

Milí řešitelé!

Dostáváte do rukou autorská řešení první série úloh společně se svými opravenými úlohami. Ve vzorových řešeních se nejen dozvíte, jak mělo vypadat řešení správné, ale i jaké jste dělali nejčastěji chyby apod. S jakýmkoliv dotazy či nesrovnalostmi se můžete obrátit na opravovatele úloh, jejichž e-maily jsou uvedeny pod příslušným vzorovým řešením.

Na konci brožury najdete výsledkovou listinu po jednotlivých ročnících. U Studenta Pilného je napsán plný počet bodů za příslušné úlohy. Pokud jste dostali bodů více než on, znamená to, že se vaše řešení opravovatelům líbilo natolik, že vám udělil prémii. Ve sloupci označeném „I“ je uveden součet bodů za první sérii, ve sloupci „%“ procentuální zisk z úloh, které jste letos poslali. A ve sloupci posledním je uveden celkový počet bodů získaný za aktuální ročník.

Dále bychom chtěli požádat ty, kteří nám letos ještě **neposlali řešení žádné úlohy, a přesto chtějí dále dostávat nová zadání a vzorová řešení**, aby nám napsali dopis či mail. Pokud tak neučiní, další poštu již od nás letos dostávat nebudou.

Vaši organizátoři



Zadání III. série



Termín odeslání: 25. ledna 2010

Úloha III. 1 ... na setkání nejsme k rozeznání

Jak nejdále od sebe mohou být dva lidé, aby je nikdo třetí na Zemi nerozeznal, kdykoliv jsou viditelní? Nezapomeňte, že lidé jsou bodové světelné zdroje ve výšce 2 m a Země je koule.

Úloha III. 2 ... hlučný dav kol mého prahu

Uvažujte dvoukřídlé dveře do budovy, mezi nimiž je i v zavřeném poloze mezírka, kterou může proudit vzduch. Každé křídlo má pružinu, která ho vrací do výchozí zavřené polohy. Jedno křídlo vychýlíme a pustíme z klidu. Co se bude dít, třeba s druhým křídlem?

Pokud si nejste úplně jisti, nejdřív si to vyzkoušejte (Ke Karlovu 5, Právnická fakulta, Praha, ...).

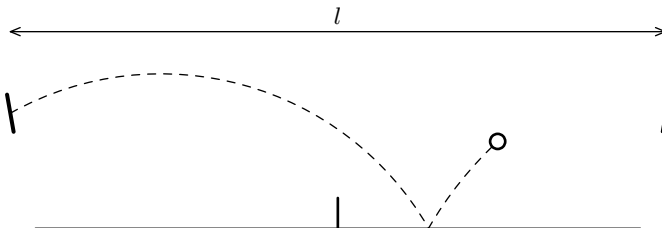
Úloha III. 3 ... Hospodine, pomiluj ny!

Jak roste hlasitost (definujte si sami) sboru s počtem jeho členů? Co z toho plyne? Členy sboru uvažujte jako bodové zdroje zvuku stejné amplitudy a frekvence, ale posunuté o náhodnou fázi. Všichni bodoví zpěváci se nacházejí v jednom místě.

Úloha III. 4 ... pane Wurfl, ale na Měsíci

Pana Broučka při měsíční příhodě pronásledovala Etherea, kterou lze připodobnit hmotnému bodu. Pan Brouček ale, potom co si objednal vepřové se zelím, se jí zbavil tím, že ji uvěznil mezi dvěma pevně uchopenými pálkami ve vzdálenosti l , které jsou každá natočena o nějaký úhel, a Etherea mezi nimi skákala jako pingpongový míč tak, že se odrazila vždy ve stejné výšce. Aby ji potrápil strachem, vložil doprostřed síť výšky h . Pan Brouček je důmyslný šibal, a tak chtěl, aby (stejně jako v ping-pongu) na každé polovině spadla aspoň jednou na zem. Vypočtete, s jakou frekvencí v závislosti na všemožných parametrech (natočení pálek,

počáteční rychlost míčku, úhel, ...) Ethera létá, a kdy je tato frekvence nejvyšší. Předpokládejte, že pohyb je rovinný a při odrazu od překážky (od Měsíce nebo od pátky) se akorát mění rychlost na opačnou; celý pohyb probíhá ve vakuu.



Modifikovaný ping-pong

Úloha III.P ... aljeja, nití! Jsou shnilé

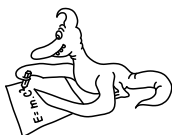
Zkoumejte dvojitý uzel, kterým jsou spojena dvě vlákna o poloměru r a součiniteli klidového tření f . Jakou silou musíme tahat za konce vláken, aby se uzel „proklouzl“? Dosadíte typické hodnoty pro nitky a zjistíte, zda se přitom nepřetrhne vlákno.



Uvažovaný uzel

Úloha III.E ... kroky

Postavte dlouhé domino a hurá do toho! Změřte rychlost padání pro známé rozměry kvádrů a proměnnou vzdálenost mezi nimi. Ustálí se vůbec rychlost?



Řešení I. série

Úloha I.1 ... skrolování v metru (3 body; průměr 1,74; řešilo 19 studentů)

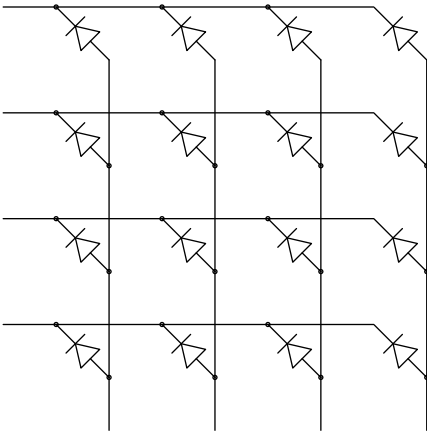
Informační systém v pražském metru má jednu zajímavou vlastnost. Při skrolování textu směrem doleva se písmo nakloní. Jak je možno jednoduchým způsobem „hardwarově“ docílit tohoto efektu a jaký vliv má tato úprava pro text, který skroluje vertikálně? Poznamenejme, že světelný panel se skládá z LED diod rozmístěných v pravouhlém rastru.

Ze tmy tunelu přitáhl Byrot.

Nejprve se podívejme „dovnitř“ displeje. Kdyby každá dioda měla své vodiče, byla by výroba světelného panelu příliš nákladná, proto se používá jiné zapojení. Anody diod jsou připojeny na řádky a katody na sloupce (viz obrázek). Přivedením napětí na určitý řádek a sloupec se rozsvítí příslušná dioda.

Světelný panel nesvítí najednou celý, ale obnovuje se buď po řádcích, nebo po sloupcích (dále uvažujme že po řádcích). Díky setrvačnosti lidského oka (po zániku fyzikálního podnětu doznívá vjem ještě $1/7$ až $1/3$ sekundy) se nám zdá, že svítí celý panel najednou. Aby oko vnímalo pohyb jako přirozeně spojitý, je třeba mu nabídnout 50 obrázků za sekundu. Celý panel se tedy musí obnovit jednou za 20 ms.

Sklon písma závisí na směru pohybu a na tom, zdali se řádky obnovují shora, nebo zdola. Představte si písmeno „I“ skrolující doleva. Začínáme se statickým „I“. Pak se začne vykreslovat kousek vedle, ovšem naše oko ho ze setrvačnosti vidí stále na stejném místě spolu s nově vykreslenými pixely. Zdá se být nakloněné doleva (oko stále vnímá poslední obnovené řádky zpožděné, ale zároveň už i ty nově obnovené, posunuté doleva). Z estetických důvodů je ovšem lepší mít písmo skloněné na druhou stranu, jako je to *obvyklé*. Proto je lepší obnovovat řádky odspodu.



Obr. 1. Schéma obvodu

Při vertikálním skrolování směrem dolů se projeví nepatrné protáhnutí písmen oproti normálu (stále ještě vnímáme naposledy obnovené horní řádky, ale už svítí i ty nově obnovené, o pixel posunuté dolů).

Při vertikálním skrolování směrem dolů se projeví nepatrné protáhnutí písmen oproti normálu (stále ještě vnímáme naposledy obnovené horní řádky, ale už svítí i ty nově obnovené, o pixel posunuté dolů).

Tereza Zábajková
terka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. 2 ... lano na klínech (3 body; průměr 2,88; řešilo 26 studentů)

Na dvou klínech (viz obrázek) je položeno lano tak, že se uprostřed nedotýká podložky. Situace je osově souměrná. Vypočítejte, jaká jeho maximální část může takto viset ve statické rovnováze. Bonus: pro jaký úhel nakloněných rovin je tento poměr největší?

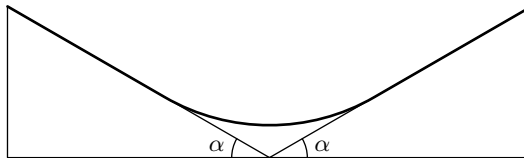


Schéma symetrické situace

S nití si rád hraje Aleš.

Lano můžeme rozdělit na tři části. Dvě, které leží na klínech a třetí, která visí ve vzduchu. Ze symetrie je zřejmé, že části na klínech mají stejnou délku. Jejich hmotnosti označíme m_1 . Hmotnost visící části pak m_2 . Aby bylo lano ve statické rovnováze, výslednice sil působících na libovolnou část musí být nulová. Díky symetrii úlohy se můžeme soustředit jen na jednu ležící část. Působí na ni síla gravitační F_g , síla třecí F_f a napětí mezi m_2 a m_1 (označme jej T).

Víme, že síla třecí je přímo úměrná normálové síle působící na m_1 . Rozložme tedy gravitační sílu na složku normálovou a složku paralelní k nakloněné rovině. Velikosti těchto složek jsou $m_1 g \cos \alpha$ a $m_1 g \sin \alpha$. Koeficient úměrnosti mezi normálovou složkou gravitační síly a silou třecí označme f . Podmínka $\sum F = 0$ pro část m_1 je tedy

$$T + m_1 g \sin \alpha - m_1 g f \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Napětí T určíme z podmínky statické rovnováhy pro část m_2 . Stejným napětím T působí na m_2 jak ležící část nalevo tak i napravo. Směr tohoto napětí je vždy paralelní s nakloněnou

rovinou. Pro složku y celkové síly působící na m_2 tudíž platí

$$2T \sin \alpha - m_2 g = 0.$$

Vyjádřením a dosazením T do (1) dostáváme

$$m_1 g \sin \alpha + \frac{m_2 g}{2 \sin \alpha} - m_1 g f \cos \alpha = 0,$$

neboli

$$\frac{m_2}{m_1} = f \sin 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha.$$

Frakci lana, která visí ve vzduchu dostaneme za pomoci jednoduché algebry.

$$\frac{m_2}{2m_1 + m_2} = \frac{f \sin 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha}{2 + f \sin 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha}.$$

Pokud nás zajímá úhel, kdy bude tento poměr největší, stačí nám položit derivaci m_2/m_1 nule.

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{m_2}{m_1} \right) = 2f \cos 2\alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha = 2f \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha = 0$$

Je zřejmé, že naše řešení by se mělo nacházet v intervalu $(0, \pi/2)$. Po lehké úpravě nalézáme řešení

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} f,$$

které zcela jistě do daného intervalu náleží. Z vlastností funkce arctg dokonce vidíme, že pro všechna $f > 0$ platí $\alpha \in (0, \pi/4)$.

Pomocí druhé derivace se ujistíme, že v daném bodě máme opravdu maximum.

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{m_2}{m_1} \right) = -4f \sin 2\alpha - 4 \cos 2\alpha.$$

Na intervalu $(0, \pi/4)$ je tato funkce zcela jistě záporná a tudíž, pro všechna f je frakce maximální opravdu pro nalezené α .

Jan Humplík

honza@fykos.mff.cuni.cz

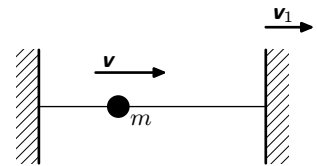
Úloha I.3 ... *adiabatický invariant* (4 body; průměr 2,03; řešilo 30 studentů)

Mezi dvěma zarážkami se po přímce rovnoměrně pohybuje hmotný bod o hmotnosti m rychlostí v . Jednu ze zarážek začneme oddalovat rychlostí $v_1 \ll v$. Jak se změní energie hmotného bodu?

Na „Zajímavé teoretické fyzice“ blouznila Janap.

Přidržíme se následujícího značení: L , L_0 jsou po řadě aktuální a počáteční vzdálenost zarážek a v , v_0 aktuální a počáteční rychlost hmotného bodu.

Podívejme se na situaci v soustavě spojené s jedoucí zarážkou. Z pohledu jedoucí zarážky se hmotný bod (kulička) přibližuje rychlostí $v' = v - v_1$. Stejnou rychlostí kulička letí i po



Míček mezi stěny

odrazu (vzhledem k zarážce), jde-li o pružný ráz. Výsledná rychlost v_f po odrazu na jedoucí stěně v „nehybné“ soustavě je proto

$$v_f = v - 2v_1. \quad (2)$$

Každým odrazem na jedoucí stěně se rychlost kuličky zmenší o $2v_1$. Doba mezi dvěma odrazy na jedoucí stěně se ovšem zvyšuje se vzrůstajícím L . Ubývání rychlosti kuličky je tedy postupem času čím dál pozvolnější.

Pokusme se získat vztah mezi rychlostí kuličky v a vzdáleností zarážek L . Počet nárazů N kuličky na jedoucí zarážku během posunutí zarážky o malý kousek dL lze vyjádřit

$$N = \frac{dL/v_1}{2L/v}, \quad (3)$$

příčemž čítec vyjadřuje dobu potřebnou k posunutí zarážky o dL a jmenovatel dobu mezi nárazy kuličky o jedoucí stěnu. Malá ztráta rychlosti dv během posunutí zarážky o dL je tudíž dle (2) a (3)

$$dv = -2Nv_1 = -\frac{v dL}{L}. \quad (4)$$

Poslední rovnici upravíme do tvaru

$$L dv + v dL = 0. \quad (5)$$

Nyní si všimneme, že $L dv + v dL = d(vL)$; to jsme jen vyjádřili, jak se změní hodnota výrazu vL , pokud v a L změněme o malé kousky dv a dL . Na základě toho přepíšeme (5) jako

$$d(vL) = 0. \quad (6)$$

Co to znamená? Změna hodnoty výrazu vL je nulová a součin vL se tedy během pohybu nemění! Jinými slovy, součin vL je v daném případě invariant a lze psát $vL = v_0L_0 = \text{konst}$. Umocněním na druhou dostaneme podobný vztah pro kinetickou energii kuličky E_k , a sice

$$v^2 L^2 = \text{konst} \quad \Rightarrow \quad E_k L^2 = \text{konst}. \quad (7)$$

Řešení je správné pouze v případě, že mezi dvěma nárazy kuličky je relativní změna L jen nepatrná, což však zajišťuje předpoklad $v \gg v_1$.

Slovo adiabatický v nás zpravidla vyvolává vzpomínku na termodynamiku. A skutečně, zadaný příklad představuje jakýsi primitivní model adiabatického rozpínání jednorozměrného plynu. Sledujme určité analogie. Vzdálenost L je analogie k objemu nádoby V . Kinetická energie E_k , případně v^2 , je analogie teploty plynu T . Tlak plynu p je analogický výrazu v^2/L .¹ Rychlost kuličky se s rostoucím L zmenšuje, analogicky k tomu plyn chladne při adiabatické expanzi s rostoucím objemem V . Naopak izotermický děj by v případě naší kuličky znamenal stále stejnou rychlost v , což by vyžadovalo „postrkování“ kuličky na stěnách (v podstatě ohřívání, přenos tepla). Ztráta rychlosti částic na pohybujícím se pístu je právě příčinou chladnutí plynu při adiabatické expanzi.

¹) Teplota T je úměrná střední kinetické energii částic z definice. Tlak je tím větší, čím rychleji, ale také čím častěji částice narážejí na stěnu, přičemž četnost nárazů je úměrná v/L .

Vztah (7) nám jistě svým tvarem připomíná známou rovnici rovnovážné adiabaty ideálního plynu $pV^\kappa = \text{konst.}$ Z termodynamických úvah lze pro exponent odvodit vztah $\kappa = (s + 2)/s$, kde s je počet stupňů volnosti molekuly plynu. Pro jednoatomový plyn omezený na jeden rozměr máme $s = 1$ a tedy $\kappa = 3$. Přesně to samé ovšem plyne z (7), uvědomíme-li si analogii tlaku s výrazem v^2/L .

Poznámky k došlým řešením

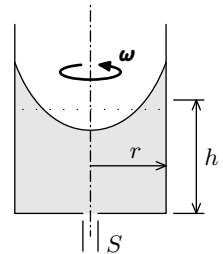
Úvaha, že se kulička při každém odrazu zpomalí o konstantu a následný závěr, že k nárazům bude docházet čím dál méně často, byly zpravidla hodnoceny dvěma body. Většina z Vás se již nedostala k explicitnímu vyjádření závislosti v na L nebo t . Cenné bylo rovněž všimnout si analogie s rozpináním plynu. Nejlepší řešení poslal *Jakub Vošmera*.

Marek Scholz

mara@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... vypouštění odstředivky (4 body; průměr 2,69; řešilo 35 studentů)

Máme dostatečně vysokou válcovou nádobu s vodou (poloměr r , výška hladiny vody h) a roztočíme ji úhlovou rychlostí ω . Do středu dna uděláme malou díрку plochy S , přičemž nádoba stále rotuje. Kolik vody z nádoby vyteče ven? *Archivní víno.*



Rotující odstředivka

Nejprve odvodíme, jaký tvar bude mít hladina vody v roztočené odstředivce a následně tento poznatek využijeme pro výpočet objemu vyteklé vody.

Předpokládejme, že odstředivka se točí již dostatečně dlouho a vnitřní tření v kapalině už rozpochybovalo všechnu vodu v odstředivce tak, že voda se v odstředivce točí všude stejnou úhlovou rychlostí ω a my tak můžeme snadněji problém řešit v neinerciální vztažné soustavě spojené s odstředivkou.

Hladina kapaliny zaujme v silovém poli tvar ekvipotenciální plochy. V našem případě musíme počítat se dvěma potenciály – tíhovým a odstředivým. Tíhový potenciál je dán vztahem

$$\varphi_G(z) = gz,$$

kde z je svislá vzdálenost ode dna nádoby. Odstředivý potenciál vypočítáme přes práci potřebnou na přemístění od osy otáčení do vzdálenosti ϱ , přičemž tuto práci vztahují na jednotku hmotnosti

$$\varphi_O(\varrho) = -\frac{1}{m} \int_0^{\varrho} m\omega^2 x \, dx = -\frac{1}{2}\omega^2 \varrho^2.$$

Výsledný potenciál získáme superpozicí odstředivého a tíhového potenciálu

$$\varphi(z, \varrho) = gz - \frac{1}{2}\omega^2 \varrho^2.$$

Vidíme, že potenciál je symetrický podle osy otáčení, a tak se stačí zabývat tvarem hladiny jen v rovině kolmé na dno a určené osou otáčení.

Pro oblast konstantního potenciálu platí

$$\varphi(z, \varrho) = gz - \frac{1}{2}\omega^2 \varrho^2 = \varphi_h = \text{konst}, \quad (8)$$

kde φ_h je hodnota potenciálu daná množstvím vody v odstředivce.

Z rovnice (8) můžeme snadno odvodit, jakým způsobem závisí výška hladiny na vzdálenosti od osy odstředivky

$$z(\varrho) = K + \frac{\omega^2 \varrho^2}{2g},$$

kde $K = \varphi_h/g$. Hladina tedy bude mít tvar rotačního paraboloidu.²

Předpokládejme, že otvor ve dně má kruhový tvar a jeho poloměr označme $r_0 = \sqrt{S/\pi}$. Objem vody V_R , která v odstředivce zůstane, bude stejný jako objem doplňku paraboloidu zesponu „uriznutého“ na poloměr r_0 . Tento objem vypočítáme určitým integrálem jako součet nekonečně mnoha válcových vrstev o tloušťce $d\varrho$

$$\begin{aligned} V_R &= \int_{r_0}^r (z(\varrho) - z(r_0)) 2\pi\varrho d\varrho = \int_{r_0}^r \left(\frac{\omega^2}{2g} \varrho^2 - \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} \right) 2\pi\varrho d\varrho = \\ &= \pi \frac{\omega^2}{g} \left[\frac{\varrho^4}{4} - \frac{r_0^2 \varrho^2}{2} \right]_{r_0}^r = \frac{\pi \omega^2}{4g} (r^2 - r_0^2)^2. \end{aligned}$$

Objem V' vody, která vyteče je rozdíl objemu zbylé vody V_R a původního objemu

$$V' = V - V_R = \pi r^2 h - \frac{\pi \omega^2}{4g} \left(r^2 - \frac{S}{\pi} \right)^2.$$

Je jasné, že objem vyteklé vody musí být nezáporný. Proto musíme ještě zjistit, kdy platí $V' \geq 0$. Snadno ověříme, že tato podmínka je splněna, platí-li

$$\omega^2 \leq \frac{4gr^2 h}{\left(r^2 - \frac{S}{\pi} \right)^2}.$$

Jak tento výsledek interpretovat? Jestliže se bude odstředivka točit dostatečně rychle, tak se na dně udělá suché „kolečko“, a pokud poloměr této oblasti bude větší než poloměr výtokového otvoru, žádná voda nevyteče.

Michal Koutný
xm.koutny@seznam.cz

Úloha I. P ... teploměr (4 body; průměr 2,12; řešilo 33 studentů)

Kapilára lékařského rtuťového teploměru je pod stupnicí zaškrčená, aby se rtuť nemohla vracet do baňky a my mohli v klidu odečíst změřenou teplotu. Jak jistě víte, od června je zakázán prodej rtuťových teploměrů. Při této historické příležitosti se zamyslete, proč je zúžené místo pro rtuť průchodné pouze jedním směrem při ohřívání a proč se stejným způsobem nemůže rtuť při ochlazení zase samovolně vrátit do baňky.

Při horečce chtěl podvádět Honza Prachař.

Odpověď na to, proč se rtuť dostane přes zaškrčené místo nahoru do stupnice je poměrně jednoduchá. Je to kvůli tomu, že se stoupající teplotou se zvětšuje objem rtuti (a to na intervalu, kde je používán lékařský teploměr velice dobře lineárně s koeficientem objemové roztažnosti $\beta = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ T}^{-1}$), rtuť je prakticky nestlačitelná (její stlačitelnost je $\kappa = 0,04 \text{ GPa}^{-1}$)

²⁾ Uvedný vztah pro $z(\varrho)$ platí jen pro oblast, kde $K + \omega^2 \varrho^2 / 2g$ je nezáporné, což může mít vliv na množství vyteklé vody, jak je řečeno v závěru.

a teplotní roztažnost skla je vůči teplotní roztažnosti rtuti zanedbatelná. Rtuť se tedy zahřeje, zvětší svůj objem a pokud teploměr nemá prasknout, tak se rozšíří přes zaškrncené místo do stupnice.

Složitější částí úlohy je zjistit, proč se rtuť zase po ochlazení nevrátí do baňky. Klíčem k řešení je ukázat, že je to pro rtuť výhodnější a tedy že k tomu nemůže z fyzikálního hlediska dojít. V podstatě jde použít dva základní přístupy. Jednou možností je řešení vést přes kapilární tlak a další možností je věnovat se energetické bilanci. Jedná se o postupy, které jsou v podstatě obdobné, protože tlak je spjatý se silou a ta zase s prací, která se pak právě projeví na změně povrchové energie. Ukažme si tedy postup pro výpočet pomocí kapilárního tlaku.

Postup bude takový, že odhadneme, jak úzké musí být zúžení trubice a posoudíme, zda-li je to reálné, či ne.

Uvažujme obvyklý lékařský teploměr, které má ještě valná většina domácností. Rozdíl teploty o $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ odpovídá délkový rozdíl $\Delta h = 1\text{ cm}$ na stupnici. Baňka přibližně tvaru válce, která obsahuje většinu rtuti teploměru (můžeme tedy uvažovat, že obsahuje celý její objem na počátku), má vnější rozměry zhruba $D_{\text{vn}} = 4\text{ mm}$ průměru a $H_{\text{vn}} = 13\text{ mm}$ délky – můžeme tedy odhadnout, že její vnitřní poloměr bude $R = 1,5\text{ mm}$ a výška $H = 12\text{ mm}$. Pro naše účely také velice dobře platí vzorec pro objemovou roztažnost

$$V = V_0 (1 + \beta\Delta T) = \pi R^2 H (1 + \beta\Delta T) .$$

Chceme odhadnout poloměr trubice (kapiláry) teploměru, což lze jednoduše provést z objemové změny a výše uvedených informací.

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta h = V_0 \beta \Delta T \quad \Rightarrow \quad r = R \sqrt{\frac{H \beta \Delta T}{\Delta h}} .$$

Pokud dosadíme zmiňované hodnoty, tak získáváme odhad $r \approx 20\ \mu\text{m}$. Přestože se to na první pohled může zdát jako příliš malé číslo, tak je reálné, protože rtuť v trubici není vidět pod libovolným úhlem a je potřeba si teploměr vhodně natočit, aby trubice sloužila jako čočka pro zvětšení šířky sloupce.

V teploměru je nad rtutí buď téměř vakuum (respektive rtuťové páry o nízkém tlaku), nebo je tam relativně řídká dusíková atmosféra. Pokud by tam bylo vakuum, tak by stačilo, aby bylo zúžení nepatrné a už by se kvůli vyššímu kapilárnímu tlaku rtuť odtrhla a nevrátila by se do baňky. Proto dále předpokládejme, že nad rtutí je tlak zhruba $p_a = 10^5\text{ Pa}$, který můžeme brát jako horní odhad, a pokusme se zjistit na jaký poloměr l by musela být kapilára zúžena, aby došlo k odtržení (pravdou je, že s roztahováním rtuti stoupá tlak v plynu, protože se zmenšuje jeho objem, ale vzhledem k tomu, že by plyn nad rtutí měl být opravdu relativně řídký, tak atmosférický tlak poslouží velice dobře jako horní odhad). Pro kapilární tlak platí vztah svazující ho s povrchovým napětím (které je pro rtuť $\sigma = 0,48\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$):

$$p_r = \frac{2\sigma}{r} .$$

A dále postupujeme

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_l - p_r > p_a , \\ p_a &< \frac{2\sigma}{l} - \frac{2\sigma}{r} , \\ l &< \frac{2\sigma r}{2\sigma + r p_a} \doteq 6\ \mu\text{m} . \end{aligned}$$

Výsledkem je, že kdyby byla trubice zúžena méně jak na třetinu, tak by teploměr měl fungovat opravdu poměrně dobře jako maximální teploměr (tzn. kdykoliv můžeme odečíst správně nejvyšší teplotu, která byla od nějaké doby naměřena; pravdou je, že s nižší teplotou se sice i rtuť v kapiláře mírně smrští, ale to je pro lidské oko nezatelný rozdíl). Takové zúžení není technicky těžké vytvořit a opticky se i zdá, že je zúžení v teploměru dokonce ještě užší, takže tím spíš se rtuť oddělí v okamžiku, kdy se začne ochlazovat.

Karel Kolář

karel@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. E ... *fridex* (8 bodů; průměr 4,46; řešilo 13 studentů)

Organizátoři jedou na severní pól. Mají motorové saně a i přes třeskuté mrazy okolo točny musí lit do chladiče Fridex. Poradte jim, jakou mají volit směs alkoholu s vodou, to znamená, určete, jaká je závislost teploty tuhnutí směsi alkoholu s vodou na jeho koncentraci. Nemáte-li dostatečně výkonný mrazák, změřte, při jaké koncentraci směs zmrzne při nějaké pevně dané teplotě.

Z cest po Sibíři si kromě manželky přivezl Jarda i tuto úlohu.

Teorie

Hledáme rovnovážný stav směsi za normálního tlaku kapaliny a pevné látky. Řekněme, že měrná tepelná kapacita c nezávisí na teplotě a použijeme tedy hodnoty z tabulek. V řešení budeme užívat následující značení a konstanty: měrná tepelná kapacita kapalné vody $c_v = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$, měrná tepelná kapacita ledu $c_{\text{led}} = 2,10 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$, měrná tepelná kapacita kapalného etanolu $c_{e1} = 2,44 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$, měrná tepelná kapacita pevného etanolu $c_{e2} = 0,97 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$, měrné latentní teplo tání vody l_v , měrné latentní teplo tání etanolu l_e , poměrná hmotnost vody m_v , poměrná hmotnost etanolu m_e , teplota tání čisté vody $t_v = 0,00 \text{ }^\circ\text{C}$ a teplota tání 98% roztoku etanolu $t_e = -144,4 \text{ }^\circ\text{C}$.

U latentního tepla a hmotností nebudeme konkrétní hodnoty potřebovat. Poměr hmotností látek musí splňovat rovnost $1 = m_v + m_e$. Při postupném ochlazování vody a posléze etanolu z teploty t_{poc} pod bod tuhnutí na teplotu t_{vysl} , nebo při ochlazování směsi těchto kapalin na tutéž výslednou teplotu je odevzdané teplo stejné. Můžeme tedy napsat rovnici

$$m_v (c_v(t_{\text{poc}} - t_v) + c_{\text{led}}(t_v - t_{\text{vysl}}) + l_v) + m_e (c_{e1}(t_{\text{poc}} - t_e) + c_{e2}(t_e - t_{\text{vysl}}) + l_e) = \\ = m_v (c_v(t_{\text{poc}} - t_t) + c_{\text{led}}(t_t - t_{\text{vysl}}) + l_v) + m_e (c_{e1}(t_{\text{poc}} - t_t) + c_{e2}(t_t - t_{\text{vysl}}) + l_e),$$

podle níž teplota tání směsi je

$$t_t = \frac{m_v t_v (c_v - c_{\text{led}}) + m_e t_e (c_{e1} - c_{e2})}{m_v (c_{\text{led}} - c_v) + m_e (c_{e2} - c_{e1})}.$$

Podle tohoto předpisu by změna teploty tání na základě procentuálního obsahu alkoholu ve směsi měla mít průběh jako křivka „Model“ v grafu na obrázku 2.

Experiment

Jako chladičím médium použijeme tekutý dusík. Pokud jej nemáme k dispozici, použijeme mrazák. Do šesti nádobek jsme vлили po 25 ml směsi kapalin a pokus opakovali třikrát. Připravili jsme si různé objemové koncentrace lihu s vodou a z nich jednoduchým převodem koncentraci hmotnostní (známe poměr hustot kapalin). Pro přesné výsledky jsme vzorky připravovali

injekční stříkačkou; vzhledem k mrazákové verzi úlohy, a tedy nedosažitelných -18°C jsme vypočítali, že bude stačit 17% koncentrace lihu. V malých nádbokách jsme nechali všechny materiál zmrznout. Jelikož změna skupenství směsi je charakterizována teplotní rovnováhou, zmrazené nádoby (bohužel jedna se nám nezmrázila ani po několika hodinách – právě těch hraničních 16 hmotnostních procent).

Plastové odměrky mráz vydržely; poté, co vše zmrzlo, vyndali jsme vzorky do teplého prostředí a bedlivě sledovali. Čekali jsme na postupné rozmrazání vzorků. Nechtěli jsme nechat teploměry do vzorků přímo zamrznout, aby se neponičily.

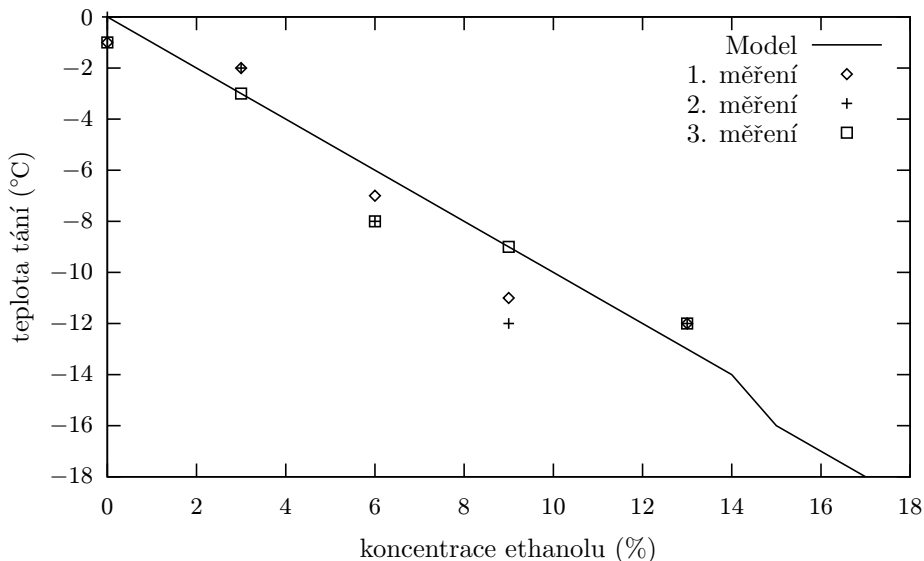
Jakmile vzorek začal tát, měřili jsme teplotu natáté ledovaté vrstvy v okamžiku, kdy se celá špička (lihového) teploměru ponořila. Získali jsme tak data tání vrstev, která jsme zanesli do následující tabulky.

Tuhnutí vzorků

Objem alkoholu (z 25 ml)	Procento hmotnosti	$t_t(1)$	$t_t(2)$	$t_t(3)$	\bar{t}_t
0 ml	0	-1	0	-1	$(-0,7 \pm 0,5)^{\circ}\text{C}$
1 ml	3	-2	-2	-3	$(-2,3 \pm 0,5)^{\circ}\text{C}$
2 ml	6	-7	-8	-8	$(-7,7 \pm 0,5)^{\circ}\text{C}$
3 ml	9	-11	-12	-9	$(-10,7 \pm 1,1)^{\circ}\text{C}$
4 ml	13	-12	-12	-12	$(-12,0 \pm 0,5)^{\circ}\text{C}$
5 ml	16				

Vzhledem k nepřilíš přesnému teploměru bylo možné měřit pouze s přesností na stupně.

Porovnáme-li námi naměřené hodnoty – kde mimochodem vychází teplota tání čisté vody výrazně pod 0°C – s hodnotami z modelu, získáváme graf na obrázku 2.



Obr. 2. Srovnání teoretického modelu s experimentem

Velká nepřesnost vznikla metodou měření – teploty byly podhodnocené, je zde patrný mnohem větší gradient než v modelu. Někteří řešitelé si s tímto problémem poradili měřením pomocí diody jako např. *Tomáš Pikálek*. Pro velmi nízké teploty arktických mrazů se však naše výsledky vesměs shodují na minimálně 35 hmotnostních procentech etanolu.

Hana Šustková

hanka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. S ... *petřínská* (6 bodů; průměr 2,69; řešilo 26 studentů)

- a) Co uvidí člověk stojící mezi dvěma spojenými na sebe kolmými zrcadly, jejichž spojnice je svislá?
- b) Mějme rovinné zrcadlo skloněné pod úhlem 45° , pohybující se zleva doprava rychlostí v . Zprava na něj dopadá paprsek světla rychlostí c (úhel dopadu je tedy 45°) a odrazí se zhruba nahoru. Pomocí Huyghensova principu určete úhel mezi dopadajícím a odraženým paprskem, tedy vlastně opravte zákon odrazu a dopadu pro pohybující se zrcadlo.

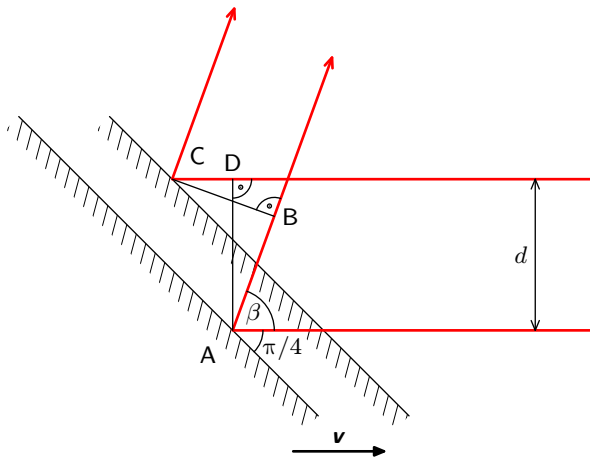
Z dílny Dalimilovy.

Človíček a zrcadla

Člověk uvidí tři obrazy sama sebe, přičemž dva z nich (po stranách) budou normálně zrcadlově převrácené a obraz přímo naproti němu (ve zlomu zrcadel) bude zrcadlově převrácen dvakrát, takže se uvidí tak, jak ho vidí ostatní lidé.

Pohybující se zrcadlo

Na obrázku 3 je naznačena daná situace. Máme dva rovnoběžné paprsky p_1 a p_2 mezi nimiž je vzdálenost d . Tyto paprsky dopadají na zrcadlo Z , které jim letí vstříc rychlostí u ,



Obr. 3. Odraz paprsků

přičemž paprsek p_1 dopadne jako první a odrazí se pod úhlem β . Paprsek p_2 dopadne o čas τ později, kde, vzhledem k tomu, že zrcadlo je nakloněno pod úhlem $\pi/4$, tento čas splňuje rovnici $d = u\tau + c\tau$ a tedy víme, že

$$\tau = \frac{d}{u + c}. \quad (9)$$

Z geometrie obrázku za použití vztahu (9) dále můžeme psát

$$|AB| = |CD| = \frac{cd}{u+c}, \quad (10)$$

$$|AC| = \sqrt{d^2 + |CD|^2} = d\sqrt{1 + \frac{c^2}{(u+c)^2}}, \quad (11)$$

$$|CB| = \sqrt{|AC|^2 - |AB|^2} = d, \quad (12)$$

kde rovnice (10) vyplývá z Huyghensova principu, a zbytek je geometrie.

Označíme-li $|\angle CAB| = \varphi$, z trojúhelníku ABC s použitím vztahů (11) a (12) plyne

$$\sin \varphi = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{u+c}{\sqrt{c^2 + (u+c)^2}}.$$

Příčměž z trojúhelníku CAD plyne pro úhel při vrcholu A (označme jej α)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{u+c}.$$

Z obrázku je dále vidět, že $\varphi = \alpha + \pi/2 - \beta$, a tedy

$$\sin \varphi = \frac{u+c}{\sqrt{c^2 + (u+c)^2}} = \cos(\alpha - \beta), \quad (13)$$

což je již rovnice, ve které vystupuje pouze jedna neznámá, β . Po rozepsání kosinu součtu a použití vztahů

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \text{a} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

z rovnice (13) dostaneme

$$\frac{u+c}{\sqrt{c^2 + (u+c)^2}} = \frac{u+c}{\sqrt{c^2 + (u+c)^2}} \cos \beta + \frac{c}{\sqrt{c^2 + (u+c)^2}} \sin \beta,$$

což je po přímočaré úpravě rovnice pro $\sin \beta$. Tedy

$$1 = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} + \frac{c}{u+c} \sin \beta.$$

Tuto rovnici můžeme snadno řešit převedením odmocniny na jednu stranu a umocněním, výsledkem je

$$\sin \beta = \frac{2uc + 2c^2}{u^2 + 2uc + 2c^2}.$$

K tomuto výsledku můžeme dospět i trochu rychleji; stačí si všimnout, že se jedná o klasický zákon odrazu jen ne pro plochu zrcadla nýbrž pro plochu danou AC. Z obrázku je patrné, že pokud řekneme, že pro plochu AC platí zákon odrazu jako ho známe, dostaneme rovnici

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\beta - \alpha) = \frac{\pi}{4} - \alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = 2\alpha,$$

a proto

$$\sin \beta = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2uc + 2c^2}{u^2 + 2uc + 2c^2},$$

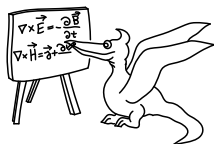
jak jsme již jednou viděli.

Jak tento výsledek interpretovat? Pro $u > 0$ je $\sin \beta < 1$ a $\beta < \pi/2$ a paprsek se tedy odrazí „víc od zrcadla“ než kdyby zrcadlo stálo. Pokud je rychlost zrcadla zanedbatelná vzhledem k rychlosti světla, nebo rovnou nulová, dostaneme $\sin \beta = 1$ a tedy $\beta = \pi/2$, tak jak bychom to očekávali.

K výsledku lze velmi snadno dospět pomocí speciální teorie relativity, a sice tak, že se transformujeme do soustavy, ve které zrcadlo stojí (pozor, v této soustavě má jiný sklon) v této soustavě dojde k normálnímu odrazu, a pak se transformujeme zpátky a dostaneme výsledný sklon pohybu fotonů. Kdo chce, může si to vyzkoušet a zjistí, že dostane stejný výsledek. Na závěr připojíme otázku k zamyšlení: Proč se dá očekávat, že z Huyghensova principu dostaneme stejný výsledek jako z STR?

Martin Výtka

martin.vyska@centrum.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 3: Vlnová optika

Úvod

V minulé kapitole seriálu jsme se zabývali velmi hrubou aproximací chování světla zvanou geometrická optika, která se na světlo dívá jako na jednoduché paprsky, jejichž pohyb se řídí principem nejkratšího času. Tato představa, ač nám dává do rukou dobrý návod, jak řešit jednoduché problémy, však nedává odpovědi na otázky jako „Proč platí princip nejkratšího času?“ nebo „Proč je rychlost světla v nějakém materiálu menší a proč toto závisí na barvě světla?“ atd. Abychom se mohli přiblížit odpovědím na podobné otázky, musíme svou pozornost obrátit na přesnější modely světla a prvním krokem může být právě vlnová optika. To, že chování světla není tak jednoduché, se dá snadno ilustrovat na dobře známém dvouštěrbinovém experimentu. Představme si, že světlo pouštíme skrze přepážku na stínítko, kde v přepážce jsou blízko vedle sebe dvě úzké štěrbin. Pokud zakryjeme jednu ze štěrbin, výsledkem bude úzký proužek světla na stínítku.

Pokud necháme obě štěrbinu odkryté, výsledkem nebudou dva úzké proužky (což by byl výsledek geometrické optiky) ale spíš soustava proužků naskládaných vedle sebe. Tento jev se nazývá *interference* a můžeme ho snadno zdůvodnit například pro vlny na vodě. Od obou „štěrbin“ by se šířily kruhové vlny, od každé štěrbinu jedna. V místech, kde se potkají maximum od jedné vlny a minimum od druhé, se výchylka vyruší a hladina bude klidná. V místech, kde se potkají dvě maxima, bude výchylka dvakrát větší a tak dále. Když si tedy představíme světlo jako vlnění, které se může navzájem odčítat (interferovat) a z každé štěrbinu se šíří do všech směrů, můžeme takto vysvětlit interferenční proužky. Jenže vlnění čeho? Na tuto otázku našel odpověď v polovině devatenáctého století James Clerk Maxwell, když studoval

řešení rovnic popisujících časový vývoj elektromagnetického pole (Maxwellovy rovnice). Zjistil, že tyto rovnice mají nenulové řešení i v prázdném prostoru, tedy i když kolem nejsou žádné náboje, které by pole generovaly. Toto řešení bylo ve tvaru vln šířících se prostorem rychlostí, která se ukázala být stejná jako tehdy už naměřená rychlost světla a tak se zrodila teorie popisující světlo jako elektromagnetické vlnění. Na tu si však budeme muset počkat do dalších dílů seriálu. V tomto díle budeme světlo studovat jednoduše jako kmitání něčeho, nazýváme to E , a pro popis jevů z toho plynoucích budeme používat komplexní čísla a tedy samotný text začneme krátkým úvodem do matematiky zde používané.

Trocha matematiky

Začneme rychlým zopakováním toho, co jsou to komplexní čísla a řekneme si něco o komplexní exponenciále a sčítání řad.

Komplexní číslo je číslo ve tvaru $z = a + ib$ kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $i^2 = -1$, a se nazývá reálná část čísla z , píšeme $a = \Re(z)$ a b se nazývá imaginární část, píšeme $b = \Im(z)$.

Máme-li dvě komplexní čísla z_1 a z_2 , pak platí $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$ a $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Číslo $\bar{z} = a - ib$ je číslo komplexně sdružené k číslu z . Chceme-li podíl dvou komplexních čísel z_1 a z_2 , dostaneme

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}. \quad (14)$$

Komplexní číslo z můžeme zapsat i v polárních souřadnicích jako

$$z = R \sin \varphi + iR \cos \varphi. \quad (15)$$

Kde $R = |z| = z\bar{z} = a^2 + b^2$ a $\varphi = \arctg(b/a)$. Kdo neví, o čem je řeč, měl by si to rychle zjistit, protože je to důležité pro pochopení dalšího textu.

Nejdůležitější vztah, který budeme používat je

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (16)$$

Tento vztah si můžete odvodit, například přes Taylorův rozvoj nebo zderivováním čísla $z = \cos x + i \sin x$ podle x a vyřešením vzniklé diferenciální rovnice separací proměnných. Jedná se o velmi zajímavou rovnici, která říká, že pro $x \in \mathbb{R}$ je exponenciální funkce e^{ix} periodická s periodou 2π a amplitudou $|e^{ix}| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. O tom, že je to rovnice velmi užitečná není pochyb, například se z ní dají elegantně odvodit vztahy pro sinus a cosinus součtu.

Často se hodí i vyjádření sinu a cosinu pomocí exponenciálních funkcí, ke kterému můžeme dospět komplexním sdružením rovnice (15), a sice

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}). \end{aligned} \quad (17)$$

Toto se obzvláště hodí při sčítání řad obsahujících siny a cosiny. Umíme totiž snadno vypočítat součet tzn. geometrické řady S_n

$$S_n = \sum_{m=0}^n x^m$$

a to tak, že řadu vynásobíme výrazem $(1 - x)$ a všimneme si, že se vše až na dva členy odečte. Dostaneme

$$S_n(1 - x) = 1 - x^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Pro $x \neq 1$, v opačném případě je součet řady triviální. Co kdybychom chtěli součet řady

$$\sum_{m=0}^n \cos mx?$$

S komplexními čísly je to hračka. Stačí si všimnout, že $\cos mx = \Re(e^{imx})$, a dostáváme

$$\sum_{m=0}^n \cos mx = \sum_{m=0}^n \Re(e^{imx}) = \Re\left(\sum_{m=0}^n (e^{ix})^m\right). \quad (18)$$

Toto je již normální geometrická řada, a můžeme ji sečíst. Obdržíme tak výsledek

$$\sum_{m=0}^n \cos mx = \Re\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right).$$

Použitím vztahů (14) a (16) si můžete tuto reálnou část vypočítat přímo obecně pro x , nicméně výsledek je dost velký a není tak důležitý jako postup, takže ho sem psát nebudeme.

Poslední věc, kterou budeme potřebovat je, že pro $x \ll 1$ platí přibližně

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx. \quad (19)$$

Zájemci si opět mohou tento vztah odvodit z Taylorova rozvoje, pro celočíselné n i z binomické věty.

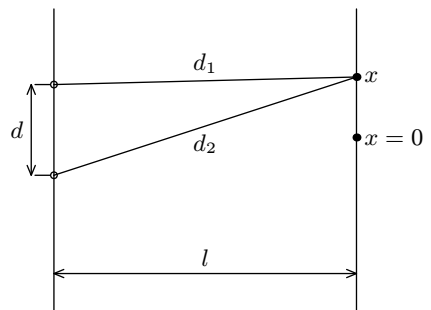
Nyní, vybaveni tímto skromným matematickým arzenálem, se můžeme pustit do studia interference.

Interference

Mějme dvě štěrby ve vzdálenosti d od sebe, které fungují jako bodové zdroje světla se stejnou počáteční fází a frekvencí. Ve vzdálenosti l od nich se nachází stínítka, $l \gg d$, viz. obrázek 4, pohled shora. Jaká bude intenzita světla na stínítku v bodě x ? Vzdálenost bodu x od spodní štěrby necht' je d_1 vzdálenost od horní necht' je d_2 . Pak platí

$$d_1 = \sqrt{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2},$$

$$d_2 = \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}.$$



Obr. 4. Interference na dvojštěrbíně

Jelikož se světlo chová jako vlnění pole E , můžeme pro pole v bodech na každé přímce parametrizované např. y vycházející z nějaké štěrby psát

$$E = E_0 e^{iky}. \quad (20)$$

Tento zápis by měl být spíše $E = \Re(E_0 e^{iky})$, ale reálnou část vynecháme a jen si budeme pamatovat, že kdyby nás někdy zajímala konkrétní čísla, musíme na vztahy aplikovat funkci \Re . Písmeno k zde symbolizuje konstantu (vlnové číslo), která určuje vlnovou délku λ vlny

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Amplituda intenzity světla I je úměrná energii tohoto elektrického pole a energie elektrického pole je úměrná intenzitě pole na druhou (elektrostatika) a tudíž, až na konstantu úměrnosti, můžeme psát

$$I = |E_0 e^{iky}|^2 = E_0^2.$$

Tento vztah samozřejmě ve skutečnosti pro všechna y neplatí, protože energie se zachovává a proto její součet na každé kulové slupce se středem ve zdroji musí být stejný a protože plocha kulové slupky je úměrná y^2 je intenzita úměrná $1/y^2$ a vztah pro elektrické pole by tedy měl spíš být

$$E = \frac{E_0}{y} e^{iky}.$$

Nás však zajímá pouze tvar (vzdálenost) interferenčních proužků v blízkém okolí bodu $x = 0$, spíš než to, jak jejich intenzita ubývá se vzdáleností, takže toto zanedbáme a budeme dál používat vztah (20). Jak tedy vypočítáme rozložení intenzity na stínítku? Každá ze štěrbin přispěje k celkové intenzitě podle vztahu (20) s y odpovídající vzdáleností. Tedy pro amplitudu intenzity v bodě x platí

$$I = E_0^2 \left| e^{ikd_1} + e^{ikd_2} \right|^2.$$

Nyní využijeme fakt, že d i x jsou hodně malé ve srovnání s l , neboť kdyby d bylo příliš velké, štěrbin by o sobě „nevěděly“, a kdyby x bylo moc velké, začal by se příliš projevovat úbytek intenzity. Jakmile jsou však malé, můžeme radostně použít vztah (19) a dostaneme, že $d_{1,2} = l + (x \pm d/2)/2l = A \pm kxd/2l$, kde A je výraz stejný pro obě vzdálenosti. Dosadíme-li toto do vztahu pro intenzitu, dostaneme

$$I(x) = E_0^2 \left| e^{iA} \right|^2 \cdot \left| e^{ikxd/2l} + e^{-ikxd/2l} \right|^2,$$

Což vypadá podezřele podobně jako rovnice (17), a tedy dostáváme konečný výsledek

$$I(x) = 4E_0^2 \cos^2 \left(\frac{kdx}{2l} \right).$$

Předpovědi vlnové optiky tedy skutečně jsou světlé a tmavé proužky na stínítku, kde světlé odpovídají maximům intenzity a tmavé místům kde je cosinus nula. Pro $x = 0$ máme maximum a nejbližší další je když argument cosinu je π , pro vzdálenost proužků x_0 tak dostáváme

$$x_0 = \frac{2\pi l}{kd} = \frac{\lambda l}{d}.$$

Kdybychom d zmenšili skoro na nulu, tedy vzali pouze jednu štěrbinu, cosinus se roztáhne do nekonečna a na stínítku dostaneme jednoduše osvětlení. To je proto, že jsme zanedbali úbytek intenzity se vzdáleností, takže je vše v pořádku. Podobně, pokud budeme vzdálenost d zvětšovat nade všechny meze, interference vymizí a dostaneme opět jednoduše osvětlení, opět ze stejného důvodu.

Interference na více štěrbinách

Co se stane, budeme-li mít štěrbin více, konkrétně opravdu hodně štěrbin, hodně blízko u sebe? Dostaneme něco, čemu se říká difrakční mřížka, viz. obrázek 5, pohled shora. Vzdálenost mezi štěrbinami nechť je $d \ll 1$ a vzdálenost stínítka od mřížky nechť je $l \gg d$. Pokusíme se vypočítat, jak bude vypadat intenzita světla na stínítku v závislosti na x . Zvolme počátek osy x tak, aby byly štěrbin mřížky symetricky rozloženy. Potom se můžeme na mřížku dívat jako na soustavu soustředných dvouštěrbín, které mají vzdálenosti ve tvaru $d_n = (2n + 1)d$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$. Musíme si však dát pozor, vzhledem k tomu, že nepočítáme s úbytkem intenzity se vzdáleností, musí být vždy $(2n + 1)d \ll l$ tedy musíme počítat jen se štěrbinami až do nějakého $n = N$, pro které nerovnost ještě dobře platí, a dál už ne. Z kapitoly o interferenci víme, že pole v bodě x na stínítku je

$$E(x) = 2E_0 e^{il} \cos\left(\frac{kxd_n}{2l}\right).$$

Pole od mřížky bude jednoduše součet přes všechny dvouštěrbiny

$$E(x) = 2E_0 e^{il} \sum_{n=0}^N \cos((2n + 1)\alpha),$$

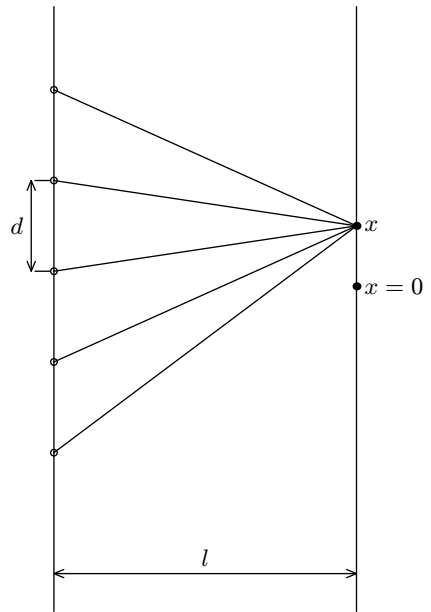
kde $\alpha = kxd/2l$. Odtud můžeme vydedukovat první zajímavý výsledek. Pokud je $x = 0$, pak jsou všechny hodnoty kosinů rovny jedné a výsledek je tedy úměrný $2(N + 1)E_0$, což je velké číslo, neboť štěrbin je hodně. Takže v počátku máme jedno velké maximum, jeden velmi světlý proužek. Zároveň jakmile $x \neq 0$, můžeme dostávat další maxima, ale příspěvky od spousty členů se budou navzájem odčítat, takže další maxima budou mnohem menší než to v počátku. Tuto řadu můžeme podle rovnice (18) přepsat na

$$E(x) = 2E_0 e^{il} \Re\left(e^{i\alpha} \sum_{n=0}^N (e^{2i\alpha})^n\right).$$

Vzniklou sumu lze sečíst jako geometrickou řadu a následně vzít její reálnou část. Postup je zdlouhavý, ale přímočarý, takže zde uvedeme pouze výsledek

$$E = E_0 e^{il} \frac{\sin(2(N + 1)\alpha)}{\sin \alpha}. \quad (21)$$

Intenzita světla je potom $|E|^2$. Vzhledem k tomu, že funkce sinus se pro malý argument chová stejně jako funkce $y = x$, jinými slovy blízko nuly se tyto dvě funkce dotýkají, můžeme pro malá x psát $\sin x = x$, tudíž pro x (a tedy i α) jdoucí k nule skutečně dostaneme velké

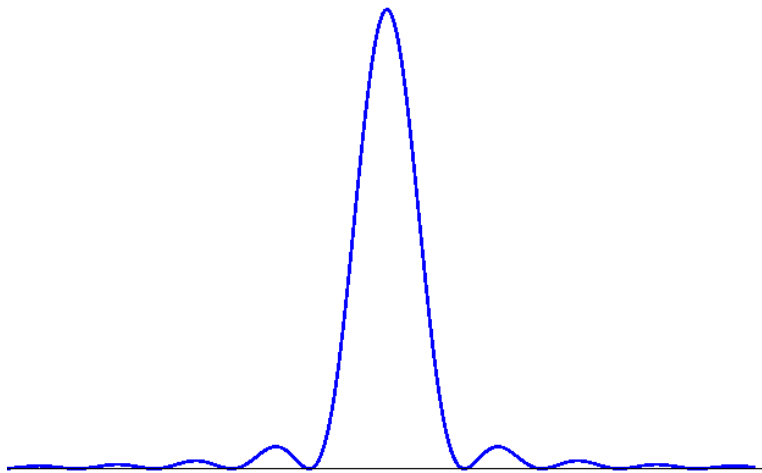


Obr. 5. K výkladu interference na mřížce

maximum. Pokud bychom například chtěli vědět, kde se nachází první minimum, to znamená tmavý proužek, musíme zjistit pro jaké x je $E = 0$. Vzhledem k tomu, že $\sin(2(N+1)\alpha)$ kmitá nejrychleji, dostane se do nuly první a tedy pozice prvního minima je dána rovnicí

$$2(N+1)\alpha = \pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\lambda l}{2d(N+1)}.$$

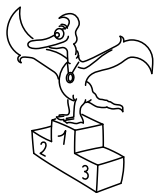
V příští kapitole seriálu představíme světlo jako vlnění vektorů elektrického a magnetického pole, jež se řídí Maxwellovými rovnicemi. Tato vektorová povaha světla dává vzniknout mnoha zajímavým jevům jako je například polarizace.



Obr. 6. Znáznornění průběhu funkce (21) v závislosti na proměnné x

Úloha III. S ... hra se stíny

- a) V textu seriálu jsme pracovali s diskretním rozložením bodových zdrojů na přímce a jejich zobrazením na přímku. Nyní si představte, že máte zdroje světla rozložené na rovině a stínítko je rovina na ni rovnoběžná. Popište rozložení intenzity na stínítku v případě, že zdroje světla:
- Leží na jedné přímce s pravidelným intervalem d .
 - Jsou rovnoběžné přímky, kde vzdálenost mezi sousedními přímkami je d .
 - Leží ve vrcholech obdélníkové sítě, kde obdélníky mají strany a , b .
- b) Mějme následující situaci: Před stínítkem, reprezentovaném nějakou rovinou xy je disk o poloměru R , rovnoběžně s rovinou. Ze strany disku na stínítko svítíme z nekonečna světlem, tzn. všechny paprsky jsou navzájem rovnoběžné a kolmé na rovinu xy . Vysvětlete, proč situaci můžeme popsat pomocí bodových zdrojů světla spojitě rozložených všude na rovině ve které leží disk kromě disku samotného, najděte závislost intenzity světla na rovině xy jako funkci x a y (není potřeba uzavřený tvar, stačí ve tvaru integrálu) a ukažte, že v bodě, který je na rovině xy přímo naproti středu disku se děje něco, co bychom z hlediska geometrické optiky nečekali.



Pořadí řešitelů po I. sérii



Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	4	4	4	8	6	32	100	32
1. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	3	–	–	–	1	8	2	14	67	14
2. <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	–	–	2	2	3	2	–	9	45	9
3. <i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	–	2	2	4	–	–	–	8	73	8
4. <i>Vladimír Macko</i>	G L. Štúra, Zvolen	1	–	2	3	–	–	0	6	35	6
5. <i>Vladan Glončák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	1	2	1	–	–	–	5	36	5
6. <i>Samuel Puček</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	–	–	0	1	0	0	2	8	2

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	4	4	4	8	6	32	100	32
1. <i>Peter Kosec</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	–	2	–	4	–	2	9	53	9
2. <i>Patrik Švančara</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	2	1	3	–	–	6	50	6
3. <i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	3	–	–	–	3	75	3
4. <i>Kristína Nešporová</i>	G, Boskovice	–	–	2	–	–	–	–	2	50	2

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	4	4	4	8	6	32	100	32
1. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	3	3	2	4	2	8	2	24	75	24
2.–3. <i>Anna Chejnovská</i>	G B. Němcové, Hradec Králov	2	–	2	3	3	5	4	19	66	19
<i>Jakub Vošmera</i>	G Matyáše Lercha, Brno	2	4	5	4	2	–	2	19	79	19
4. <i>Dominika Kalasová</i>	G, Boskovice	1	3	2	4	1	4	2	17	53	17
5.–7. <i>Štefan Badza</i>		2	2	2	1	1	4	1	13	41	13
<i>Martin Bucháček</i>	G Luďka Píka, Plzeň	–	4	–	3	4	–	2	13	76	13
<i>David Krška</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	1	2	4	–	–	6	13	76	13
8. <i>Štefan Stanojević</i>		–	3	2	2	2	–	1	10	48	10
9.–10. <i>Zoltan Jehn</i>		–	4	2	3	–	–	–	9	82	9
<i>Jiří Nárožný</i>	G, Boskovice	–	4	2	3	–	–	–	9	82	9
11. <i>Mustafa Cevizci</i>		–	2	2	3	–	–	1	8	47	8
12. <i>Kateřina Jiráková</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	2	5	–	7	58	7
13.–14. <i>Barbora Drozdová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	–	–	1	4	0	–	6	32	6
<i>Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ, Hronov	1	3	1	0	1	–	–	6	33	6
15. <i>Jiří Jelínek</i>	G, Blansko	–	–	2	–	–	–	2	4	40	4
16. <i>Zuzana Bogárová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	2	–	–	2	50	2

Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
	<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	4	4	4	8	6	32	<i>100</i>	32
1.–2.	<i>Štěpán Poláček</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	3	3	2	4	2	8	5	27	<i>84</i>	27
	<i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského, Praha	2	2	3	4	3	7	6	27	<i>84</i>	27
3.	<i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	2	2	2	4	4	–	6	20	<i>83</i>	20
4.	<i>Zdeněk Novák</i>	G, Česká Kamenice	1	4	1	3	2	6	2	19	<i>59</i>	19
5.	<i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	–	4	2	3	3	–	4	16	<i>76</i>	16
6.	<i>Michal Zanáška</i>	G J. Škody, Přerov	–	4	–	4	–	–	6	14	<i>108</i>	14
7.–8.	<i>Petr Cagaš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	3	3	–	2	1	–	4	13	<i>65</i>	13
	<i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	4	2	3	4	–	–	13	<i>87</i>	13
9.	<i>Ján Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	3	–	4	2	–	–	11	<i>79</i>	11
10.–12.	<i>Jan Hodic</i>	G J. Resslera, Chrudim	–	2	3	2	1	–	2	10	<i>48</i>	10
	<i>Karel Král</i>	G, Most	–	3	–	2	1	–	4	10	<i>59</i>	10
	<i>Lada Peksová</i>	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	–	3	2	3	2	–	–	10	<i>67</i>	10
13.	<i>Nurullah Karakoc</i>		–	2	2	3	0	1	1	9	<i>31</i>	9
14.	<i>Jana Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	–	2	–	3	–	2	8	<i>47</i>	8
15.	<i>Kristýna Onderková</i>	G, Budějovická, Praha	–	–	–	3	1	–	–	4	<i>50</i>	4
16.	<i>Pavel Novotný</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	2	–	1	3	<i>30</i>	3
17.	<i>Zuzana Dočekalová</i>	G, F. Hajdy, Ostrava	–	–	–	–	2	–	–	2	<i>50</i>	2
18.–19.	<i>Martin Bachratý</i>	G Velká okružná, Žilina	–	–	–	–	1	–	–	1	<i>25</i>	1
	<i>Michal Husek</i>	G, Bučovice	–	–	0	1	–	–	–	1	<i>13</i>	1

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.