

## Úloha VI.P ... Zeměplocha

8 bodů, průměr 3,25, řešilo 8 studentů

*To, že Země není placka, je všeobecně známá věc. Myslím, že jen s obtížemi bychom hledali člověka, který by tvrdil, že Země není kulatá nýbrž placatá a zdůvodňoval by to tím, že kdyby přeci jen placatá byla, tak by australani chodili vzhůru nohama... Ale umíme takto samozřejmý fakt dokázat?*

*Terka J. si ušila bič.*

Odras Slunce na hladině jezera<sup>1</sup>

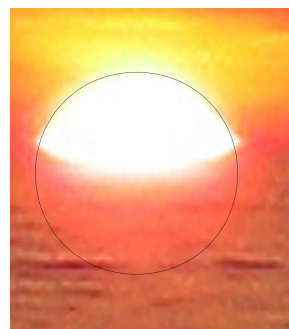
Důkaz toho, že Země není kulatá nám poskytne pouhá fotografie západu Slunce. Dokonce z ní dokážeme určit i horní odhad zemského poloměru (Pokud ukážeme, že Země není placka, budeme předpokládat, že nemá žádný jiný tvar – krychle, válec atp. – nebylo by těžké pro každé, které vás napadne najít argument, proč by takový tvar Země mít nemohla. Pokud vás žádný nenapadne, pak se klidně ozvěte a můžeme si o tom poslat pár mailů).



Obr. 1

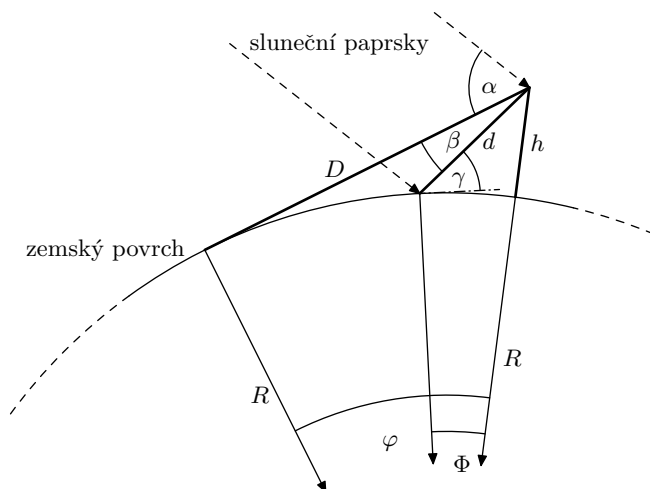
Podívejte se na obrázek 2. Zde je zobrazen západ Slunce nad hladinou jezera. Slunce zde vidíme dvakrát – jednou skutečné Slunce a podruhé jeho odraz v hladině. Není jednoduché pořídít takovou fotografii, pokud se podíváte na většinu takových obrázků, odraz se „rozpíje“ přes celou hladinu vlivem nerovností na hladině.

Zde byla hladina jezera dostatečně klidná, takže pozorujeme odraz Slunce zmenšený. Při odečtení patřičných hodnot z obrázku 2 lze pomocí klasické geometrické optiky odhadnout poloměr Země. Hladina jezera se vlastně chová jako kulové zrcadlo o poloměru Země (kdyby Země byla placka, pozorovali bychom odraz nezmenšený), viz obrázek 3, který zároveň definuje veličiny potřebné pro výpočet: 1.  $R$  – poloměr Země, 2.  $h$  – výšku fotoaparátu nad hladinou vody, 3.  $D$  – vzdálenost fotoaparátu od horizontu, 4.  $\varphi$  – úhel příslušný vzdálenosti  $D$ , 5.  $d$  – vzdálenost místa odrazu a fotoaparátu, 6.  $\Phi$  – úhel příslušný vzdálenosti  $d$ , 7.  $\alpha$  – úhel svírající spojnice horizontu a pozorovatele se směrem paprsků Slunce, 8.  $\beta$  – úhel svírající spojnicí horizontu a pozorovatele a spojnicí místa odrazu a pozorovatele, 9.  $\gamma$  – úhel odrazu paprsku.



Obr. 2

<sup>1</sup>Tuto metodu navrhl a aplikoval Robert J. Vanderbei z Princetonské University. Všechny informace a fotografie jsou zde s jeho svolením.



Obr. 3

Máme tedy devět neznámých veličin, které potřebujeme změřit. Veličinu  $h$  odhadneme hodnotou 2,135 m. Z fotografie určíme hodnoty úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ , přičemž velikost slunečního kotouče je přibližně  $0,5^\circ$ . Při větším rozlišení určíme z obrázku 2, že průměr Slunce je 76 dílů, vršek Slunce je 18 dílů nad horizontem a spodní část odrazu Slunce je 7 dílů pod horizontem. Pak tedy,

$$\alpha = \frac{18}{76} \cdot 0,5^\circ, \quad \beta = \frac{7}{76} \cdot 0,5^\circ.$$

Máme tedy už pouze šest neznámých. Zároveň ovšem také šest lineárně nezávislých rovnic snadno odvoditelných z obrázku 3,

$$\begin{aligned} \Phi + \gamma &= \varphi + \beta, \\ \alpha &= 2\gamma + \beta, \\ R \cos \Phi + d \sin(\Phi + \gamma) &= R + h, \\ R \sin \Phi - d \cos(\Phi + \gamma) &= 0, \\ R \cos \varphi + D \sin \varphi &= R + h, \\ R \sin \varphi - D \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Máme tedy systém šesti nelineárních rovnic o šesti neznámých. Numerické<sup>2</sup> řešení v programu Mathematica nese hodnotu

$$R = 5\,500 \text{ km}.$$

Pro  $\beta < \alpha$ , máme  $\varphi > 0$  a tedy  $R < \infty$ . Pro  $\beta = \alpha$  je  $\varphi = 0$  a  $R$  směřuje k nekonečnu, tj. Země by se podobala placce.

<sup>2</sup>Pro malé úhly je možné najít i aproximativní řešení, je však třeba nezanedbat ještě druhé mocniny rozvoje goniometrických funkcí. Numerické řešení je sice méně elegantní, avšak méně pracné a výslednou hodnotu dostaneme s uspokojivou přesností.

Největší nepřesnost měření spočívá v umístění horizontu. Ohyb světla v atmosféře (refrakce) nemá na měření vliv, mění pouze zdánlivou polohu Slunce na obloze, která je pro měření nepodstatná – snímáme Slunce a jeho odraz na hladině, ale na tom přesně v jaké poloze měření nijak neovlivní.

Pokud bychom měli fotografii ve větším rozlišení, byli bychom schopni určit hodnotu poloměru přesněji. Nicméně pouhou fotografií jsme dokázali, že poloměr Země je konečný a přibližně jsme dokázali určit jeho hodnotu, což je podle mne v uvážení „náročnosti“ měření docela působivé.

*Tereza Jeřábková*  
terkaj@fykos.cz