24. ročník, úloha V . S ... *aviatická* *(6 bodů; průměr –;)*

a) *Popište geometrickou konstrukci (pomocí kružítka a pravítka) profilu Žukovského.*
b) *Zkuste nakreslit proudnice v okolí profilu Žukovského. Zvolte si takové parametry d/l a m/l, aby měly praktické opodstatnění.*
c) *Jaká vztlaková síla působí na rovnou desku? Jaká vztlaková síla působí na desku tvaru kruhového oblouku?*
d) *Zkuste nakreslit profil křídla odpovídající Karmánově-Trefftzově transformaci.*

Lukáš si chtěl vylepšit letadlo.

Geometrická konstrukce

Ujasněme si nejdříve, co potřebujeme znát, abychom dokázali provádět operace s komplexními čísly.

a) *Sčítání:* Chceme li sečíst dva vektory, musíme jeden z nich umět přenést do koncového bodu druhého a máme-li vytyčen směr, kružítkem přeneseme jeho velikost. Toto je na eukleidovském prostoru jednoduché, avšak v jiné geometrii, např. na povrchu koule to nemusí být snadné, dokonce ani jednoznačné.
b) *Násobení reálných čísel:* Vynásobíme-li dvě reálná čísla, získáme obsah obdélníku se stranami těchto délek. Pokud chceme umět dvěma reálným číslům přiřadit jiné reálné číslo, které je jejich součinem, musíme vědět, jaký obsah má jednotkový čtverec, tj. musíme vědět, jak je dlouhá jednotka. Pro dělení platí obdobná podmínka.
c) *Komplexní sdružení:* Chceme-li určit, jaké komplexní číslo je komplexně sdružené, musíme jej zrcadlit okolo osy x, a musíme proto vědět, kde je počátek a jaký směr odpovídá x-ové ose.
d) *Násobení komplexních čísel:* Abychom uměli vynásobit dvě komplexní čísla musíme vynásobit jejich velikost a sečíst jejich argumenty, k této operaci potřebujeme ještě vědět, jaký je kladný směr reálné osy.
e) Odmocňování: k-tou odmocninu z komplexní jednotky jsme si zavedli jako komplexní číslo mající k-krát menší argument. Proto ještě potřebujeme vědět, jaký je kladný smysl otáčení.

Máme zadáno komplexní číslo z a máme sestrojit komplexní číslo $z+1/z$. Hlavním úkolem je sestrojit číslo $1/z$. Protože platí $z = |z| \exp(\mathrm{i} \arg z)$, můžeme psát

$$1/z = 1/|z| \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \arg z} \,.$$

Druhý člen je pouze směr a ten dokážeme sestrojit, pokud víme, kde je osa x. Zaměřme se na sestrojení $1/|z|$. Můžeme využít Eukleidovu větu o výšce, sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník s výškou jednotkové délky a jedním přilehlým úsekem délky $|z|$, druhý úsek bude míti délku $1/|z|$.

Nyní stačí tento příspěvek přičíst k původnímu vektoru a jsme hotovi.

Proudnice v okolí profilu

Jak jsme uvedli v textu seriálu, proudění v okolí profilu je pouze obrazem proudění v okolí válce, jako byl samotný profil obrazem válce. Proto musíme proudnice určené rovnicí

$$\operatorname{Re} w(z) = \text{konst}\,,$$

kde $w(z)$ je komplexní potenciál proudění, zobrazit Žukovského transformací. $\xi = z + l^2/z$.

Vztlaková síla na desku

Jak jsme odvodili v textu seriálu, pro vztlakovou a odporovou sílu platí vztahy

$$R_y = 4\pi\varrho\left(d+\sqrt{m^2+l^2}\right)U_\infty^2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha\,,$$

$$R_x = 4\pi\varrho\left(d+\sqrt{m^2+l^2}\right)U_\infty^2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\,.$$

Transformace vedoucí na rovnou desku odpovídá $m=0$, $d=0$, tj. $\beta=0$. Proto vztlaková síla je

$$R_y = 2\pi\varrho l U_\infty^2\sin 2\alpha\,,$$

kde délka desky je $4l$, ϱ je hustota okolního vzduchu, U_∞ je dopředná rychlost a α je úhel náběhu. Je vidět, že maximální vztlakové síle odpovídá úhel 45°, což je typicky maximální výchylka kormidel.

Vztlaková síla na desku tvaru části válce

Abychom dostali profil „deskovitého" tvaru, musí mít dva ostré rohy, proto původní zobrazovaná kružnice musí procházet body $\pm l$, proto $d=0$. Na nejvyšší bod se musí ze symetrie zobrazit body $\mathrm{i}(m\pm a)$, pokud jsme označili a poloměr zobrazované kružnice. Dosadíme-li do transformačního vztahu, zjistíme, že se zobrazují na bod $2m\mathrm{i}$. Nyní víme, že profil prochází body $\pm 2l$ a bodem $2m\mathrm{i}$. Z jednoduché geometrie určíme jeho poloměr

$$r = \frac{l^2+m^2}{m} \quad\Rightarrow\quad m = \frac{1}{2}\left(r-\sqrt{r^2-4l^2}\right)\,.$$

Nyní musíme uvažovat pouze menší kořen, protože pokud by bylo $m>r$, nemohla by zobrazovaná kružnice procházet body $\pm l$.

Pro vztlakovou sílu vychází

$$R_y = 4\pi\varrho r\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\frac{l^2}{r^2}}\right)}U_\infty^2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha\,,\qquad \beta = \operatorname{arctg}\frac{m}{l}\,.$$

Užili jsme stejného značení jako pro rovnou desku.

Karmánův–Trefftzův profil

Budeme jej konstruovat stejně jako profil Žukovského, tj. budeme požadovat, aby měl ostrou špičku, proto zobrazovaná kružnice musí procházet singulárním bodem transformace

$$\frac{\xi-nl}{\xi+nl} = \left(\frac{z-l}{z+l}\right)^n\,.$$

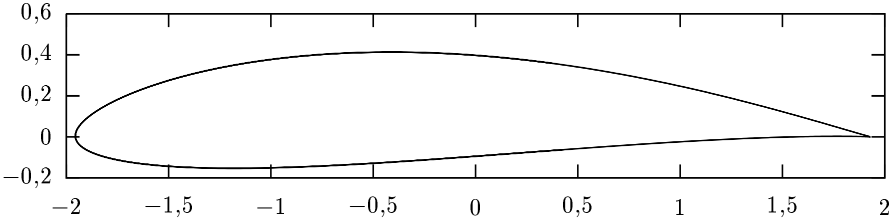
Nyní vypočteme diferenciál rovnice uvedené výše, tj. obě strany zderivujeme dle parametru p.[1]

$$\frac{2nl}{(\xi+nl)^2}\,\mathrm{d}\xi = 2nl\frac{(z-l)^{n-1}}{(z-l)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} = \frac{(z+l)^{n-1}}{(z-l)^{n+1}(\xi+nl)^2}\,.$$

[1] Pokud L a P značí jednotlivé strany rovnice, platí $0=\frac{\mathrm{d}(L-P)}{\mathrm{d}p}=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}p}-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p}$, z toho vyplývá $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\xi}/\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$.

Singulárním bodem této transformace jsou tedy body $z = l$ a $\xi = -nl$, kterému odpovídá $z = -l$.

Profil pro $m/l = 0{,}1$ a $d/l = 0{,}05$ je na obrázku 1.



Obr. 1. Karmánův profil, $m/l = 0{,}1$ a $d/l = 0{,}05$

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`