**24. ročník, úloha IV . 3 ... *naše staré hodiny lijí čtyři hodiny*** *!!! chybí statistiky !!!*

*Navrhněte tvar přelévacích hodin, aby ubývala výška hladiny lineárně s časem. Za uvažování povrchových efektů, vnitřního tření apod. můžete dostat body navíc.*

*z rodinné sbírky manželů Nečadových*

Hladina v hodinách má ubývat lineárně s časem, tedy podle vztahu

$$h = vt\,.$$

Přičemž $v$ je konstantní rychlost klesání hladiny. Přesýpací hodiny mají většinou rotačně symetrický tvar, takže hledejme křivku, jejímž orotováním okolo ypsilonové osy dostaneme tvar, který zařídí lineární ubývání. Hodiny nemají žádný další odtok, proto musí platit, že to, co proteče průřezem $S_1$ ve výšce $h_1$, musí protéct také nejužším průřezem $S_0$ v hrdle hodin $h_0$. Vyjádříme-li objem, který oběma průřezy proteče za jednotku času a tyto objemy porovnáme, dostaneme rovnici kontinuity (pokud jste tento výraz ještě neslyšeli, rovnice kontinuity jsou rovnice, které ovládají „toky“ fyzikálních veličin, chceme-li zajistit, aby se nikde nic neztrácelo)

$$Sv = S_0 v_0\,,$$

kde $v_0$ je rychlost výtoku v nejužším místě a $v$ je konstantní rychlost poklesu hladiny.

Zanedbáme-li viskozitu vody a budeme-li předpokládat, že v hodinách nebude nějaké turbulentní proudění, můžeme pro vyjádření výtokové výšky $h$ použít Bernoulliho rovnici

$$h\varrho g + \frac{1}{2}\varrho v^2 = \frac{1}{2}\varrho v_0^2\,.$$

Po vykrácení hustoty a dosazení za $v_0$ z rovnice kontinuity dostaneme

$$h = \frac{1}{2g}v^2\left(\frac{S^2}{S_0^2} - 1\right)\,.$$

Jelikož předpokládáme rotační tvar hodin, plochy $S$ a $S_0$ budou kruhy. Dosadíme-li za $S = \pi r^2$, dostaneme rovnici křivky čtvrtého stupně

$$h(r) = \frac{1}{2g}v^2\left(\frac{\pi^2 r^4}{S_0^2} - 1\right)\,.$$

Pokud by byl otvor v horní nádobce dost malý a nádobka velká, bude rychlost poklesu hladiny $v$ zanedbatelná vůči výtokové rychlosti $v_0$, a tak můžeme v Bernoulliho rovnici zanedbat člen $\frac{1}{2g}\varrho v^2$. Stejným postupem pak dostaneme rovnici křivky

$$h(r) = \frac{\pi^2 r^4 v^2}{2gS_0^2}\,.$$

***Tereza Zábojníková***
terka@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.
Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.