Úloha IV.4 . . . Stavinoha

4 body; průměr 2,40; řešilo 35 studentů

Model rakety má motůrek, jenž dává konstantní tah, dokud má palivo o počáteční hmotnosti m_p. Prázdná raketa váží m_0 a motor palivo spaluje lineárně s časem. Do jaké výšky může raketa vyletět, letí-li v homogenním gravitačním poli a zanedbáme-li odpor vzduchu?

Michal odpaloval rakety.

Hledáme-li maximální výšku, určitě poletí raketa svisle vzhůru. Řešíme tedy jednorozměrný pohyb, který se skládá z části, kdy raketu pohání motor, a z vrhu vzhůru, kdy raketa letí setrvačností.

Označme T tahovou sílu motorku a I impuls síly, na nějž stačí palivo v něm. Dokud motor spaluje, hmotnost rakety se bude měnit lineárně s časem podle

$$m = m_0 + m_\mathrm{p}\frac{I - tT}{I}\,.$$

Z druhého Newtonova zákona vyjádříme okamžité zrychlení

$$a(t) = \frac{TI}{Im_\mathrm{r} - m_\mathrm{p}Tt} - g\,. \tag{1}$$

Aby se raketa alespoň ke konci vznesla, musí platit $T > m_0 g$. Časovou závislost rychlosti i výšky dostaneme, když vztah (1) dvakrát zintegrujeme. Integrační konstanty volíme tak, aby platilo $v(0) = 0\,\mathrm{m/s}$, $y(0) = 0\,\mathrm{m}$.

Při integrování použijeme lineární substituci a získáme vztahy

$$v(t) = \frac{I}{m_\mathrm{p}}\Big(\ln(Im_\mathrm{r}) - \ln(Im_\mathrm{r} - Tm_\mathrm{p}t)\Big) - gt\,,$$

$$y(t) = \frac{I}{m_\mathrm{p}}\left(t\ln(Im_\mathrm{r}) + \frac{1}{Tm_\mathrm{p}}\left(Im_\mathrm{r}\ln\left(\frac{Im_\mathrm{r} - m_\mathrm{p}Tt}{Im_\mathrm{r}}\right) - m_\mathrm{p}Tt\Big(\ln(Im_\mathrm{r} - m_\mathrm{p}Tt) - 1\Big)\right)\right) - \\ - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde $m_\mathrm{r} = m_0 + m_\mathrm{p}$ značí vzletovou hmotnost rakety. Zajímají nás tyto hodnoty v čase I/T, kdy motor zhasne

$$v(I/T) = v_\mathrm{k} = \frac{I}{m_\mathrm{p}}\ln\frac{m_\mathrm{r}}{m_0} - g\frac{I}{T}\,,$$

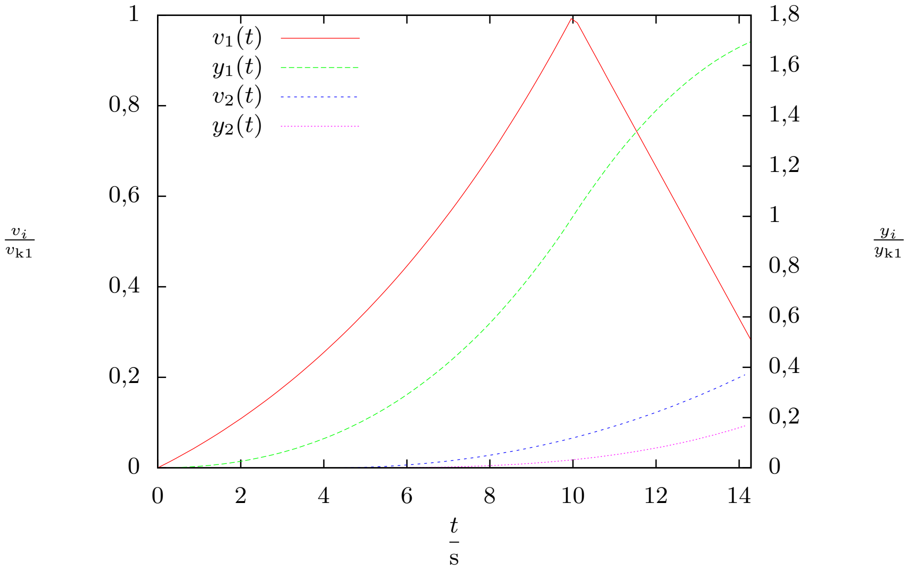
$$y(I/T) = y_\mathrm{k} = \frac{I^2}{m_\mathrm{p}^2 T}\left(m_\mathrm{p} + m_0\ln\frac{m_0}{m_\mathrm{r}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{I}{T}\right)^2\,.$$

Výšku nastoupanou setrvačností vypočítáme ze zákona zachování energie, celkem tedy raketa vystoupá do výšky $y_\mathrm{k} + v_\mathrm{k}^2/(2g)$.

Poznámky k došlým řešením

Velká část řešitelů si lineární změnou hmotnosti zdůvodnila i lineární změnu zrychlení a následně počítala s aritmetickým průměrem jako formou středního zrychlení. Tato úvaha však není na místě, jelikož zrychlení při konstantní síle je nepřímo úměrné hmotnosti (zde s jistým posunem způsobeným tíhovou silou). Pro představu uvádíme obrázek 1, z nějž je patrná odlišnost od lineárního růstu rychlosti.

Během výpočtů vycházely vzorce se spoustou zanořených závorek, zlomků a sčítanců – pro zajímavost uveďme jejich označení jako *tasemnicovitých vzorců*, jehož autorem je Martin Kihoulu.



Obr. 1: Průběh letu rakety: $m_0 = 50\,\mathrm{g}$, $m_\mathrm{p} = 30\,\mathrm{g}$, $I = 10\,\mathrm{N{\cdot}s}$, $T_1 = 1\,\mathrm{N}$, $T_2 = 0{,}7\,\mathrm{N}$.

Michal Koutný
michal@fykos.cz