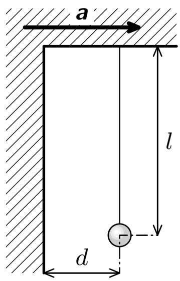
Úloha II.4 ... kulička ve vlaku

4 body; průměr 2,21; řešilo 52 studentů

Mějme svislou desku a ve vzdálenosti d od ní kuličku o hmotnosti m na závěsu délky l. V určitém okamžiku se celá soustava začne pohybovat se zrychlením a ve směru kolmém na desku. Určete podmínku pro velikost zrychlení, aby se kulička desky dotkla, a za jak dlouho k tomu dojde, víte-li, že vzdálenost d není větší než jedna pětina l.

Petr si kýval s kyvadélkem osudu.



Obr. 1

Díky zrychlení začne v inerciální soustavě spojené s deskou působit na všechny objekty setrvačná síla. Protože bude mít zrychlení stále stejnou velikost, bude v této soustavě na kuličku působit homogenní silové pole silou

$$F = m\sqrt{a^2 + g^2}\,.$$

Kulička se tedy bude chovat podobně, jako by byla v gravitačním poli s tíhovým zrychlením o velikosti $\sqrt{a^2+g^2}$ a sklonu

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{g}\right)$$

vůči běžnému svislému směru v tíhovém poli Země. Kulička se tedy začne chovat jako kyvadlo, podobně jako v tíhovém poli Země, pouze s jinými parametry.

Díky tomu, že l je několikrát větší než d, můžeme kyvadlo považovat přibližně za matematické. V okamžiku rozjetí se vlaku bude ve své krajní výchylce. Podmínku pro minimální přípustné zrychlení $a_{\min}$, aby se kulička dotkla desky, získáme tehdy, když druhá krajní poloha bude právě na desce, tj.

$$\beta = 2\alpha_{\min}\,,$$

kde β je úhel svíraný tíhovým zrychlením g a závěsem kuličky v okamžiku dotyku stěny. Dosazením získáme

$$\arcsin\left(\frac{d}{l}\right) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{a_{\min}}{g}\right) \quad\Rightarrow\quad a_{\min} = g\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right).$$

Kulička se dotkne pro jakékoliv zrychlení a větší než $a_{\min}$ mířící od desky směrem ke kuličce.

Počáteční úhlová výchylka kyvadla je α. Pokud hledaný čas t dosadíme do rovnice vyjadřující úhlovou výchylku kyvadla, získáme úhel vyjadřující, o kolik se odchýlí kyvadlo od své klidové polohy. Tomu odpovídá úhlová výchylka

$$\alpha - \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{g}\right) - \arcsin\left(\frac{d}{l}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{g}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+g^2}}{l}}T\right).$$

Odtud jen vyjádříme požadovaný čas

$$T = \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}}\arccos\left(1 - \frac{\arcsin\left(d/l\right)}{\operatorname{arctg}\left(a/g\right)}\right).$$

Petr Ryšavý
petr@fykos.cz