23. ročník, úloha III . E ... *kroky* *(8 bodů; průměr 5,45; řešilo 20 studentů)*

Postavte dlouhé domino a hurá do toho! Změřte rychlost padání pro známé rozměry kvádříků a proměnnou vzdálenost mezi nimi. Ustálí se vůbec rychlost?

Vzpomínka na pád Berlínské zdi.

Teorie

V následujícím textu načrtneme odvození exaktního vztahu pro rychlost šíření čela vlny, jak jej uvádí literatura. Zájemci o hlubší studium doporučujeme si článek přečíst; není ani příliš dlouhý, ani nějak zásadně náročný.

Předem ale zkusme použít intuici. Po šťouchnutí do první kostičky bude nejprve nějakou dobu trvat, než se rychlost šíření vlny ustálí. Předpokládejme tedy, že jsme již v ustálené situaci, kdy je rychlost padání konstantní, a zamysleme se, na čem všem tato rychlost závisí. Rozhodující roli hraje poměr výšky kostky a vzdáleností mezi nimi. Očekáváme, že čím je tato vzdálenost větší, tím bude rychlost menší, neboť padající kostička narazí do následující v nižší poloze a předá jí menší hybnost.

Abychom získali konkrétnější teoretickou představu o tom, jak hledaná závislost vypadá, potřebujeme nejprve úlohu formalizovat a zjednodušit. Označme d a h po řadě tloušťku a výšku jedné dominové kostičky a nechť m je její hmotnost. Předpokládejme, že jde o homogenní kvádr s těžištěm v geometrickém středu. Rovněž si dovolíme předpokládat, že kostky po podložce nekloužou, a tedy v úvahu stačí brát pouze rotační pohyb. Vzdálenost mezi kostičkami značme s a písmeno n použijme k označení jejich počtu.

Podívejme se nejprve na situaci po celém ději, kdy jsou již všechny kostky popadané. Z této polohy lze vyčíst úhly ϑ_i, které svírají kostky se svislým směrem. Zjevně $\vartheta_n = \pi/2$ a pro $i < n$ je možné z goniometrie situace vyjádřit ϑ_i jako funkci ϑ_n, což se hodí pro zpětnou rekonstrukci pohybu. Jelikož nás zajímá především experimentální řešení úlohy a protože tato fáze je velmi pracná, omezíme se pouze s tímto pozorováním a faktem, že předposlední domino je na konci pokusu v poloze $\vartheta_{n-1} = \operatorname{arctg}(s/d)$, kterou budeme pro zjednodušení situace považovat za shodnou pro všechny kvádříky.

Úhlovou rychlost rotace padajícího i-tého domina označme ω_i. Jejím přesným analytickým vyjádřením se zde zabývat nebudeme, neboť je lze nalézt v literatuře.

Zaměřme se nyní na energii padajících kostek. Jistě platí zákon zachování energie, který tudíž hojně využijeme. Na začátku má soustava potenciální energii $nmgh/2$, jejíž část (těžiště mají na konci děje nenulovou výšku nad povrchem podložky; v souladu s naší aproximaxí je to $h' = d(h+s)/2\sqrt{d^2 + h^2}$) se postupně proměňuje v energii rotační a nakonec se ztrácí v podobě tepla do okolního prostředí. Pro energii rotačního pohybu známe vztah

$$E_\mathrm{r} = \tfrac{1}{2} I\omega^2\,,$$

kde I je dobře známá konstanta – moment setrvačnosti

$$I = \tfrac{1}{3} m(h^2 + d^2)\,,$$

vzhledem k poloze osy rotace.

Nyní ještě uveďme, že doba pádu i-té kostičky se dá vypočítat jako integrál, známe-li průběh úhlové rychlosti a počáteční a koncovou polohu.

Z těchto všech údajů, které jsme zde pouze nastínili, lze odvodit asymptotickou rychlost (tj. pro $n \to \infty$ a po ustálení děje) šíření čela vlny

$$v = \sqrt{gh\left(\frac{3}{1+\frac{d^2}{h^2}}\right)}\,\frac{s+h}{h}\lim_{i\to\infty}\frac{1}{t_i}\,. \tag{1}$$

V této formulce vystupující proměnná t_i se odvolává na dobu pádu i-té kostičky z předchozího odstavce a počítá se jako bezrozměrná veličina.

Literatura

Náš text vychází z článku J. M. J. van Leeuwen, The Domino Effect, 2004, který lze volně stáhnout na adrese `http://www.ilorentz.org/~jmjvanl/domino.pdf`.

Experiment

Záhy se ukázalo, že doba pádu standardních 28 kostiček domina je velmi krátká a že bude nutné použít sofistikovanější metodu měření času nežli pouhé stopky. Vzhledem k faktu, že padající domino způsobuje hluk, rozhodli jsme se pro měření pomocí mikrofonu a software pro zpracování zvuku (konkrétně Audacity). Naše dominové kostičky měly hmotnost $m = (4{,}5 \pm 0{,}1)$ g a rozměry $h = (45 \pm 1)$ mm a $d = (21 \pm 1)$ mm. Postupně jsme je rozestavovali ve vzdálenostech odpovídajících násobkům jejich tloušťky, neboť tak šlo poměrně rychle a přesně i tak časově náročnou výstavbu provést.

Pro každou hodnotu s jsme provedli tři různá měření, jejichž výsledky jsou zaneseny v tabulce. Časové údaje jsou v milisekundách a znamenají, jak dlouho trval pád celého hada.

Tabulka výsledků měření

měření / s [mm]	7	14	21	28	35
celková vzdál. ns [mm]	385	574	763	952	1141
t_1 [ms]	840	790	1160	1854	2585
t_2 [ms]	790	827	1111	1649	2393
t_3 [ms]	655	889	1114	1630	2294
$\bar{t}$ [ms]	761	835	1128	1711	2424
$\sigma_{\bar{t}}$ [ms]	96	50	28	125	148
absolutní rychl. [m·s^{-1}]	$0{,}51 \pm 0{,}13$	$0{,}69 \pm 0{,}06$	$0{,}68 \pm 0{,}03$	$0{,}56 \pm 0{,}08$	$0{,}47 \pm 0{,}07$

Závěr

Z našich měření je evidentní, že se zvětšující se vzdáleností klesá rychlost šíření vlny, měříme-li ji relativně jako počet spadlých domin za jednotku času. Ovšem, uvědomíme-li si, že jednotlivé bloky jsou od sebe zároveň dál, situace tak jednoznačná není. Dokazuje to řádek „absolutní rychlost“ výsledné tabulky. Ten naznačuje, že maximální rychlost šíření se dosahuje při vzdálenosti mezi kostkami zhruba 14 mm. Tento náš závěr je ve shodě i s výsledky některých řešitelů.

Měli bychom ještě vystětlit, proč máme v měření tak velkou chybu. Především je třeba ji přičíst nepřesnostem při stavbě domina a hlavně při odečítání dat z Audacity. Během padání vznikaly různé ozvěny a dozvuky, a tudíž ne vždy se podařilo naměřit „čistou“ dobu padání.

Tomáš Jirotka
byrot@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.