23. ročník, úloha V . 2 ... *Lukášovo péro* *!!! chybí statistiky !!!*

Ve starém gauči našel Lukáš pružinu o tuhosti k, poloměru závitu r, délky l a počtu závitů n. Protože se nudil, připojil ji ke stabilnímu zdroji elektrického proudu I. Jak se změnila její tuhost? *Vymyslel Lukáš, když mu Aleš řekl, aby něco vymyslel.*

Jak víme již ze školy, pokud protéká proud dvěma vodiči stejným směrem, tyto se přitahují. Na rozdíl od dvou vodičů se však vodiče v cívce vzájemně odpuzují. Proto se po připojení proudu do obvodu celá pružina prodlouží, ale kromě prodloužení se také kupodivu změní její tuhost. Vypočtěme nyní tuto změnu kvantitativně.

V mnohých fyzikálních úlohách je vhodné místo počítání sil, vypočíst energii systému. Energie je totiž skalární veličina, zatímco síla je veličina vektorová. Pokud se v systému nikde neztrácí energie, např. třením, platí, že síla je derivací energie dle polohy. Platí totiž, že $W = Fs$, kde s je dráha, na které je konána práce a pokud budeme uvažovat jen malé posunutí s, změna energie systému bude také malá a dostáváme $F = \mathrm{d}W/\,\mathrm{d}s$.

Začněme nejdříve s energií stlačené pružiny. Uvažme, její klidová délka je l_0, její aktuální délka je l a její tuhost nechť je k. Potom její energie je

$$E = \tfrac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \tfrac{1}{2}k(\Delta l)^2\,. \tag{1}$$

Je zajímavé, že pokud posuneme počátek soustavy souřadné do rovnovážné polohy, tak energie na malém okolí nezávisí lineárně na této posunuté souřadnici. Je to náhoda, nebo to platí obecně? Představme si situaci, když by energie závisela lineárně na poloze, potom by se v jistém směru zmenšovala energie systému a ten by se začal pohybovat tímto směrem, jako na houpačce, houpeme-li se. To by ovšem byl spor s předpokladem o rovnovážné poloze. Dále je z této úvahy vidět, že koeficient před kvadratickým členem odpovídá polovině tuhosti fiktivní pružinky.

Další fyzikálně vděčná úvaha souvisí s aproximacemi funkcí na malém okolí jistého bodu. Funkce se nejjednodušeji aproximuje polynomem. Uvažujme polynom

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n\,.$$

Chceme nalézt takové koeficienty a_k, takové aby původní funkce co nejlépe odpovídala tomuto polynomu na okolí bodu x_0. Máme širokou paletu možností. Jedna z metod, jak tohoto cíle dosáhnout je požadovat rovnost derivací původní funkce a tohoto polynomu v bodě x_0. Takto vzniklému rozvoji se říká Taylorův rozvoj. Pro něj platí

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,,$$

kde x_0 je střed rozvoje.

Vraťme se nyní k našemu problému. Chceme-li vypočíst celkovou energii systému, je možno odděleně vypočíst mechanickou energii a elektromagnetickou energii.

Označme N počet závitů cívky, l její aktuální délku, I proud, který jí prochází, k její tuhost bez procházejícího proudu a R její poloměr. Pro mechanickou energii platí

$$E_{\mathrm{mech}} = \tfrac{1}{2}k(l - l_0)^2\,.$$

Víme, že energie elektromagnetického pole cívky o indukčnosti L je $E_{\mathrm{EM}} = LI^2/2$. Naším dalším cílem bude vypočítat indukčnost této cívky a zjistit, jak závisí na l.

Víme, že pokud se nachází cívka v magnetickém poli, pro indukované napětí platí $U = - \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$, kde Φ je magnetický tok cívkou. Dále víme, že pro indukované napětí na cívce platí $U = -L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, kde I je proud protékající cívkou a L její indukčnost. V našem případě tok Φ budí sama cívka. Srovnáním těchto výrazů dostáváme

$$L = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}I}\,.$$

Cívku budeme aproximovat solenoidem. Z Ampérova zákona pro intenzitu magnetického pole uvnitř cívky platí

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

a pro celkový tok magnetického pole platí

$$\Phi = BSN = \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2}{l} I \quad \Rightarrow \quad L = \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2}{l}\,,$$

kde $S = \pi R^2$ je plocha jednoho závitu.

Celková energie pružiny, kterou protéká proud je tedy

$$E = E_{\mathrm{mech}} + E_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{2}\left(k(l-l_0)^2 + \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2 I^2}{l}\right)\,. \tag{2}$$

Označme nyní $A = \frac{1}{2}\mu_0 \pi R^2 N^2 I^2$. Potom pro elektromagnetickou energii platí

$$E_{\mathrm{EM}} = \frac{A}{l} = \frac{A}{l_0\left(1 + \left(\frac{l}{l_0} - 1\right)\right)} = \frac{A}{l_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta l}{l_0}}\,.$$

kde jsme označili $\Delta l = l - l_0$. Druhý zlomek je však součtem geometrické řady s kvocientem $-\Delta l/l_0$. Lze však též nahlédnou, že jde o výše zmiňovaný Taylorův rozvoj. Proto můžeme psát

$$E_{\mathrm{EM}} = \frac{A}{l_0}\left(1 - \frac{\Delta l}{l_0} + \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 - \dots\right)\,. \tag{3}$$

Zajíalo-li by nás přesné určení rovnovážné polohy, museli bychom vypočítat, pro jaké l platí, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}l = 0$. Vzhledem k malé elektromagnetické síle ve srovnání s mechanickou můžeme posunutí střední polohy zanedbat.

Než budeme moci postupovat dále je potřeba si ujasnit řádové velikosti výše používaných veličin. Uvažujme nyní pružinu s těmito parametry: tuhost pružiny $k \approx 10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, klidová délka $l_0 \approx 0{,}1\,\mathrm{m}$, počet závitů $N \approx 100$, poloměr pružiny $R \approx 0{,}01\,\mathrm{m}$, procházející proud $I \approx 1\,\mathrm{A}$ a uvažovaná výchylka $\Delta l = 0{,}01\,\mathrm{m}$. Pro tyto parametry vychází síla, vyvolaná pružinou při maximální výchylce $F_{\mathrm{p}} \approx 0{,}1\,\mathrm{N}$, síla vyvolaná proudem v pružině $F_{\mathrm{EM}_0} \approx 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$. Z toho plyne, že rovnovážná poloha pružiny se změní jen nepatrně. Proto lze při určování změny tuhosti pružiny použít rozvoj okolo l_0 a uvažovat kvadratický člen. S odvoláním na diskusi výše víme, že tuhost fiktivní pružinky je rovna dvojnásobku koeficientu a_2. Z rovnic (2) a (3) plyne

$$k_{\mathrm{celk}} = k + \frac{\mu_0 \pi R^2 N^2 I^2}{l_0^3}\,.$$

Pro výše uvedené hodnoty vychází $k_{\mathrm{celk}}/k - 1 \approx 4 \cdot 10^{-4}$. Změna tuhosti připojením zdroje proudu je překvapivě pouze o tři řády menší, než je mechanická tuhost uvažované pružiny. Znamená to tedy, že změna tuhosti je bez větších problémů měřitelná.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.mff.cuni.cz`