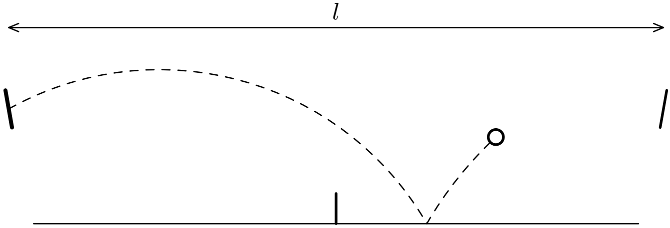
23. ročník, úloha III . 4 ... *pane Wurfl, ale na Měsíci* *(4 body; průměr 3,38; řešilo 8 studentů)*

Pana Broučka při měsíční příhodě pronásledovala Etherea, kterou lze připodobnit hmotnému bodu. Pan Brouček ale, potom co si objednal vepřové se zelím, se jí zbavil tím, že ji uvěznil mezi dvěma pevně uchopenými pálkami ve vzdálenosti l, které jsou každá natočena o nějaký úhel, a Etherea mezi nimi skákala jako pingpongový míč tak, že se odrazila vždy ve stejné výšce. Aby ji potrápil strachem, vložil doprostřed síť výšky h. Pan Brouček je důmyslný šibal, a tak chtěl, aby (stejně jako v ping-pongu) na každé polovině spadla aspoň jednou na zem. Vypočtěte, s jakou frekvencí v závislosti na všemožných parametrech (natočení pálek, počáteční rychlost míčku, úhel,...) Etherea létá, a kdy je tato frekvence nejvyšší. Předpokládejte, že pohyb je rovinný a při odrazu od překážky (od Měsíce nebo od pálky) se akorát mění rychlost na opačnou; celý pohyb probíhá ve vakuu.

Lukáš cestou na schůzku rád hraje ping-pong.



Modifikovaný ping-pong

Při řešení úlohy využijeme převážně symetrií úlohy a dále zákonů zachování.

Jak ze zadání víme, Etherea se odráží vždy ve stejné výšce. Dále víme, že při odrazu na zemi se nemění vodorovná složka rychlosti. Z první podmínky použitím zákona zachování energie vidíme, že velikost rychlosti je stejná pro každý odraz. Z druhé, víme-li, že se nemění celková velikost rychlosti při odrazu, plyne, že se nemění ani velikost svislé složky rychlosti.

Z této úvahy plyne, že během jednoho přeletu se zachovávají velikosti vodorovné i svislé složky rychlosti.

Studujme nyní pohyb Etherey geometricky. Pohybuje se mezi pálkami po parabole, resp. dvou shodných parabolách vzájemně posunutých.

Pokud by Etherea začínala svůj pohyb směrem dolů a dopadla až za síťkou, tak by vzdálenost průsečíku paraboly s osou x od x-ové souřadnice vrcholu byla větší než $l/2$, potom by ale již nestihla vystoupit do dostatečné výšky pro odraz od druhé pálky.

Etherea se musí tedy začít pohybovat vzhůru. Pokud by však k druhé pálce přiletěla shora, znamenalo by to, že se Etherea odrazila v polovině „stolu“, kde je síťka.

Nyní již víme: Etherea začíná svůj pohyb směrem vzhůru, k pálce přilétá zdola, velikosti vodorovné i svislé složky se během letu nemění.

Z obrázku v zadání je vidět, že část trajektorie „po odrazu od země“ a „před odrazem od pálky“ jsou shodné. Označíme-li dobu letu zleva doprava T, v_{x0}, v_{y0} velikost vodorovné, resp. svislé složky rychlosti v okamžiku odrazu od stolu, g velikost gravitačního zrychlení na povrchu měsíce a E celkovou energii Etherey platí

$$v_{x0} = \frac{l}{T}\,, \tag{1}$$

$$v_{y0} = g\frac{T}{2}\,, \tag{2}$$

$$\frac{2E}{m} = v_{x0}^2 + v_{y0}^2 = \frac{1}{4}g^2T^2 + l^2T^{-2}\,. \tag{3}$$

Nezávislými parametry úlohy jsou l, E, m a g. Zavedeme nyní redukovanou energii $\widetilde{E} = E/\left(mg^2\right)$ a redukovanou délku $\widetilde{l} = 2l/g$. Dobu pohybu T můžeme vyjádřit úpravou rovnice (3) jako

$$T_{1,2} = \sqrt{\widetilde{E} \pm \sqrt{\widetilde{E}^2 - \widetilde{l}^2}}\,,$$

jak je vidět, pro jednu počáteční rychlost existují i dvě trajektorie mezi pálkami splňující zadání. Počáteční energie také musí splňovat podmínku $\widetilde{E} > \widetilde{l}$, jinak by došlo k více než jednomu odrazu od měšíse, a to my nechceme.

Etherea se může pohybovat po libovolné (první, nebo druhé) trajektorii tam a po libovolné zpět. Z této volby plynou také úhly natočení pálek. Zajímá-li nás maximální frekvence pohybu musí pohyb probíhat stejný čas tam i zpět (pokud pro rychlejší trajektorii přeskočí Etherea síťku cestou tam, zdolá ji i cestou zpět).

Pro toto nastavení se nemění velikost vodorovné složky rychlosti a svislá složka se změní na opačnou, a tedy pálky musí být nastaveny svisle.

Aby byla frekvence pinkání co nejvyšší, musíme maximalizovat vodorovnou složku rychlosti v_{x0}. Čím bude vyšší vodorovná složka rychlosti, tím musí být podle vztahů (1) a (2) menší výška, do které se Etherea během pohybu dostane. Možná trajektorie je však díky síťce omezená ze spodu. Proto by měla Etherea, aby byla co nejvyděšenější, při svém pohybu míjet síťku co nejblíže.

Uvažujme nyní situaci na obrázku, pálka je ve výšce p nad stolem. Pro trajektorii mezi minutím síťky a dopadem na stůl platí první výraz níže. Studujeme-li trajekrorii mezi odrazem od země a dopadem na pálku platí druhý výraz níže. Vzdálenost mezi síťkou a místem dopadu značíme x, proto platí, že vzdálenost mezi bodem dopadu a koncem stolu je $l/2 - x$. Za výraz $v_{x0}v_{y0}$ dosazujeme z (1) a (2).

$$hv_{x0}^2 = \frac{gl}{2}x - \frac{g}{2}x^2\,,$$

$$pv_{x0}^2 = \frac{gl}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2\,.$$

Odečtením těchto dvou rovnic od sebe, následným vyjádřením x a dosazením do první z nich, použitím $f = v_{x0}/(2l)$, dostáváme pro periodu pohybu Etherey

$$f_{\max} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{2}\left(\frac{(h+p) + 2\sqrt{h^2 - hp + p^2}}{(h-p)^2}\right)}\,.$$

Pokud se však budeme ptát na nejvyšší možnou frekvenci, ideální trajektorií je parabola, která protíná osu x na okrajích stolu a vrchol je totožný s horním okrajem síťky.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.