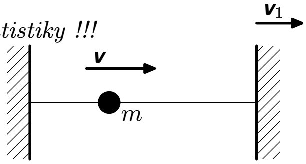
23. ročník, úloha I . 3 ... *adiabatický invariant !!! chybí statistiky !!!*



Míček mezi stěnami

Mezi dvěma zarážkami se po přímce rovnoměrně pohybuje hmotný bod o hmotnosti m rychlostí v. Jednu ze zarážek začneme oddalovat rychlostí $v_1 \ll v$. Jak se změní energie hmotného bodu?

Na „Zajímavé teoretické fyzice“ blouznila Janap.

Přidržíme se následujícího značení: L, L_0 jsou po řadě aktuální a počáteční vzdálenost zarážek a v, v_0 aktuální a počáteční rychlost hmotného bodu.

Podívejme se na situaci v soustavě spojené s jedoucí zarážkou. Z pohledu jedoucí zarážky se hmotný bod (kulička) přibližuje rychlostí $v' = v - v_1$. Stejnou rychlostí kulička letí i po odrazu (vzhledem k zarážce), jde-li o pružný ráz. Výsledná rychlost v_f po odrazu na jedoucí stěně v „nehybné“ soustavě je proto

$$v_\mathrm{f} = v - 2v_1\,. \tag{1}$$

Každým odrazem na jedoucí stěně se rychlost kuličky zmenší o $2v_1$. Doba mezi dvěma odrazy na jedoucí stěně se ovšem zvyšuje se vzrůstajícím L. Ubývání rychlosti kuličky je tedy postupem času čím dál pozvolnější.

Pokusme se získat vztah mezi rychlostí kuličky v a vzdáleností zarážek L. Počet nárazů N kuličky na jedoucí zarážku během posunutí zarážky o malý kousek $\mathrm{d}L$ lze vyjádřit

$$N = \frac{\mathrm{d}L/v_1}{2L/v}\,, \tag{2}$$

přičemž čitatel vyjadřuje dobu potřebnou k posunutí zarážky o $\mathrm{d}L$ a jmenovatel dobu mezi nárazy kuličky o jedoucí stěnu. Malá ztráta rychlosti $\mathrm{d}v$ během posunutí zarážky o $\mathrm{d}L$ je tudíž dle (1) a (2)

$$\mathrm{d}v = -2Nv_1 = -\frac{v\,\mathrm{d}L}{L}\,. \tag{3}$$

Poslední rovici upravíme do tvaru

$$L\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}L = 0\,. \tag{4}$$

Nyní si všimneme, že $L\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}L = \mathrm{d}(vL)$; to jsme jen vyjádřili, jak se změní hodnota výrazu vL, pokud v a L změníme o malé kousky $\mathrm{d}v$ a $\mathrm{d}L$. Na základě toho přepíšeme (4) jako

$$\mathrm{d}(vL) = 0\,. \tag{5}$$

Co to znamená? Změna hodnoty výrazu vL je nulová a součin vL se tedy během pohybu nemění! Jinými slovy, součin vL je v daném případě invariant a lze psát $vL = v_0L_0 = \mathrm{konst.}$ Umocněním na druhou dostaneme podobný vztah pro kinetickou energii kuličky E_k, a sice

$$v^2L^2 = \mathrm{konst} \qquad \Rightarrow \qquad E_\mathrm{k}L^2 = \mathrm{konst}\,. \tag{6}$$

Řešení je správné pouze v případě, že mezi dvěma nárazy kuličky je relativní změna L jen nepatrná, což však zajišťuje předpoklad $v \gg v_1$.

Slovo adiabatický v nás zpravidla vyvolává vzpomínku na termodynamiku. A skutečně, zadaný příklad představuje jakýsi primitivní model adiabatického rozpínání jednorozměrného plynu. Sledujme určité analogie. Vzdálenost L je analogie k objemu nádoby V. Kinetická energie E_k, případně v^2, je analogie teploty plynu T. Tlak plynu p je analogický výrazu v^2/L.[1]

[1] Teplota T je úměrná střední kinetické energii částic z definice. Tlak je tím větší, čím rychleji, ale také čím častěji částice narážejí na stěnu, přičemž „častost“ nárazů je úměrná v/L.

Rychlost kuličky se s rostoucím L zmenšuje, analogicky k tomu plyn chladne při adiabatické expanzi s roztoucím objemem V. Naopak izotermický děj by v případě naší kuličky znamenal stále stejnou rychlost v, což by vyžadovalo„postrkování“ kuličky na stěnách (v podstatě ohřívání, přenos tepla). Ztráta rychlosti částic na pohybujícím se pístu je právě příčinou chladnutí plynu při adiabatické expanzi.

Vztah (6) nám jistě svým tvarem připomíná známou rovnici rovnovážné adiabaty ideálního plynu $pV^{\varkappa} =$ konst. Z termodynamických úvah lze pro exponent odvodit vztah $\varkappa = (s+2)/s$, kde s je počet stupňů volnosti molekuly plynu. Pro jednoatomový plyn omezený na jeden rozměr máme $s = 1$ a tedy $\varkappa = 3$. Přesně to samé ovšem plyne z (6), uvědomíme-li si analogii tlaku s výrazem v^2/L.

Poznámky k došlým řešením

Úvaha, že se kulička při každém odrazu zpomalí o konstantu a následný závěr, že k nárazům bude docházet čím dál méně často, byly zpravidla hodnoceny dvěma body. Většina z Vás se již nedostala k explicitnímu vyjádření závislosti v na L nebo t. Cenné bylo rovněž všimnout si analogie s rozpínáním plynu. Nejlepší řešení poslal *Jakub Vošmera*.

Marek Scholz
`mara@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.