23. ročník, úloha I . 2 ... *lano na klínech* *!!! chybí statistiky !!!*

Na dvou klínech (viz obrázek) je položeno lano tak, že se uprostřed nedotýká podložky. Situace je osově souměrná. Vypočítejte, jaká jeho maximální část může takto viset ve statické rovnováze. Bonus: pro jaký úhel nakloněných rovin je tento poměr největší?

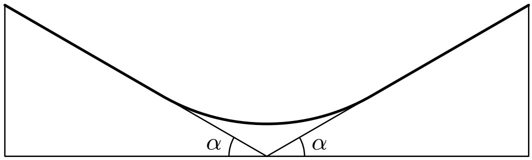

Schéma symetrické situace

S nití si rád hraje Aleš.

Lano můžeme rozdělit na tři části. Dvě, které leží na klínech a třetí, která visí ve vzduchu. Ze symetrie je zřejmé, že části na klínech mají stejnou délku. Jejich hmotnosti označíme m_1. Hmotnost visící části pak m_2. Aby bylo lano ve statické rovnováze, celková síla působící na libovolnou část musí být nulová. Díky symetrii úlohy se můžeme soustředit jen na jednu ležící část. Působí na ni síla gravitační F_g, síla třecí F_f a napětí mezi m_2 a m_1 (označme jej T).

Víme, že síla třecí je přímo úměrná normálové síle působící na m_1. Rozložme tedy gravitační sílu na složku normálovou a složku paralelní k nakloněné rovině. Velikosti těchto složek jsou $m_1 g\cos\alpha$ a $m_1 g\sin\alpha$. Koeficient úměrnosti mezi normálovou složkou gravitační síly a silou třecí označme f. Podmínka $\sum F = 0$ pro část m_1 je tedy

$$T + m_1 g\sin\alpha - m_1 g f\cos\alpha = 0\,. \tag{1}$$

Napětí T určíme z podmínky statické rovnováhy pro část m_2. Stejným napětím T působí na m_2 jak ležící část nalevo tak i napravo. Směr tohoto napětí je vždy paralelní s nakloněnou rovinou. Pro složku y celkové síly působící na m_2 tudíž platí

$$2T\sin\alpha - m_2 g = 0\,.$$

Vyjádřením a dosazením T do (1) dostáváme

$$m_1 g\sin\alpha + \frac{m_2 g}{2\sin\alpha} - m_1 g f\cos\alpha = 0\,,$$

neboli

$$\frac{m_2}{m_1} = f\sin 2\alpha - 2\sin^2\alpha\,.$$

Frakci lana, která visí ve vzduchu dostaneme za pomoci jednoduché algebry.

$$\frac{m_2}{2m_1 + m_2} = \frac{f\sin 2\alpha - 2\sin^2\alpha}{2 + f\sin 2\alpha - 2\sin^2\alpha}\,.$$

Pokud nás zajímá úhel, kdy bude tento poměr největší, stačí nám položit derivaci m_2/m_1 nule.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{m_2}{m_1}\right) = 2f\cos 2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha = 2f\cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha = 0$$

Je zřejmé, že naše řešení by se mělo nacházet v intervalu $(0, \pi/2)$. Po lehké úpravě nalézáme řešení

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} f \,,$$

které zcela jistě do daného intervalu náleží. Z vlastností funkce arctg dokonce vidíme, že pro všechna f $\alpha \in (0, \pi/4)$.

Pomocí druhé derivace se ujistíme, že v daném bodě máme opravdu maximum.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\left(\frac{m_2}{m_1}\right) = -2f \sin 2\alpha - 4cos2\alpha \,.$$

Na intervalu $(0, \pi/4)$ je tato funkce zcela jistě záporná a tudíž, pro všechna f je frakce maximální opravdu pro nalezené α.

Jan Humplík
`honza@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.