakonec získáme vztah

$$\beta_T^{\max} = \frac{\sqrt{\beta(1 - \beta^2)}}{(1 - \beta^2)}.$$

Půjčíme-li si relativistickou notaci $\gamma = 1/(1 - \beta^2)$, pak můžeme výsledek přepsat jako $\beta_T^{\max} = \beta\gamma$. Co to znamená? I pro nějak extrémní rychlosti zhustků hmoty, nepříliš odkloněné od linie pozorování (např. $\varphi \approx \arccos \beta$), můžeme pozorovat nadsvětelné zdánlivé rychlosti, které přesahují rychlost světla v řádech γc .

Země ke snídani

Jedná se v podstatě o úplně jednoduchý problém převodu hmoty na energii, k čemuž nám slouží nechvalně známý relativistický vztah $E = mc^2$. V tomto případě vztah upravíme o účinnost μ , tedy $E = \mu mc^2$. Hmotnost země známe ($5,9742 \cdot 10^{24}$ kg), stejně tak známe rychlost světla. Po vyčíslení dojdeme k hodnotě $1,61 \cdot 10^{41}$ J. Pro srovnání, výbuch supernovy je v řádech 10^{44} J. Srovnáme-li to z pozemskými energiemi, tak zemětřesení, které zasáhlo Japonsko v roce 2011, mělo energii 10^{22} J, popřípadě roční spotřeba energie v celých USA je v řádu 10^{20} J.

Úloha VI.S . . . seriálová

- a) Vyjděte z Newtonova modelu vesmíru odvozeného v seriálu. Pro $E = 0$ vyřešte případ, kdy se vesmír rozpíná a hustota energie vakua se nemění. Odhadněte, jaká je na základě tohoto modelu budoucnost vesmíru.
- b) Pokud je vesmír plný hvězd, jistě k nám dříve nebo později dorazí světlo z každé hvězdy. Jak je možné, že je i přesto v noci tma? Zdůvodnění zkuste podpořit i kvantitativními odhady.
- c) V seriálu je uvedeno, jak odvodit existenci temné hmoty na kupě galaxií pomocí poměrně jednoduchého modelu. Zkuste navrhnout další způsob, jak dokázat existenci temné hmoty v kupách galaxií. Není třeba nutně podpořit výpočtem, stačí jednoduchý návrh.

$$E = 0$$

Vyjdeme z obdobného výpočtu, který byl uveden v textu seriálu, ale jako podmínky vezmeme $\varrho = \varrho_0$ a $M = M_0 R^3$. Pro rozpínající vesmír tak bude platit, že síla na jednotku hmotnosti bude úměrná R :

$$\frac{3\dot{R}^2}{8\pi G R^2} = \varrho = \varrho_0,$$

$$\frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\frac{8G\pi\varrho_0}{3}} = H_0.$$

Vyřešíme metodou separace proměnných

$$\frac{dR}{R} = H_0 dt,$$

$$\ln R = H_0 t,$$

$$R = e^{H_0 t}.$$

Potom můžeme napsat

$$\varrho = \varrho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G},$$

$$H = H_0,$$

$$q = -\frac{R\ddot{R}}{R^2} = -1.$$

Co takový výsledek v praxi bude znamenat? Vesmír by neprošel Velkým Třeskem, ale prošel by fází rychlého rozepnutí, inflace. Stejně tak by se dalo říct, že by se nadále rozpínal. Na rozdíl od případu v textu seriálu je tento model aplikovatelný i na větší vzdálenosti. Stran budoucnosti vesmíru naznačuje, že vesmír se bude rozepínat nade všechny meze, jinak řečeno jeho rozpínání se nijak nezbrzdí a bude se rozepínat donekonečna.

Tmavé noci

Formulace tohoto problému je ve skutečnosti formulace paradoxu tmavé oblohy, na který jsme narazili už v minulé sérii. Paradox říká, že pokud je vesmír nekonečně velký, muselo by naše nebe být pokryto miliardami hvězd a obloha by vlastně i v noci zářila podobně jako ve dne. Kde je problém? Samozřejmě prvotně v tom, že hvězdy nejsou natolik výkonné, aby osvětlily tmavý vesmír. Zároveň musíme brát v úvahu i fakt, že vesmír se rozpíná a cokoli se pohybuje od nás, vykazuje posun do dlouhovlnné části spektra. Hvězdy tak vlastně ani nemají šanci k nám dosvítit.

Stranou této úvahy je třeba si uvědomit, že hvězdy vnímáme jako zářící body a ne jako kotoučky. Hrubým odhadem hvězdy překrývají řádově 10^{-13} výměry oblohy. A to bereme v úvahu pouze hvězdy z naší galaxie. Pro extragalaktické objekty to bude výměra ještě menší. Zkusme se zajímat třeba čistě o to, jak by musela vypadat naše Galaxie, aby obloha byla jasná i v noci. Nejprve by musela mít 10^{13} -krát více hvězd. To je samo o sobě trochu těžké splnit. Dále, kdybychom vzali v úvahu to, že vesmír má nějaké stáří a zajímali se nejenom o naši Galaxii, tak bychom museli nutně dojít k tomu, že světlo z hvězd musí mít čas k nám dojít. To by ale znamenalo, že nejstarší hvězdy by musely být staré alespoň 10^{10} let. K tak dlouhému vyzařování samozřejmě nemají energii, a to ani za předpokladu, že by se celá hmota hvězdy kompletně změnila na fotony, což, jak víme, je fyzikálně nemožné.

Z jednoduchých úvah tedy vyplývá, že hlavním důvodem je nedostatečný energetický výkon a krátký život hvězd vzhledem ke stáří a velikosti vesmíru.

Tmavá hmota

Nepřímo lze existenci temné hmoty dokázat poměrně prostým způsobem. Určením hmotnosti kupy galaxií, která neodpovídá tomu, co bychom očekávali z pozorování viditelné hmoty. Určit hmotnost kupy galaxií je docela nesnadný úkol. Určování pomocí luminosit a rotačních křivek je v tomto případě nepoužitelné. V seriálu byl uveden jeden z poměrně spolehlivých způsobů, a to využití viriálového teorému.

Další z metod je například gravitační čočkování. Kupa galaxií může sloužit jako docela slušná čočka, problém je samozřejmě s tím, že se musíme trefit do takové kupy galaxií, za kterou se ukrývají jasné objekty, jejichž světlo bude přes kupu galaxií ohnuto. Nicméně vzhledem k tomu, že kupy galaxií jsou poměrně běžné, je vysoká pravděpodobnost, že se člověk trefí a za kupou bude skrytý nějaký jasný objekt, jehož světlo bude čočkováno. Čočkováný objekt je hmotnou kupou galaxií zdeformován a podle míry deformace lze zkonstruovat rozložení hmoty a odhadnout hmotnost celé kupy galaxie. Čočkování jasně ukazuje, že kupy jsou mnohem hmotnější než viditelná hmota a musí tedy obsahovat pro nás neviditelnou temnou hmotu.

Další přístup by mohl být ryze statistický. Ten předpovídá, že ze statistického postupu bychom měli očekávat existenci mnohem méně kup galaxií, než pozorujeme. Náhodně rozmístěné galaxie totiž nemají tendenci mezi sebou interagovat, pokud se nedostanou dostatečně blízko k sobě, aby se gravitačně ovlivňovaly. Pozorovaná hmota galaxií by jednoduše byla příliš malá na to, aby galaxie někdy nějakou kupu zformovaly. Samotné galaxie, ze kterých je kupa tvořena, tedy musí

být hmotnější, než se nám na první pohled zdá. Dalším dobrým, staticky doložitelným argumentem, je rozložení galaxií v samotných kupách. Vypadá to, že kupy galaxií jsou velmi rozlehlé, což by v případě nízké hmotnosti kupy a potažmo galaxií nebylo možné.



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění v Zelené Lhotě

Podzimní soustředění 2011 se konalo v Zelené Lhotě u Nýrské přehrady ve dnech 15.-23. 10. 2011.

Organizátoři

Dominika Kalasová, Karel Kolář, Michal Koutný, Lukáš Ledvina, Marek Nečada, Aleš Podolník, Marek Scholz, Tereza Steinhartová, Kryštof Touška, Tereza Zábojníková

Účastníci

Tomáš Bárta, Nicola Burianová, Veronika Dočkalová, Jakub Doležal, Stanislav Fořt, Lukáš Fusek, Vladan Glončák, Tomáš Hadánek, Miroslav Hanzelka, Alena Harlenderová, Eva Harlenderová, Jaroslav Hofierka, Dušan Klíma, Kristýna Kohoutová, Tomáš Kořínek, Jakub Kubečka, Ota Kunt, Kristína Nešporová, Jan Povolný, Samuel Puček, Lukáš Timko, Jan Tofel, Markéta Vohníková, Jakub Vošmera, Jiří Záhora



Společná fotografie u Černého jezera

Legenda

Účastníci dostali pozvánku, aby se zúčastnili výzkumu nově objevených zvířat – mloků. Nesmírně inteligentní obojživelní tvorové byli schopni učit se, mluvit, vykonávat nejrůznější práce a firma Bondy a syn toho chtěla co nejvíce využít. Účastníci se seznámili s mločí anatomíí, naučili se s mloky komunikovat a používat jejich jazyk. Zúčastnili se rozmýšlení byznys plánu pro společnost vyrábějící potřeby pro mloky. Stejně jako v klasickém díle, tak i tady se populace mloků brzy vymkla kontrole. Přemnožení obojživelníci začali ukrajovat z pevniny prostor nezbytný

pro život lidí a svou neúnavnou prací začali pevninu zaplavovat. Zoufalí vědci se uchýlili ke krajnímu řešení. Navrhli koncept zbraně, jejíž účinky se měly projevit pouze pod vodou. Bohužel chyba ve výpočtech způsobila, že se účinek pod vodou nedostavil, ale naopak naprostá většina lidí oslepla. Účastníci tak strávili dvacet hodin poslepu. Zjistili, jak jsou obyčejné úkony, jako najít si boty a jít na záchod, v tomto novém stavu obtížné. Podle instruktážního videa se ale povedlo zrak získat nazpět. Zaplavení pevniny ale mezitím postoupilo natolik, že byla skupina biologů-experimentátorů nucena uchýlit se do vodotěsného krytu. Pak byl i ten postupně zaplaven. Jako poslední naděje byla vyslána čtyřmístná ponorka k poslednímu ostrovu na zaplavené zemi, aby zde zachovali lidské plemeno. Po velkém diskusním závěru ve sklepení objektu, které symbolizovalo zaplavený kryt, se účastníci zamysleli nad životem, který by prožili, kdyby nedošlo k zaplavení souše. Vznikla tak hromada dopisů svým budoucím já, které nyní leží v našem šuplíku, zalepené a čekající na odeslání.

Jarní soustředění v Josefově

Jarní soustředění 2012 zasazené v hlubokém Josefovském údolí proběhlo ve dnech 21.–29. 4. 2012. Objekt patřil Brontosaurům a vládla v kuchyni Bětce s Naďou.

Organizátoři

Jan Humplík, Dominika Kalasová, Karel Kolář, Michael Komm, Michal Koutný, Lukáš Ledvina, Jiří Nárožný, Alžběta Nečadová, Tomáš Pikálek, Aleš Podolník, Jana Poledníková, Ján Pulmann, Marek Scholz, Tereza Steinhartová, Tereza Zábojníková

Účastníci

Galové

Daniela Fecková, Veronika Dočkalová, Filip Murár, Lukáš Timko, Josef Koláčný, Miroslav Hanzelka, Jirka Guth, Tomáš Kořínek, Lubomír Grund

Římané

Kristína Nešporová, Katya Berestneva, Jakub Dolejší, Matěj Bidlák, Jakub Doležal, Jaroslav Hofierka, Michal Červenák, Lukáš Fusek

Egyptané

Jan Studený, Kristýna Kohoutová, Lucie Valentová, Michal Nožička, Pavel Blažek, Tereza Uhlířová, Tomáš Kremel, Tomáš Zahradník, Viktor Skoupý



Celodenní výlet na soustředění v Josefově

Legenda

Příslušníci všech tří vyvolených národů dostali povolávací rozkaz. Jejich božstva si jich žádají, aby hájili slávu a čest svého lidu. Každý z národů má samozřejmě své specifické přednosti. Ty měli možnost plně projevit a využít během galského, následně římského a konečně egyptského dne. Slovní občané poměřovali síly v nepoměřitelných disciplínách. Ač tuhle žabomyší válku bohové sami svoji malicherností vyvolali, absurdita národních dnů je přiměla k převzetí organizace a uspořádali olympijské hry ve víře, že se konečně objektivně ukáže, který z národů je ten největší ze všech. A tak se opět občané utkávali ve všemožných soubojích až do roztrhání svého nebo soupeřova těla. A co neobčané, totiž otroci? Celá společnost byla natolik ponořená do společenských a nacionálních problémů horních kast, že na spodinu ani nepomyslela. Otroci se chopili příležitosti. Došlo ke zkázosné vzpouře. A tak v důsledku přehlížení a neřešení sociální nerovnováhy dospěly civilizace kdysi pyšných a mocných národů ke svému konci.

Tři dny s aplikovanou fyzikou

Po dvouleté přestávce jsme se rozhodli vrátit k tradičnímu Týdnu s aplikovanou fyzikou (TSAF), protentokrát v o den kratší formě. Společně s tím jsme se rozhodli vykoušet předsadit termín TSAFu před Den s experimentální fyzikou, který se konal jako tradičně v pondělí. TSAF (či letos TDSAF) se tedy konal od pátku 23. 3. do neděle 25. 3. 2012. Všichni účastníci TSAFu se posléze zúčastnili DSEFu. Výběr termínu se ukázal jako dost omezující rozhodnutí pro výběr exkurzí a program byl o něco volnější, než býval dříve.

Pátek 23. března

Po odpoledním srazu na Hlavním nádraží v Praze jsme se vydali rovnou do vodní elektrárny na Štvanici. Zde nás pracovníci elektrárny ochotně seznámili s historií vzniku elektrárny a její funkcí. Posléze jsme si prohlédli její útroby. Po návštěvě elektrárny jsme se přesunuli na kolej Hvězda, kde byli účastníci ubytováni.

Večer se velká část účastníků vydala na fakultativní prohlídku noční Prahou po různých pražských zajímavostech, z nichž mnohé mají souvislost s fyzikou. Můžeme jmenovat například Orloj, pražský poledník a pamětní desku Alberta Einsteina na Staroměstském náměstí.

Sobota 24. března

Sobotní den zahájily fyzikální přednášky, které si připravili pro účastníky organizátoři semináře.

Odpoledne se všichni vydali na výlet po okolí Prahy. Cesta byla vytyčená přes Loděnici k Solvayovým lomům a ke Svatému Janu pod Skalou. V Solvayových lomech je dnes skanzen, venkovní muzeum těžby a dopravy vápence v Českém Krasu.

Večer byl opět volný s možností zahrát si deskové hry.



Odpočinek v Solvayových lomech

Neděle 25. března

Třetí den zahájila návštěva Národního technického muzea. Účastníci tak navštívili expozici dopravy, kde si mohli prohlédnout historické dopravní prostředky, expo-

zici astronomie se spoustou historických pozorovacích přístrojů, expozici tiskařství a další.

Následoval přesun na Petřín, kde zájemci mohli vyjít na rozhlednu či navštívit muzeum největšího zneuznaného Čecha Járy Cimrmana. Na odpoledne byla pro účastníky připravena po okolí hra, během které měli sesbírat kódy z různých míst v okolí. Den byl završen prohlídkou na Štefánikově hvězdárně spojenou s pozorováním oblohy a výukovým filmem.

Den s experimentální fyzikou 2012

Den s experimentální fyzikou je tradiční akce FYKOSu, během které se účastníci mohou porozhlédnout po fyzikálních pracovištích na MFF UK. Na vlastní oči mohou vidět, jak se dělá experimentální fyzika dnešních dní. Nejčastější jsou exkurze k jadernému reaktoru, na pracoviště elektronové mikroskopie, katedru nízkých teplot, pracoviště nukleární magnetické rezonance, ale objevují se i mnohé další.

Letošní, již osmý, DSEF odstartoval termodynamickou show, která populární přednášku o tomto oboru prokládala mnoha zajímavými experimenty ilustrujícími vykládanou látku. Dopolední část probíhala v prostorách Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Tróji, kde měli účastníci možnost prohlédnout si experimentální vybavení různých kateder a ústavů, poslechnout si fundovaný výklad a nechyběla ani tradiční návštěva KFNT a hraní si s kapalným dusíkem. Odpoledne jsme se vypravili do Ústavu jaderného výzkumu v Řeži.



Účastníci DSEFu na KFNT

FYKOSí Fyziklání 2012

Šestý ročník Fykosího fyziklání proběhl v pátek 17. února 2012 v prostorách Matematicko-fyzikální fakulty UK na Karlově. Soutěže se účastnilo 48 týmů. Celkovým vítězem se stal smíšený tým Amazingní starvace, který jako jediný zvládl vyřešit všech 42 soutěžních úloh. Mezi školami zvítězilo Gymnázium J. K. Tyla v Hradci Králové. Na druhém místě se umístil tým z Gymnázia Ludovíta Štúra v Trenčíně a pouze jeden bod za nimi skončilo Gymnázium Pierra de Coubertina v Táboře.

Pravidla soutěže

Soutěže se účastní družstva s nejvýše 5 členy. Družstvo může tvořit i méně členů, ale žádné zvýhodnění nebude poskytnuto. Na začátku soutěže dostane každé družstvo 7 příkladů. Za každý správně vyřešený příklad dostane družstvo nový příklad. Za správně vyřešený příklad se považuje příklad se správným výsledkem. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny. Při řešení příkladů se smí používat kalkulačka a MFCh tabulky.

Výsledky

1.	Amazingní Starvace (smíšený tým)	181 b.
2.	Tylák (Gymnázium J. K. Tyla, Hradec Králové)	170 b.
3.	Pozitróny (Gymnázium Ludovíta Štúra, Trenčín)	162 b.
4.	Gymnázium Pierra de Coubertina, Tábor	161 b.
5.	Gymnázium Jírovcova 8, České Budějovice	153 b.
6.	Gymik (Gymnázium, SOŠ a SOU, Mikulov)	143 b.
7.	Bazinga (Gymnázium Christiana Dopplera)	140 b.
8.	Masarykác (Masarykovo Gymnázium, Plzeň)	140 b.
9.	Hardcore Tetris Vault (Gymnázium Olomouc-Hejčín)	140 b.
10.	Moraváci (Gymnázium Jaroška Brno a Gymnázium Blansko)	139 b.

Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.



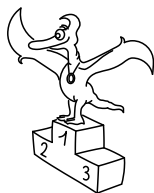
Vítězný tým 6. ročníku FYKOSího Fyziklání Amazingní Starvace

Fykosí Fyziklání Online 2012

Na jaře roku 2012 se konal premiérový ročník internetové obdoby klasického Fyziklání. Fyziklání online proběhlo 31. 5. 2012 a zúčastnilo se ho 63 týmů rozdělených do dvou kategorií, středoškoláci a open kategorie, které se mohl zúčastnit kdokoli. Nejlepší mezi středoškoláky a také nejlepší vůbec byl tým Makaci, který vybojoval 139 bodů. Na druhém místě mezi středoškoláky a na třetím celkově se umístil tým Okarusov blesk se 108 body. Třetí pak mezi středoškoláky byl Tým týmů, který vysoutěžil 103 bodů. Vítězem open kategorie se stal, a celkově stříbrný skončil, tým Modré elektróny s celkově získanými 130 body.

Pravidla

Na začátku soutěže každý, maximálně pětičlenný, tým obdržel pět úloh, jejichž výsledkem bylo číslo. Po zadání správného výsledku do internetového systému tým získal zadání nové úlohy. Trvání soutěže bylo 3 hodiny, přičemž v průběhu soutěže proběhla také půlhodinová hurry up část, v níž byly úlohy rozděleny do tří fyzikálních témat a vyřešení jedné úlohy od všech témat bylo hodnoceno bonusovými body. Protože se tato soutěž koná po internetu, nebyly povolené pomůcky nijak omezeny.



Pořadí nejlepších řešitelů

Z prostorových důvodů jsou dlouhé listiny zkráceny jenom na řešitele s alespoň dvaceti body. Úplné výsledky jsou na webu.

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 208
1. <i>Lucie Fořtová</i>	G P. de Coubertina, Tábor	144
2. <i>Jozef Bucko</i>	G, Námestie SNP, Piešťany	129
3. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	127
4. <i>Martin Kihoulou</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	119
5. <i>Dalimil Ševčík</i>	G, Vyškov	118
6. <i>Eva Miklušová</i>	G J. Škody, Přerov	105
7. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	94
8. <i>Petr Smíštel</i>	G, Bučovice	52
9. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	47
10.–11. <i>Andrej Fúsek</i>	SPŠ Dubnica nad Váhom	45
10.–11. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	45
12. <i>Václav Skála</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	42
13. <i>Zdeněk Turek</i>	G a SOŠ, Rokycany	37
14. <i>Jan Marek</i>	G Zábřeh	35
15. <i>Václav Kytka</i>	Křesťanské G, Kozinova, Praha	32
16. <i>Martin Vančura</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	26

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 208
1. <i>Patrik Švančara</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	151
2. <i>Tomáš Bárta</i>	G, Nad Štolou Praha	70
3. <i>Jakub Kubečka</i>	G, Nymburk	67
4. <i>Radomír Gajdošoci</i>	G, P. Horova, Michalovce	61
5. <i>Katya Berestneva</i>		44
6. <i>Daniel Hnyk</i>	První české G, Karlovy Vary	40
7. <i>Kristína Nešporová</i>	G, Boskovice	39
8.–9. <i>Ivo Vinklársek</i>	G, Rožnov p. Radhoštěm	26
8.–9. <i>Jiří Záhora</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	26
10. <i>Tomáš Hadánek</i>	Mendlovo G, Opava	20

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 208
1. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	178
2. <i>Tomáš Zahradník</i>	Gymnázium Oty Pavla, Praha	134
3. <i>Jakub Kworka</i>	G, Školská, Dubnica nad Váhom	125
4. <i>Jirka Guth</i>	G, Jírovцова, České Budějovice	96
5. <i>Viktor Skoupý</i>	G, Moravská Třebová	77
6. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	75
7. <i>Radka Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava - Poruba	70
8. <i>Lucie Valentová</i>	G, Boskovice	58
9. <i>Jaroslav Hofierka</i>	G J. A. Raymana, Prešov	54
10.–11. <i>Maty Bidlák</i>	G Luďka Pika, Plzeň	52
10.–11. <i>Daniel Slezák</i>	Svobodná chebská škola, Cheb	52
12. <i>Josef Koláčný</i>	G, Nymburk	50
13.–14. <i>Jan Studený</i>	G J. Škody, Přerov	47
13.–14. <i>Matouš Zavřel</i>	Křesťanské G, Kozinova, Praha	47
15. <i>Patrik Štefek</i>	Matiční G, Ostrava	35
16. <i>Matěj Tomešek</i>	G J. Škody, Přerov	33
17.–19. <i>Petr Kovář</i>	Matiční G, Ostrava	32
17.–19. <i>Adam Práda</i>	G, Ostrov	32
17.–19. <i>Martin Wirth</i>	První české G, Karlovy Vary	32
20. <i>Emil Skříšovský</i>	G, Česká, České Budějovice	31
21. <i>Martin Raszyk</i>	G, Karviná	25
22. <i>Tomáš Kořínek</i>	G, Žamberk	24
23. <i>Jan Bukáček</i>	Matiční G, Ostrava	22
24. <i>Soňa Ondrušová</i>	G, Ostrov	20

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 208
1. <i>Lukáš Timko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	136
2. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	125
3. <i>Miroslav Hanzelka</i>	G, Česká Lípa	117
4. <i>Jaroslav Průcha</i>	G, Strakonice	105
5. <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	88
6. <i>Veronika Dočkalová</i>	G, Elgartova, Brno	85
7. <i>David Hruška</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	73
8. <i>Jakub Doležal</i>	G, Špitálská, Praha	71
9. <i>Michal Nožička</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	69
10. <i>Jozef Kašćák</i>	G dukl. hrdinův, Svidník	65
11. <i>Albert Štěrba</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	58
12. <i>Michal Červeňák</i>	G Púchov	56
13. <i>Lukáš Fusek</i>	G, Uherské Hradiště	51
14. <i>Jakub Čimerman</i>	G Tajovského, B. Bystrica	49
15. <i>Martin Adamec</i>	G Tajovského, B. Bystrica	48
16. <i>Lubomír Grund</i>	G Christiana Dopplera, Praha	35
17. <i>Vít Nosek</i>	G a SOŠ, Hořice	24
18. <i>Tereza Uhlířová</i>	G, Omská, Praha	22

KAREL KOLÁŘ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXV. ročník – 2011/12

Předmluva: Michal Koutný

Náměty úloh:

Karel Kolář (I.E, II.E, III.2, III.5, IV.E, V.3, V.E, VI.1, VI.2, VI.5, VI.E)
Jana Poledníková (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S)
Dominika Kalasová (II.1, II.2, IV.3, V.2, VI.4)
Petr Ryšavý (I.2, II.3, II.4, VI.3), Lukáš Ledvina (I.3, III.1, III.3, V.1)
Jáchym Sýkora (I.3, I.4, III.P, III.E), Michal Koutný (IV.2, IV.4, VI.P)
Jakub Michálek (II.5, III.4), Aleš Podolník (IV.1, IV.5), Marek Scholz (I.1)
Tomáš Pikálek (IV.P), Jakub Vošmera (V.4), Tereza Steinhartová (II.P)

Autoři řešení úloh:

Jana Poledníková (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S)
Lukáš Ledvina (I.5, II.5, III.3, V.4, VI.1)
Ján Pulmann (I.4, II.3, III.5, IV.P, VI.4)
Dominika Kalasová (I.E, II.2, IV.3, V.2), Aleš Podolník (II.P, IV.5, VI.2)
Jáchym Sýkora (I.3, II.1, III.P, IV.2), Tomáš Pikálek (II.E, III.2, IV.E, VI.E)
Petr Ryšavý (I.2, II.4, IV.1), Michal Koutný (III.1, IV.4)
Jakub Kocák (V.E, VI.3), Tereza Steinhartová (III.E, VI.P)
Jan Hermann (VI.5), Jan Humplík (V.3), Dávid Hvizdoš (III.4)
Karel Kolář (V.P), Pavel Irinkov (V.5), Petr Sedláček (V.1)
Hana Šustková (I.P), Tereza Zábojníková (I.1)

Seriál o astrofyzice: Jana Poledníková

Legenda podzimního soustředění: Tereza Zábojníková

Legenda jarního soustředění: Tereza Steinhartová

Sazba: Michal Koutný, Lukáš Timko

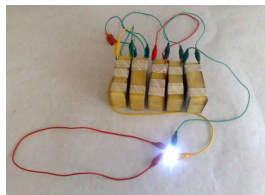
Obrázky a grafy: Michal Koutný, Lukáš Ledvina

Jazykové korektury: Zuzana Bogárová, Dominika Kalasová

Udělejte si originální baterie

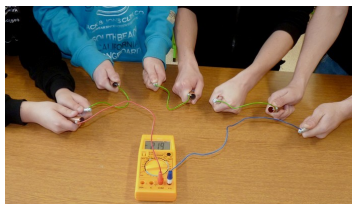
Baterie ze zelinářství

Vezmete syrovou bramboru, zasunete do ní dvě různé kovové elektrody, připojíte je drátky k žárovce a ejhle – bramborová baterie vyrábí elektřinu a žárovka svítí. Ale víte, že mnohem více z brambor dostanete, pokud je předtím uvaříte? Zřejmě se varem naruší buněčné membrány a zvýší se tak schopnost brambor generovat elektrický proud. Vařená brambora vyrábí až desetkrát více elektřiny než syrová. Takto získaná energie vystačí na rozsvícení obyčejné LED. Možná tedy v budoucnu budeme svítit vařenými bramborami. . .



Člověk jako baterie

Pro další pokus budete potřebovat několik vzájemně propojených dvojic kovových elektrod, např. hliníkové tyčky a odřezky měděných topenářských trubek. V prvním pokusu uchopíte do každé ruky jednu elektrodu a připojíte je k voltmetru. Na displeji se objeví napětí několik desetin voltu: stali jste se galvanickým článkem. Měděná elektroda tvoří kladný pól, elektrolytem je vaše tělo. Ověřte si, že velikost naměřeného napětí značně závisí na kvalitě kontaktu mezi elektrodami a dlaněmi (suché, zpocené, navlhčené čistou či osolenou vodou apod.) a na síle stisku.



V další fázi experimentu pozvěte několik kamarádů a vytvořte z nich sériově zapojenou baterii. Její napětí je sice několik voltů, ale má příliš velký vnitřní odpor – i několik megaohmů. Člověk jako zdroj napětí je také zcela nepoužitelný!

Podobné zábavné pokusy najdete v materiálech vzdělávacího programu ČEZ Svět energie (www.cez.cz/vzdelavaciprogram) nebo v časopise Třípól (www.tretpol.cz).

Svět energie je dobrodružný a zajímavý! Zauvažujte o budoucím zaměstnání v energetice! Kde jinde, že? (www.kdejinde.cz)



KAREL KOLÁŘ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXV. ročník – 2011/12

Vydal **MATFYZPRESS**
vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 424. publikaci

Vytiskl TISK SPRINT

Vydáno pro vnitřní potřebu MFF UK
Publikace není určena k prodeji

160 stran, 54 obrázků
Sazba písmem Latin Modern v programu $\text{X}_{\text{q}}\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$
Vydání první
Náklad 400 výtisků

Praha 2012

ISBN 978-80-7378-230-6

