24. ročník, úloha VI.3 ... *letadlo* *(3 body; průměr 1,86; řešilo 7 studentů)*

Jak dlouhý čas uběhne v letadle mezi „západem“ a „východem“ slunce, letí-li v rovině ekliptiky? A jak to bude vypadat s délkou dne a noci? Potřebné údaje jako běžnou letovou hladinu si zjistěte na internetu. Rozeberte oba případy, kdy letadlo letí na západ i na východ.

Vymyslel Petr, když čekal na romantický západ slunce

Vzhledem k tomu, jaký je poměr výšky h, ve které letadla létají, a poloměru Země R a jaká je doba, po kterou slunce vychází nebo zapadá, můžeme si dovolit aproximaci, podle které budou sluneční paprsky na Zemi dopadat rovnoběžně.

Nejprve spočítáme rychlost v, kterou se letadlo pohybuje vůči soustavě spojené se Sluncem a Zemí. Jednak má svoji rychlost v_l, a kromě toho je navíc unášeno rychlostí v_r danou rotací Země. Tato rychlost ale neleží v tečně trajektorie letu, a navíc její velikost je závislá na zeměpisné šířce. Její průmět do roviny ekliptiky má stále stejnou velikost, a to $\omega(R+h)\cos\varphi$, kde φ je odklon zemské osy od normály roviny ekliptiky. Pokud letadlo letí ve směru otáčení Země, tj. od západu na východ, tyto rychlosti se sčítají. Při pohybu od východu na západ od rychlosti otáčení Země odečítáme rychlost letadla v_l.

Vlastní výpočet provedeme pouze pro pohyb od východu na západ, druhý případ je téměř identický. Označme T délku jednoho dne. Pak platí

$$v = v_\mathrm{r} - v_\mathrm{l} = \omega(R+h)\cos\varphi - v_\mathrm{l} = \frac{2\pi}{T}(R+h)\cos\varphi - v_\mathrm{l}\,.$$

Doba T_0 celého „dne“ (tj. od východu slunce po druhý východ) na palubě letadla je pak

$$T_0 = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi(R+h)T}{2\pi(R+h)\cos\varphi - v_\mathrm{l}T}\,.$$

Pokud nás zajímá čas, který uplyne od „západu“ slunce k jeho „východu“, musíme vypočíst, jakou dráhu proletí letadlo ve stínu Země. Označme α úhel, který svírá spojnice středů Země a Slunce se spojnicí středu Země a bodu, kde se letadlo vynořuje ze stínu Země. Pro tento úhel platí

$$\alpha = \arcsin\frac{R}{R+h}\,.$$

Odtud již snadno určíme dráhu d, kterou letadlo ve stínu urazí,/ a pomocí které dopočteme hledaný čas

$$T' = \frac{d}{v} = \frac{2\alpha(R+h)}{\frac{2\pi}{T}(R+h)\cos\varphi - v_\mathrm{l}} = \frac{2(R+h)\arcsin\frac{R}{R+h}}{\frac{2\pi}{T}(R+h)\cos\varphi - v_\mathrm{l}}\,.$$

Pokud by nás zajímalo trvání dne (mezi východem a západem), pak ho stačí dopočíst jako rozdíl $T_0 - T'$. Pro pohyb od západu na východ (tj. ve směru otáčení Země) se výsledek odlišuje pouze součtem ve jmenovateli místo rozdílu.

Dopravní letadla (jako např. Boeing 747) se pohybují ve výšce okolo 11 km rychlostí $918\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Po dosazení vychází pro pohyb proti směru otáčení Země $T_0 = 65{,}1\,\mathrm{h}$ a $T' = 31{,}3\,\mathrm{h}$ a pro pohyb ve směru otáčení Země $T_0 = 16{,}4\,\mathrm{h}$ a $T' = 7{,}9\,\mathrm{h}$.

V řešení jsme neuvažovali to, že rotace Země značně vychyluje trajektorii letadla z roviny ekliptiky. Letadlo by tento pohyb muselo kompenzovat svým pohybem, a tedy by se uplatnila jen část z jeho rychlosti vůči vzduchu. Tento efekt by ve skutečnosti hrál velkou roli. Dále jsme zanedbali proudění vzduchu, které výrazně ovlivňuje pohyb letadel.

Petr Ryšavý
petr@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.