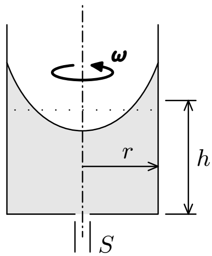
23. ročník, úloha I.4 ... *vypouštění odstředivky* *(4 body; průměr 2,69; řešilo 35 studentů)*

Máme dostatečně vysokou válcovou nádobu s vodou (poloměr r, výška hladiny vody h) a roztočíme ji úhlovou rychlostí ω. Do středu dna uděláme malou dírku plochy S, přičemž nádoba stále rotuje. Kolik vody z nádoby vyteče ven? *Archivní víno.*



Rotující odstředivka

Nejprve odvodíme, jaký tvar bude mít hladina vody v roztočené odstředivce a následně tento poznatek využijeme pro výpočet objemu vyteklé vody.

Předpokládejme, že odstředivka se točí již dostatečně dlouho a vnitřní tření v kapalině už rozpohybovalo všechnu vodu v odstředivce tak, že voda se v odstředivce točí všude stejnou úhlovou rychlostí ω a my tak můžeme snadněji problém řešit v neinerciální vztažné soustavě spojené s odstředivkou.

Hladina kapaliny zaujme v silovém poli tvar ekvipotenciální plochy. V našem případě musíme počítat se dvěma potenciály – tíhovým a odstředivým. Tíhový potenciál je dán vztahem

$$\varphi_G(z) = gz\,,$$

kde z je svislá vzdálenost ode dna nádoby. Odstředivý potenciál vypočítáme přes práci potřebnou na přemístění od osy otáčení do vzdálenosti ϱ, přičemž tuto práci vztahuji na jednotku hmotnosti

$$\varphi_O(\varrho) = -\frac{1}{m}\int_0^{\varrho} m\omega^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\omega^2\varrho^2\,.$$

Výsledný potenciál získáme superpozicí odstředivého a tíhového potenciálu

$$\varphi(z,\varrho) = gz - \tfrac{1}{2}\omega^2\varrho^2\,.$$

Vidíme, že potenciál je symetrický podle osy otáčení, a tak se stačí zabývat tvarem hladiny jen v rovině kolmé na dno a určené osou otáčení.

Pro oblast konstantního potenciálu platí

$$\varphi(z,\varrho) = gz - \tfrac{1}{2}\omega^2\varrho^2 = \varphi_h = \mathrm{konst}\,, \tag{1}$$

kde φ_h je hodnota potenciálu daná množstvím vody v odstředivce.

Z rovnice (1) můžeme snadno odvodit, jakým způsobem závisí výška hladiny na vzdálenosti od osy odstředivky

$$z(\varrho) = K + \frac{\omega^2\varrho^2}{2g}\,,$$

kde $K = \varphi_h/g$. Hladina tedy bude mít tvar rotačního paraboloidu.[1]

Předpokládejme, že otvor ve dně má kruhový tvar a jeho poloměr označme $r_0 = \sqrt{S/\pi}$. Objem vody V_R, která v odstředivce zůstane, bude stejný jako objem doplňku paraboloidu

[1] Uvedný vztah pro $z(\varrho)$ platí jen pro oblast, kde $K + \omega^2\varrho^2/2g$ je nezáporné, což může mít vliv na množství vyteklé vody, jak je řečeno v závěru.

zespodu „uříznutého" na poloměr r_0. Tento objem vypočítáme určitým integrálem jako součet nekonečně mnoha válcových vrstev o tloušťce $\mathrm{d}\varrho$

$$V_R = \int_{r_0}^{r} \left(z\left(\varrho\right) - z\left(r_0\right)\right) 2\pi\varrho\,\mathrm{d}\varrho = \int_{r_0}^{r} \left(\frac{\omega^2}{2g}\varrho^2 - \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}\right) 2\pi\varrho\,\mathrm{d}\varrho =$$
$$= \pi\frac{\omega^2}{g}\left[\frac{\varrho^4}{4} - \frac{r_0^2\varrho^2}{2}\right]_{r_0}^{r} = \frac{\pi}{4}\frac{\omega^2}{g}\left(r^2 - r_0^2\right)^2 .$$

Objem V' vody, která vyteče je rozdíl objemu zbylé vody V_R a původního objemu

$$V' = V - V_R = \pi r^2 h - \frac{\pi}{4}\frac{\omega^2}{g}\left(r^2 - \frac{S}{\pi}\right)^2 .$$

Je jasné, že objem vyteklé vody musí být nezáporný. Proto musíme ještě zjistit, kdy platí $V' \geq 0$. Snadno ověříme, že tato podmínka je splněna, platí-li

$$\omega^2 \leq \frac{4gr^2h}{\left(r^2 - \frac{S}{\pi}\right)^2} .$$

Jak tento výsledek interpretovat? Jestliže se bude odstředivka točit dostatečně rychle, tak se na dně udělá suché „kolečko", a pokud poloměr této oblasti bude větší než poloměr výtokového otvoru, žádná voda nevyteče.

Co se děje s momentem hybnosti?

Sledujeme-li odstředivku v inerciální vztažné soustavě, rotující tekutina má nějaký moment hybnosti a s odtékající tekutinou z nádoby „odtéká" i moment hybnosti.

Výše uvedené řešení předpokládalo, že odteklý moment hybnosti je právě takový, aby se zachovávala stále stejná úhlová rychlost rotující tekutiny[2]. Pokud vyjdeme z odlišného předpokladu, sice že otvor je tak malý, aby odtékající voda neodnášela žádný moment hybnosti, dojdeme k poněkud odlišnému výsledku. Označme po řadě ω a ω' úhlovou rychlost rotace vody v „zašpuntované" a vypuštěné odstředivce. Dále označme po řadě I a I' moment setrvačnosti rotující vody v „zašpuntované" a ve vypuštěné odstředivce.

Moment setrvačnosti v plné odstředivce vypočítáme jako součet příspěvků[3] všech elementárních vrstev tloušťky $\mathrm{d}x$

$$I = \int_0^r 2\pi\varrho x z(x) x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^r 2\pi\varrho x^3\left(z_0 + \frac{\omega^2 x^2}{2g}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\pi\varrho r^6\frac{\omega^2}{2g} + \frac{1}{2}\pi\varrho z_0 r^4 .$$

Podobně vypočítáme i moment setrvanosti ve vypuštěné odstředivce

$$I' = \frac{1}{3}\pi\varrho r^6\frac{\omega'^2}{2g} .$$

---

[2] Tento předpoklad by ve skutečnosti platil jen pro výtokový „otvor" přes celé dno. Pro obecně velký otvor je výpočet množství vyteklé vody analyticky nezvládnutelný.

[3] Výška nejnižšího bodu hladiny při plné odstředivce je $z_0 = h - \omega^2 r^2/4g$.

Využijeme-li nyní zákon zachování momentu hybnosti uvnitř odstředivky $I'\omega' = I\omega$, získáme pro výslednou úhlovou rychlost rotace vody vztah

$$\omega' = \sqrt[3]{\omega^3 + \frac{3z_0 g\omega}{r^2}}\,.$$

S tímto již není problém vypočítat nový tvar hladiny a určit pro něj objem vyteklé vody

$$V' = \pi r^2 h - \frac{\pi r^4}{g}\left(\omega^3 + \frac{3z_0 g\omega}{r^2}\right)^{2/3}\,.$$

Michal Koutný
`xm.koutny@seznam.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.