24. ročník, úloha VI.4 ... *konečné řešení otázky globálního oteplování* *(4 body; průměr 3,25; řešilo 8 studentů)*

Jak by se změnil výkon slunečního záření dopadajícího na Zemi v odslunί, kdyby byla jednorázově vychýlena zemská dráha (změnou její okamžité rychlosti ve směru její dráhy) tak, aby byl pozemský rok o týden delší? Odhadněte teplotu Země v přísluní a odsluní, pokud by Země měla téměř nulovou tepelnou kapacitu. Stačí uvažovat, že původní dráha Země byla kruhová a přešla na eliptickou. *Karel se díval na Futuramu*

Vzpomeneme si na Keplerův třetí zákon, který dává do vztahu oběžné doby planet T obíhající centrální slunce s jejich hlavními poloosami a. Stejně bude platit i v našem případě pro změnu trajektorie Země

$$\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{T_1^2}{a_1^3} \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_0^2}}\, a_0\,,$$

kde indexy 0 budeme značit počáteční situaci, kdy Země obíhá Slunce po kružnici s poloměrem $a_0 = 1\,\mathrm{AU} = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ s oběžnou dobou $T_0 = 365{,}2\,\mathrm{dne}$, a indexy 1 budou značené veličiny odpovídající situaci po změně zemské dráhy (doba oběhu $T_1 = 372{,}2\,\mathrm{dne}$).

Vzhledem k tomu, že přechod na eliptickou[1] dráhu se uskutečnil rychle a ve směru pohybu Země, což znamená, že přísluní (perihelium) nové dráhy bude ve vzdálenosti $a_\mathrm{p} = a_0$ od Slunce a odsluní (afelium) bude ve vzdálenosti $a_\mathrm{a} = 2a_1 - a_0 = \left(2\sqrt[3]{T_1^2/T_0^2} - 1\right) a_0 \approx 1{,}025\,\mathrm{AU}$. Už z tohoto výsledku je vidět, že dramatické změny teplot v průběhu roku nebudou nastávat, protože excentricita této dráhy je pouze $e_1 = (a_\mathrm{a} - a_\mathrm{p})/(a_\mathrm{a} + a_\mathrm{p}) = 1 - \sqrt[3]{T_0^2/T_1^2} = 0{,}0126$, což je menší excentricita, než má Země ve skutečnosti. Pokud bychom ale uvažovali eliptickou dráhu, záleželo by na tom, kdy v průběhu roku dojde ke změně dráhy. Excentricita by se pak mohla i zmenšit, střední vzdálenost Země-Slunce by vzrostla v každém případě tak, aby se velká poloosa zvětšila z a_0 na a_1.

Hustota toku sluneční energie ve vzdálenosti 1 AU od Slunce se nazývá *sluneční konstanta* a její hodnota je $S_0 = 1370\,\mathrm{W/m^2}$. Ve skutečnosti se nejedná o konstantu, protože v průběhu roku kolísá o cca 1,7 %[2], ale v rámci řešení úlohy ji budeme považovat za konstantní. Hustota toku sluneční energie je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti a ve vzdálenosti r od Slunce ji můžeme vypočítat podle vztahu

$$S_r = \frac{a_0^2}{r^2} S_0\,.$$

V přísluní naší nové dráhy je $S_\mathrm{p} = S_0$ z definice a v odsluní

$$S_\mathrm{a} = \frac{a_\mathrm{p}^2}{a_\mathrm{a}^2} S_0 = \frac{1}{\left(2\sqrt[3]{T_1^2/T_0^2} - 1\right)^2} S_0 = 0{,}95 S_0 = 1300\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}\,.$$

Pro odhad teploty budeme předpokládat, že Země je dokonale černé těleso a že v každý okamžik je vyrovnaná bilance zářivého výkonu dopadajícího na Zemi a výkonem, která je Zemí

[1] Případně více eliptickou, pokud bychom se rovnou rozhodli uvažovat i to, že původní dráha Země je ve skutečnosti eliptická s excentricitou $e = 0{,}0167$.

[2] Nemluvě o tom, že se i její střední hodnota periodicky mění v průběhu 11letého slunečního cyklu.

vyzařovaná jako černým tělesem. Jedná se o logický předpoklad, protože jinak by Země nebyla v tepelné rovnováze a buď by se neustále ohřívala, nebo ochlazovala. Ve skutečnosti má Země tepelnou kapacitu, takže není v tak dokonalé tepelné rovnováze – ani blízko takové, že by se dopadající záření z jedné strany na Zem okamžitě vyzařovalo všemi směry, ale berme to jako první přiblížení. Světelný výkon dopadající na Zemi, která je dokonalá koule o poloměru R_Z, ve vzdálenosti r, je úměrný průřezu Země a hustotě toku sluneční energie, $P_r = \pi R_\mathrm{Z}^2 S_r$. Výkon, který Země vyzáří na svém celém povrchu, je dle Stefanova-Boltzmannova zákona

$$P = 4\pi R_\mathrm{Z}^2 M = 4\pi R_\mathrm{Z}^2 \sigma \tau^4 \,,$$

kde M je intenzita vyzařování z povrchu černého tělesa, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$ Stefanova-Boltzmannova konstanta a τ je teplota černého tělesa. Vzhledem k tomu, že se mají oba výkony rovnat, dostáváme vzorec pro teplotu Země v našem přiblížení

$$\tau_r = \sqrt[4]{\frac{S_r}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{a_0}{2r}}\sqrt[4]{\frac{S_0}{\sigma}}\,.$$

Teplota v perihelu pak vyjde $\tau_\mathrm{p} \approx 6\,^\circ\mathrm{C}$ a v afelu $\tau_\mathrm{a} \approx 2\,^\circ\mathrm{C}$. Teplota v perihelu by teoreticky podle našich předpokladů měla odpovídat střední teplotě na Zemi v průběhu roku, která se udává jako $14\,^\circ\mathrm{C}$. Což na první pohled úplně nesedí, ale vzhledem k počtu zanedbání, kterých jsme se dopustili, je to poměrně dobrá shoda. Další vlivy, které by se pro správné určení teploty měly započítat, jsou například to, že ve skutečnosti spektrum Země při vyzařování nebude ideálně odpovídat vyzařování černého tělesu, ale mělo by určitou specifickou vyzařovací charakteristiku, navíc i tato celková charakteristika by byla jenom přiblížením, protože Země není jenom z jedné chemické látky, ale jinak bude vyzařovat pevnina a jinak oceány. Toto by vedlo spíš ke snížení očekávané teploty Země. Vliv na teplotu Země má také to, že má horké jádro – částečně obsahující tepelnou energii od doby vzniku Země pocházející z gravitační potenciální energie a dále v jádru dochází k rozpadu radioaktivních prvků, což také zvyšuje teplotu Země. Další věcí je přítomnost atmosféry, která díky skleníkovým plynům zvyšuje teplotu zemského povrchu.

Něco navíc

Pokud bychom tedy chtěli vyřešit globální oteplování jako ve Futuramě, kde roboti ovlivnili dráhu Země tak, že rok byl o týden (robotí pařby) delší, tak by nás kromě výkyvů teploty v průběhu roku zejména zajímala průměrná roční teplota. Respektive i s naším relativně primitivním modelem bychom mohli určit, o kolik zhruba stupňů by se teplota změnila vůči původní teplotě. Za tím účelem můžeme využít druhý Keplerův zákon – *zákon ploch* – říkající, že za jednotku času průvodič planety opíše stejnou plochu.[3] Pro plošnou rychlost w pak platí

$$w = \frac{a_1 b_1}{T_1} = \frac{r v_r}{2},$$

kde b_1 je vedlejší poloosa elipsy a v_r je rychlost planety ve vzdálenosti r od Slunce. Pokud bychom chtěli, můžeme vypočítat i hodnotu w s pomocí vztahu $e = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}/a_1$, která pak bude $w = \sqrt{a_\mathrm{a} a_\mathrm{p}} = a_0\sqrt{2\left(T_1/T_0\right)^{2/3} - 1}$, ale toto číslo nebudeme dál potřebovat. Vystačíme si s úvahou, že když w je konstantní, můžeme vyjádřit oběžnou rychlost jako funkci

[3] Je to jen jiná formulace zákona zachování momentu hybnosti.

vzdálenosti $v_r = 2w/r$. Vzhledem k tomu, že trajektorie Země je elipsa, můžeme si vybrat souřadnou soustavu, kde Slunce bude v jejím počátku a perihelium bude na ose x v kladném směru. Naši elipsu popíšeme v polárních souřadnicích jako

$$r_\varphi = a_1 - (a_1 - a_0)\cos\varphi\,,$$

kde φ je úhel měřený právě od perihelu v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček). Jde o aproximaci pro malé excentricity ε. Obecně můžeme kuželosečky v polárních souřadnicích zapsat ve tvaru

$$r(\varphi) = \frac{a_0}{1 - \varepsilon\cos\varphi}\,,$$

kde a_0 je velikost hlavní poloosy a ε je excentricita. Pro $\varepsilon = 0$ jde o kružnici, pro $0 < \varepsilon < 1$ jde o elipsu, pro $\varepsilon = 1$ jde o parabolu a pro $\varepsilon > 1$ to je jedna větev hyperboly.

Pokud jste se ještě s polárními souřadnicemi nesetkali, tak místo souřadnice x a y máme souřadnice $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ určující vzdálenost od počátku a φ, což je právě zmíněný úhel, pro který platí $\varphi = \operatorname{tg} y/x$.

Poslední úvaha se týká toho, že teplotu bychom chtěli „vystředovat“ tak, že bychom si rozdělili dráhu Země v průběhu roku na malé kousíčky, kdy má skoro stejnou teplotu určenou naším modelem, a teplotu vynásobili časem, za který Země příslušný kousíček dráhy urazila. Všechny tyto vynásobené kousky bychom pak sečetli a vydělili dobou oběhu. Vlastně bychom spočítali vážený průměr teploty. Čas, který Zemi potrvá, než urazí nějakou dráhu, je nepřímo úměrný její rychlosti. Rychlost je zase v našem případě nepřímo úměrná vzdálenosti od Slunce, takže čas je úměrný vzdálenosti. Takže můžeme jako váhovou funkci použít vzdálenost a ne přímo čas. Také bude lepší, když kousíčky, ve kterých považujeme rychlost Země za konstantní, půjdou k nekonečně krátkým dobám – tzn. přejdeme k integrování. Průměrná teplota bude

$$\bar{\tau} = \frac{\int_0^{2\pi} r_\varphi \tau_{r_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{2\pi} r_\varphi\,\mathrm{d}\varphi}\,.$$

Tyto integrály si můžeme nechat numericky spočítat[4] a vyjde nám, že nemůžeme čekat změnu průměrné roční teploty ani o celé 2 °C, takže pokud by bylo potřeba Zemi ochladit v situaci, kdy by bylo všem nechutné vedro, ani o týden delší rok by nestačil.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

[4] Například pomocí stroje na http://www.wolframalpha.com/.