

24. ročník, úloha II.1 ... rozcvička (4 body; průměr 1,05; řešilo 19 studentů)**a) Jakubova snídaně**

Jakub jí k snídani cereální kuličky o hustotě ρ , které si sype do misky ve tvaru komolého kužele (horní podstava má poloměr R , spodní r a výška je l), ve kterém má do výšky h nalité mléko. Koeficient zaplnění prostoru koulemi je \varkappa . Kolik nejvíce kuliček může do misky nasypat?

b) magnetický monopol

Máme velkou plechovou desku, kterou zmagnetujeme tak, že na její horní ploše bude severní magnetický pól (a na dolní ploše ten jižní). Vylisujeme z ní dvě stejné polokoule. Na vnitřní straně obou polokoulí je teď jižní a na vnější severní pól. Polokoule k sobě přiblížíme tak, že vyrobíme celou kouli. Ta má nyní venku pouze severní pól, takže se chová jako magnetický monopol. A nebo ne? Co nám vytvoření takovéto koule zabrání?

Kuličky ke snídani rozsypal Jakub, magnety zamotaly hlavu brněnským teoretikům.

Jakubova snídaně

Uvažujme, že pokud kuličky dosáhnou okraje misky, tak se rozspou a pokud okraje dosáhne mléko, tak se rozlije. Označme m hmotnost kuliček, kterou hledáme. Dále platí

$$V = \frac{\pi}{3} \frac{l}{R-r} (R^3 - r^3),$$

$$V_h = \frac{\pi}{3} \frac{h}{r_h - r} (r_h^3 - r^3),$$

kde V je celkový objem misky, V_h je objem mléka a $r_h = r + h(R-r)/l$ je poloměr hladiny mléka.

Obecně mohou nastat tři případy:

a) Hustota kuliček je menší než hustota mléka a kuličky plavou na mléku.

Objem misky je rozdělen na tři části. Dole je jen mléko, uprostřed je mléko s kuličkami a nvrchu jsou jen kuličky. Označme V_m objem kde je jen mléko, V_{km} objem kde je mléko s kuličkami a V_k objem kde jsou jen kuličky. Dále označme ρ_m hustotu mléka a ρ_k hustotu kuliček a nakonec m jejich hmotnost. Pak platí lineární soustava rovnic o čtyřech neznámých

$$m = \varkappa V_{km} \rho_m, \quad (1)$$

$$m = \varkappa (V_{km} + V_k) \rho_k, \quad (2)$$

$$V_h = (1 - \varkappa) V_{km} + V_m, \quad (3)$$

$$V = V_m + V_{km} + V_k, \quad (4)$$

kde V je objem celé misky a V_h je celkový objem mléka. Rovnice (1) vychází z Archimedova zákona, (2) vyjadřuje celkovou hmotnost kuliček, (3) vyjadřuje celkový objem mléka a (4) je celkový objem misky. Vyřešením této soustavy získáme

$$m = \frac{\varkappa \rho_m \rho_k (V - V_h)}{\rho_m - (1 - \varkappa) \rho_k}.$$

Podmínka plavání kuliček je ověřitelná nerovností $m < V \rho_k \varkappa$.

b) Kuličky narazily na dno a přepadávají kuličky.

Kuličky zabírají celý objem misky, mléko je v prostoru mezi kuličkami. Pak platí

$$m = V \rho_k \varkappa.$$

Podmínka pro náraz na dno je

$$m > \frac{\varkappa V_h \rho_m}{1 - \varkappa},$$

kteřá vychází z archimedova zákona, kde $V_h/(1 - \varkappa)$ je objem, ve kterém se nachází mléko.

c) Hustota kuliček je větší než hustota mléka a mléko přeteče.

Kuličky zabírají objem velikosti $V - V_h$, a tedy

$$m = \rho_k(V - V_h).$$

Podmínka pro přetečení mléka je $V_h > (1 - \varkappa)V$, tedy mléka je více, než by se vešlo do mezer mezi kuličky.

Pro nalezení správného výsledku pro konkrétní hodnoty by tedy bylo potřeba prověřit všechny tři možnosti a zkontrolovat, které jsou splněny podmínky.

Magetický monopol

Jedna z Maxwellových rovnic nám říká, že tok magnetické indukce libovolnou uzavřenou plochou je nulový. Matematickou symbolikou lze zapsat

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

kde \mathbf{B} je pole magnetické indukce, S je uzavřená plocha a $d\mathbf{S}$ je vektor velikosti elementu plochy s normálovým směrem.

To ovšem platí za předpokladu, že neexistuje magnetický monopol. Kdyby existoval, platila by obdoba Gaussova zákona elektrostatiky i pro pole magnetické: Tok magnetické indukce libovolnou uzavřenou plochou je přímo úměrný magnetickému náboji uvnitř plochy. Zapsáno

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = kM,$$

kde k je konstanta úměrnosti a M je celkový magnetický náboj uvnitř plochy.

Žádná z polokoulí magnetický náboj nemá a proto uzavřeme-li libovolnou z nich do plochy, magnetický tok touto plochou bude nulový. Z principu superpozice musí platit, že magnetický tok plochou, kde jsou uzavřené obě polokoule musí být roven součtu toků plochou ve chvíli, kdy obsahuje pouze první a pouze druhou polokouli. Sečtením dvou nul získáme znovu nulu a výsledný tok je zase nulový. Vidíme tedy, že se magnetické účinky polokoulí vyruší a získáme magneticky neutrální kouli.

Jinými slovy: bez monopolů monopol nevytvoríš.

Jáchym Sýkora
jachym@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky

UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.