**24. ročník, úloha VI.S ... *všehochuť*** *(6 bodů; průměr 5,00; řešil 1 student)*

a) *Předpokládejme, že máme radioaktivní látku $X$, která se rozpadá na látku $Y$ s poločasem rozpadu $T_1$, ta se následně rozpadá na stabilní látku $Z$ s poločasem rozpadu $T_2$. Jak závisí koncentrace látky $Y$ na čase, pokud jsme na počátku měli pouze látku $X$?*

b) *Vypočtěte, jak vypadá difrakční obrazec vzniklý průchodem světla o vlnové délce $\lambda$ štěrbinou šířky $d$.*

c) *Pokuste se najít frekvence $\omega$, pro které existuje řešení vlnové rovnice na čtverci o hraně $a$. Kolik různých funkcí odpovídá jedné úhlové frekvenci?*
*Nápověda: Pro prostorovou část předpokládejte řešení ve tvaru $A(x,y) = X(x)Y(y)$.*

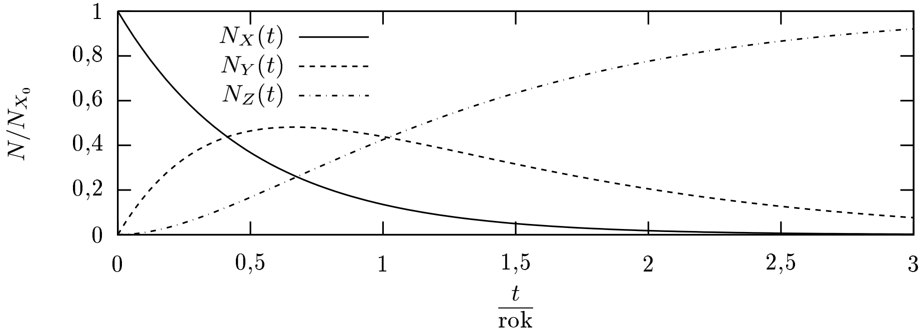
*Ozářilo Lukáše*

*Rozpad*

Rozmysleme si nejprve, jak to je s poločasem rozpadu $T$. Víme, že pro množství radioaktivní látky v čase $t$ platí

$$N(t) = N_{t=0} 2^{-t/T} = N_{t=0} \exp(-t/T \ln 2) = N_{t=0} \exp(-t/\lambda)\,, \quad \lambda = \frac{T}{\ln 2}\,,$$

kde $\lambda$ je tzv. rozpadová konstanta.




Obr. 1. Závislost relativního množství radioaktivních látek na čase pro $\lambda_{XY} = 2\,\text{rok}^{-1}$ a $\lambda_{YZ} = 1{,}1\,\text{rok}^{-1}$

Studujme nejprve rozpad $X \to Y$, množství látky $X$ budeme značit $N_X$, látky $Y$ $N_Y$, atd. Napíšeme si pro něj diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}N_X}{\mathrm{d}t} = -\lambda_{XY} N_X\,.$$

Budeme předpokládat řešení ve tvaru exponenciály, vizte text seriálu. Zjistíme, že platí

$$N_X(t) = N_{X_0} \exp(-\lambda_{XY} t)\,.$$

Nyní budeme zkoumat druhý rozpad $Y \to Z$. Pro množství látky $Y$ platí

$$\frac{\mathrm{d}N_Y}{\mathrm{d}t} = -\lambda_{YZ} N_Y + \lambda_{XY} N_X\,, \tag{1}$$

druhý člen se zde vyskytuje, protože látky $Y$ přibývá rozpadem látky $X$. Protože zde máme soustavu dvou diferenciálních rovnic, budeme předpokládat tvar řešení $N_Y$ ve tvaru součtu dvou exponenciál, tj. $N_Y = A\exp(-\alpha_1 t) + B\exp(-\alpha_2 t)$ a dosadíme do (1). Dostáváme

$$
\begin{aligned}
&-A\alpha_1 \exp(\alpha_1 t) - B\alpha_2 \exp(-\alpha_2 t) = \\
&= -\lambda_{YZ} A \exp(-\alpha_1 t) - \lambda_{YZ} B \exp(-\alpha_2 t) + N_{X_0}\lambda_{XY} \exp(-\lambda_{XY} t)\,.
\end{aligned}
$$

Aby tato rovnice mohla být splněna pro všechny časy, musí být součet koeficientů u stejných exponenciál roven nule; protože $N_{X_0} \neq 0$, musí být $\alpha_1 = \lambda_{XY}$. Pak platí

$$
\begin{aligned}
-A\alpha_1 &= -A\lambda_{YZ} + \lambda_{XY} N_{X_0}\,,\\
-B\alpha_2 &= -B\lambda_{YZ}\,.
\end{aligned}
$$

Z toho vyplývá $\alpha_2 = \lambda_{YZ}$, $B$ je volný parametr, který musíme dopočítat z počáteční podmínky, $A = \lambda_{XY} N_{X_0}/(\lambda_{YZ} - \lambda_{XY})$. Pro množství látky $Y$ potom můžeme psát

$$
N_Y(t) = N_{X_0} \frac{\lambda_{XY}}{\lambda_{YZ} - \lambda_{XY}} \left(\exp(-\lambda_{XY} t) - \exp(-\lambda_{YZ} t)\right)\,.
$$

Konstantu $B$ jsme zvolili tak, aby $N_Y(0) = 0$. Protože se žádná látka neztrácí, platí $N_Z(t) = N_{X_0} - (N_X(t) + N_Y(t))$. Množství jednotlivých složek je uvedeno na grafu v obrázku 1.

*Difrakce*

Abychom určili tvar difrakčního obrazce ve veliké vzdálenosti, musíme vypočítat Fourierovu transformaci štěrbiny. Protože je problém translačně symetrický podél osy štěrbiny, omezíme se jen na jeden rozměr, platí

$$
p(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}k\sqrt{2\pi}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd/2}\right) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\mathrm{i}k} \sin(kd/2)\,.
$$

Pozorovaná intenzita osvětlení je kvadrátem Fourierova obrazu. Platí

$$
I = I_0 \left(\frac{\sin(kd/2)}{kd/2}\right)^2\,,
$$

kde jsme všechny konstanty zahrnuli do $I_0$, tj. osvětlení přímo za štěrbinou. Argument $kd/2$ závisí pouze na vlnové délce a parametrech úlohy, tj. $d$ a lineárně na úhlu odchylky $\varphi$. Z textu víme, že platí $\varphi = k\lambda/2\pi$, tj. $kd/2 = \pi d/\lambda \cdot \varphi$.

*Kmitání*

Máme za úkol najít řešení vlnové rovnice pro čtverec s hranou $a$. Pro výchylku $U(x, y, t)$ platí

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,.
$$

Vypočteme-li Fourierovu transformaci této rovnice v časové proměnné, dostáváme

$$
\frac{\partial^2 \hat{u}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}(x, y}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u}(x, y) = 0\,.
$$

V zadání je napsáno, že máme řešení hledat ve tvaru součinu dvou funkcí závislých pouze na jedné souřadnici. Tj. $\hat{u} = X(x)Y(y)$, dosadíme-li toto do rovnice výše a vydělíme-li $\hat{u}$, dostaneme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0\,,$$

aby tato rovnice platila pro všechna $x$ a $y$, musí být první dva členy konstantní. To nám ale připomíná rovnici pro strunu z textu seriálu. Musí platit

$$X_l(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a} l\right)\,, \quad l \in \{1, 2, 3, \ldots\}\,.$$

Potom platí $X_l''(x)/X_l(x) = (\pi/a)^2 l^2$. Podmínka na úhlovou rychlost kmitání je proto

$$\omega = \frac{\pi}{ca}\sqrt{l^2 + m^2}\,,$$

kde $m$ odpovídá počtu uzlů funkce $Y(y)$. Celkové řešení je potom

$$u_{lm}(x, y, t) = u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a} l\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a} m\right) \sin\left(\frac{\pi}{ca}\sqrt{k^2 + m^2} t\right)\,.$$

***Lukáš Ledvina***
lukasl@fykos.cz