**22. ročník, úloha VI . S ...** ***atomové modely a Rutherfordův experiment*** *!!! chybí statistiky !!!*

a) *Rozhodněte, zda stabilita (popř. rozměr) saturnského atomového modelu závisí na atomovém čísle $Z$.*
b) *Upravte vzorec(vztah 12 ze šesté kapitoly) pro pravděpodobnost rozptylu $\alpha$-částice pod velkým úhlem $\phi$ tak, abyste dostali praktičtější vztah pro pravděpodobnost dopadu na jednotku plochy scintilátoru, a uvažte, jak byste ho využili k určení materiálu ostřelovaného vzorku. Dále odhadněte, jak by se vzorec změnil, pokud bychom neuvažovali centrální náboj $Ze$, nýbrž $Z$ rozptýlených elementárních nábojů $e$ jako třeba v Lenardově modelu.*
c) *V roce 1896 objevil astronom E. C. Pickering ve světle hvězdy $\zeta$ Puppis čáry, které splňovaly Rydbergerův vztah (vzorec 7 v šesté kapitole) pro $n = 2$ a $m = 2{,}5; 3; 3{,}5; 4; 4{,}5; \ldots$, tedy i pro polocelá čísla! Vysvětlete tuto zdánlivou nesrovnalost s Borhovým modelem.*

### Saturnský model

V šestém díle seriálu byl představen Nagaokův saturnský model atomu takto: jedná se o kladně nabité jádro (nábojem $Ze$, tedy prvek má atomové číslo $Z$) a prstenec z elektronů kroužící okolo. Má-li být taková soustava stabilní, musí existovat rychlost obíhání, při které se vyváží všechny síly působící na každý jednotlivý elektron, totiž síla přitažlivá k jádru, odpudivá od ostatních elektronů a síla odstředivá. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že elektrony jsou rozestavěné ve vrcholech pravidelného mnohoúhelníku se středem v jádře. Vzdálenost mezi jádrem a elektronem označme $r$; to je vlastně hledaný poloměr atomu.

Je-li mnohoúhelník $Z$-úhelníkem, svírají průvodiče nultého a $n$-tého elektronu úhel

$$\alpha_n = \frac{2\pi n}{Z}\,.$$

Stejný úhel je mezi odpudivou silou působící mezi těmito elektrony a tečnou k prstenci v místě každého z obou elektronů. Z odpudivé síly se tak uplatní jen složka daná faktorem $\sin(\alpha_n/2)$. Vzdálenost mezi nultým a $n$-tým elektronem je z kosinové věty $r_n^2 = 2r^2(1-\cos\alpha_n)$, tedy

$$r_n = 2r\sin\frac{\alpha_n}{2}\,.$$

Odpudivá síla působící na nultý elektron je pak součet odpudivých sil od všech ostatních elektronů, prvního až $(Z-1)$-ho;

$$F_{\mathrm{odp}} = \frac{\mathrm{e}^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{Z-1}\frac{1}{r_n^2}\sin\frac{\alpha_n}{2} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{e}^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\sum_{n=1}^{Z-1}\frac{1}{\sin(\alpha_n/2)}\,.$$

Přitažlivá síla je jasná,

$$F_{\text{při}} = \frac{\mathrm{e}^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z}{r^2}\,,$$

takže pro rovnováhu musí být

$$F_{\text{při}} = F_{\mathrm{odp}} + \frac{mv^2}{r}\,,$$

což po dosazení a přeskupení dá

$$\frac{\mathrm{e}^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(Z - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{Z-1}\frac{1}{\sin\frac{n\pi}{Z}}\right) = mrv^2\,. \tag{1}$$

Závorka je vždycky kladná a pro myslitelná $Z$ je řádu $10^1$, takže vždy je možné vhodnou rychlostí docílit stabilního oběhu. Odpověď na druhou otázku v zadání není úplně jednoznačná – poloměr prstence (atomu), jak vidíme v (1), závisí mnohem silněji na rychlosti, s jakou elektrony obíhají kolem jádra, než na atomovém čísle.

### *Rozptyl částic*

Proužek plochy detektoru úhlové šířky $\mathrm{d}\phi$, který lze zasáhnout $\alpha$-částicemi rozptýlenými při odstřelování pod úhlem $\phi$, má obsah

$$\mathrm{d}S = 2\pi r^2 \sin\phi \,\mathrm{d}\phi = 2\pi r^2 \sin(\pi - \phi)\,\mathrm{d}\phi \,.$$

Vydělíme-li elementem plochy rovnici ze zadání, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}S} \sim \frac{1}{2\pi r^2} R_m^2 \frac{\pi - \phi}{\sin(\pi - \phi)} \,,$$

kde pro připomenutí

$$R_m = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ZeQ}{\frac{1}{2}mv_0^2} \,.$$

Jelikož $\phi$ je blízké $\pi$, je i $\sin(\pi - \phi)$ blízké $\pi - \phi$ a tak můžeme jejich podíl nahradit jedničkou. Konstanty zatratíme v úměrnosti a zbude jen

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}S} \sim R_m^2 \sim (Ze)^2 \,. \tag{2}$$

Pokud budeme porovnávat počty dopadů na stejnou plošku při rozptylech na různých materiálech, měly by tudíž vyjít v poměru $Z_1^2/Z_2^2$. Známe-li jeden materiál, jsme z experimentu schopni určit atomové číslo druhého a tedy i jeho složení. (Oba materiály musí být samozřejmě čisté prvky).

Jestliže by jádra nebyla koncentrovaná v jednom bodě a místo toho by bylo $Z$ jader o náboji $e$ rozmístěno po atomu, dostali bychom pro každé jádro rovnici (2), kde by bylo $Z = 1$. Jelikož jader máme tentokrát více, každé by přispívalo k četnosti dopadů podobným způsobem a výsledný efekt by mohl být přibližně popsaný úměrností

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}S} \sim Z \cdot R_m^2\big|_{Z=1} \sim Z\mathrm{e}^2 \,.$$

Pak by poměr pro různé prvky byl pouze $Z_1/Z_2$, což lze snadno ověřit.

### *Hvězdné čáry*

Jak bylo uvedeno v seriálu, Rydbergova formule zní

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 k^2 m Z^2 \mathrm{e}^4}{h^3 c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \,, \tag{3}$$

kde $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$. Všimněme si, že když vynásobíme polocelé číslo dvěma, dostaneme celé číslo. Ve vzorci (3) se vyskytují druhé mocniny, takže ty bude potřeba vynásobit čtyřmi,

$$\frac{1}{\lambda} = 4R_{\mathrm{Z}=1}\left(\frac{1}{(2n)^2} - \frac{1}{(2m)^2}\right) \,.$$

Kam nyní se čtyřkou, která v (3) není? Jediná veličina, která není přírodní konstanta, je atomové číslo $Z$. Máme tedy

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\mathrm{Z=2}} \left( \frac{1}{\tilde{n}^2} - \frac{1}{\tilde{m}^2} \right) .$$

Astronom Pickering tudíž nepozoroval atomární vodík, ale jednou ionizované atomy helia ${}_2\mathrm{He}^+$, které se chovají úplně stejně jako vodík, jen mají dvojnásobný jaderný náboj.

***Jakub Benda***
`jakub@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.