

22. ročník, úloha VI.E ... vratné lahve !!! chybí statistiky !!!

Kupte si standardní skleněnou lahev od piva nebo minerálky, a změřte, jak závisí výška tónu vydaného po fouknutí na hrdlo na výšce vodní hladiny v lahvi.

Vymysleli organizátoři na pravidelné schůzi.

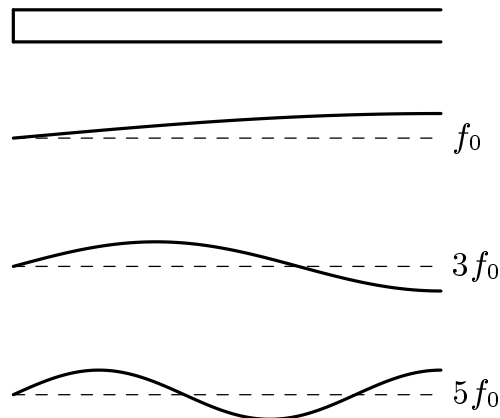
Teorie

Nejdříve se zamyslíme nad tím, jaký tón z lahve po fouknutí na hrdlo uslyšíme. Musíme ovšem udělat nějaká přiblížení, abychom se k rozumnému výsledku vůbec dopracovali. Tím hlavním bude tvar lahve, budeme ji považovat za úzký dutý válec s jedním koncem volným, druhým uzavřeným (viz obr. 1).

V lahvi pak vzniká stojaté vlnění, které má na uzavřené straně uzel, na otevřené kmitnu. Nejmenší (základní) frekvence, která tuto podmínku splňuje je

$$f_0 = \frac{c}{4l}, \quad (1)$$

kde c je rychlost zvuku ve vzduchu, l je vzdálenost od vodní hladiny k hrdlu. Ta je v tomto případě právě čtvrtinou vlnové délky vzniklé vlny (obr. 1 nahoře).



Obr. 1. Vlny vznikající v klarinetu

Na obrázku 1 vidíme ještě další možné stojaté vlny, jsou to vyšší harmonické frekvence, v těchto situacích je l rovno třem, pěti, sedmi, ... čtvrtinám vlnové délky vzniklé vlny a odpovídající frekvence jsou $3f_0, 5f_0, 7f_0, \dots$

Co s takto vypočtenými frekvencemi udělá zúžení hrdla? Lahev od piva není totiž ničím jiným než Helmholtzovým rezonátorem¹. Můžeme si jej představit jako kouli s válcovým hrdlem. Při fouknutí na ústí lahve dochází ke zvětšení tlaku v hrdle a jeho obsah tlačí na vzduch v dutině lahve – ten potom funguje jako pružina a vrátí vzduch zpět. Tyto periodické změny potom vydávají zvuk. Ta je

$$f_H = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{VL}}, \quad (2)$$

kde c je rychlost zvuku, S plocha hrdla, L jeho délka a V objem dutiny lahve.

Protože námi použitá lahev bude mít poměr průměru hrdla a dna poměrně malý (asi 1/3), můžeme očekávat, že v naměřeném spektru budou zastoupeny jak frekvence vznikající rezonancí celého vzduchového sloupce, tak i ty vzniklé rezonancí vzduchu v hrdle.

¹⁾ O Helmholtzově rezonátoru si můžete v angličtině počíst například na internetové adrese <http://phys.unsw.edu.au/jw/Helmholtz.html>, včetně odvození rezonanční frekvence.

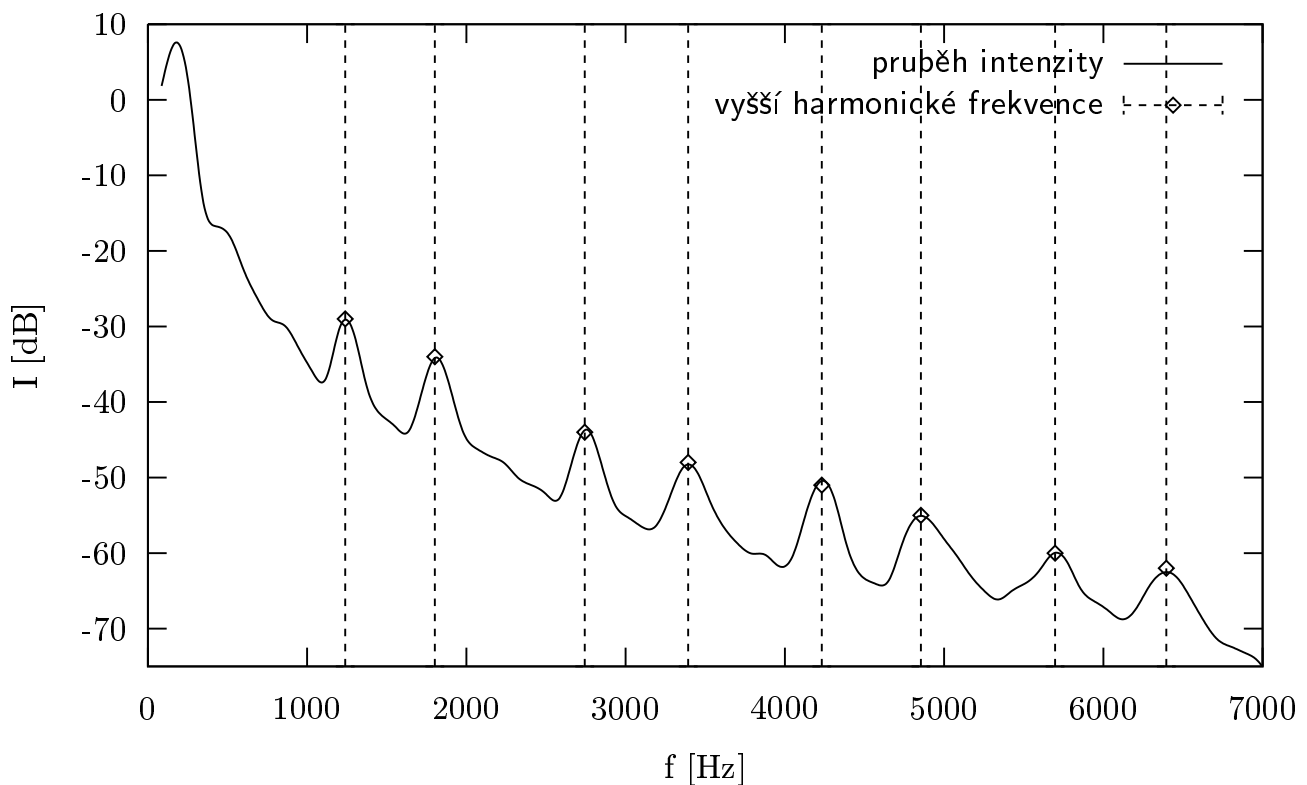
Experiment

Ke měření jsme použili pivní lahev nejmenované starobrněnské značky, vodu, pravítko a počítač s mikrofonem. Pokusy jsme nahrávali do programu Audacity², kde jsme potom provedli spektrální analýzu.

Jak jsme předpokládali, zúžení hrdla se projevilo zvláště na základní frekvenci, která byla úplně přehlušena frekvencí Helmholtzovou. Jak ji tedy můžeme najít? Naštěstí se nám v záznamu ukázaly výrazné píky u hodnot vyšších, které odpovídají druhé až sedmé harmonické frekvenci, jak vidíme na obrázku 2. Protože pro n -tou frekvenci platí

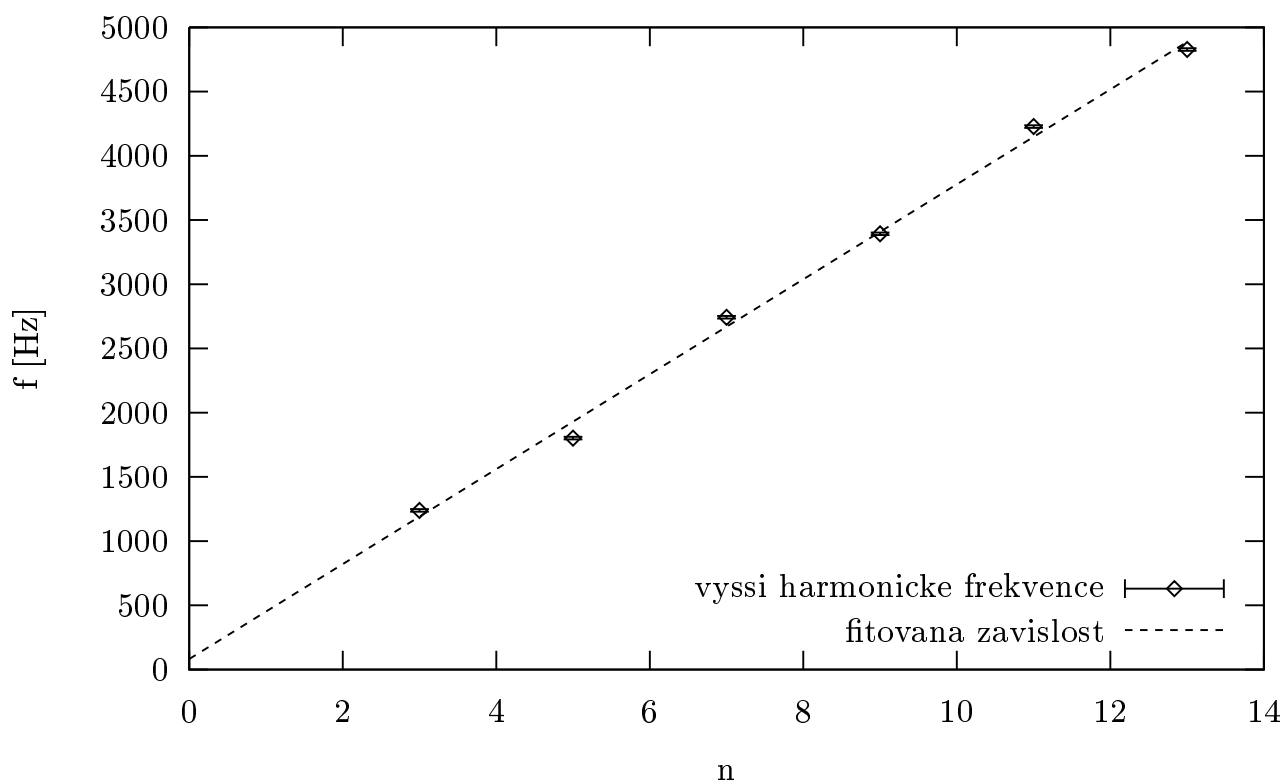
$$f_n = (2n - 1)f_0, \quad (3)$$

dokážeme lineárním fitem určit hodnotu f_0 .



Obr. 2. Typický průběh intenzity

²⁾ <http://audacity.sourceforge.net/>

Obr. 3. Příklad fitu pro zjištění f_0

Na obrázku 3 vidíme příklad fitu ke zjištění frekvence. Fitujeme přímou úměrou popsanou rovnicí (3). Odečtené hodnoty z grafů intenzit naleznete v tabulce.

Tabulka výsledků měření

l [cm]	f_H [Hz]	$3f_0$ [Hz]	$5f_0$ [Hz]	$7f_0$ [Hz]	$9f_0$ [Hz]	$11f_0$ [Hz]	$13f_0$ [Hz]
14	268	1687	3008	4124	5143	6377	n/a
15	237	1619	2870	3786	4868	5948	6834
16	221	1582	2666	3519	4636	5643	6439
17	214	1529	2454	3344	4406	5309	6174
18	209	1496	2258	3206	4175	4977	5943
19	199	1435	2106	3103	3936	4756	5650
20	189	1365	1967	2995	3694	4578	5307
21	187	1317	1880	2894	3517	4436	5121
22	168	1239	1802	2743	3393	4228	4828
23	160	1180	1752	2622	3262	4052	4736
24	148	1102	1696	2471	3163	3822	4527

Tedy už zbývá jenom zpracovat nalezené základní frekvence. Tyto hodnoty jsou spolu s fitem vztahu (1) zaneseny v grafu 4. Fitovaná konstanta c má význam rychlosti zvuku a její hodnota vychází

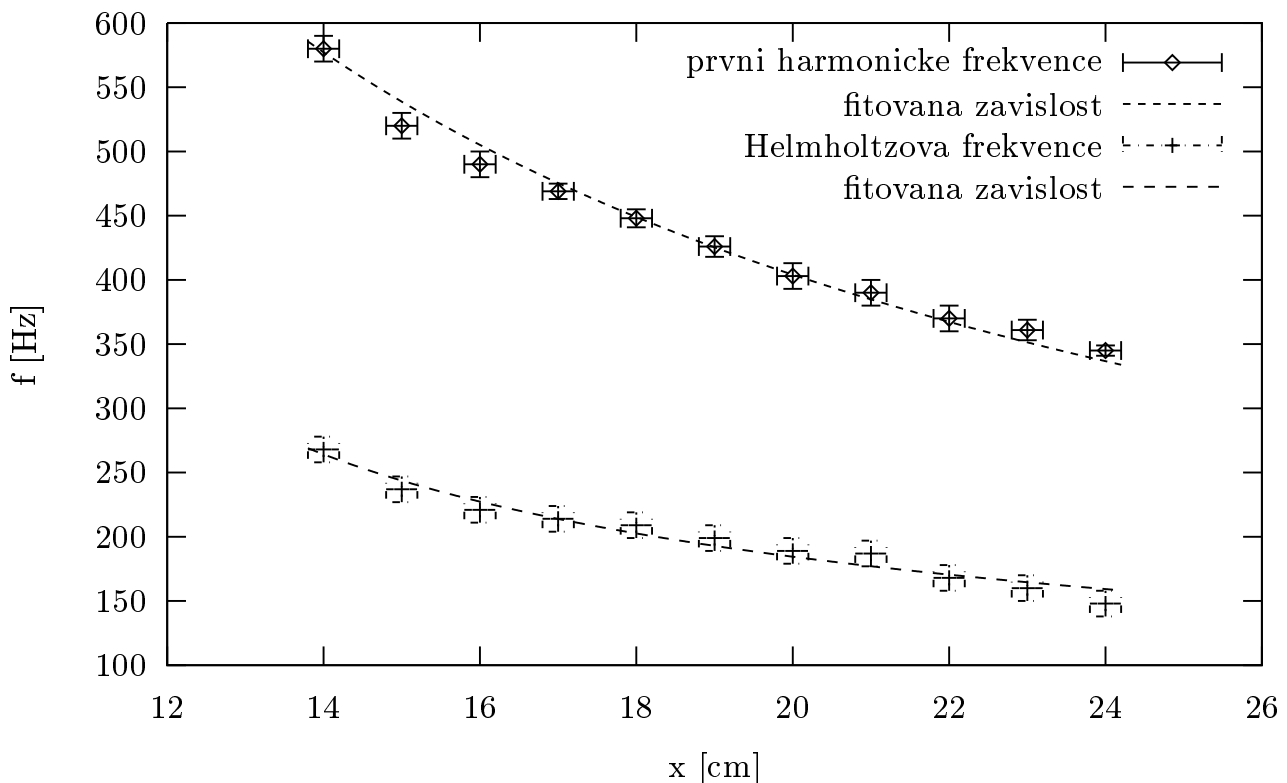
$$c = (323 \pm 2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Odečtení Helmholtzovy frekvence není takový problém, jde vždy o nejvýraznější pík z celého spektra. Její velikosti jsou opět v tabulce ???. Protože lahev nemá zrovna lehce určitelné rozměry hrdla (je oblá a hrdlo přechází v tělo lahve plynu), konstanty v rovnici (2) neumíme změřit.

Upravíme ji tedy do tvaru

$$f_H = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V_0 + (x - 0,14) S_L}}, \quad (4)$$

kde konstanta $A = S/L$ parametrizuje hrdlo, V_0 určuje objem vzduchu v oblé části lahve a S_L je průřez dna. Proměnná x stejně jako v minulém případě reprezentuje vzdálenost hladiny od ústí hrdla. Pokud tímto předpisem fitujeme získaná data, obdržíme hodnoty: $A \approx 3 \text{ mm}$, $V_0 \approx 149 \text{ cm}^3$ a $S_L \approx 26 \text{ cm}^2$, což jsou vcelku reálné údaje. Naměřená data spolu s fitovanou závislostí (4) najdete v grafu 4.



Obr. 4. Konečné výsledky měření

Diskuse

Z výsledků grafického zpracování vyplývá, že jsou naměřené hodnoty v dobré shodě s teorií. Rychlost zvuku je sice pro teplotu asi 20°C rovna přibližně $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, ale tento rozdíl je pravděpodobně způsoben tvarem lahve a to jsme čekali.

Jak je vidět, u menších vzdáleností hladiny od ústí hrdla je frekvence nižší než očekávaná – to je způsobeno pravděpodobně tím, že zúžení lahve je již nepříjemně blízko. Kdyby byla lahev dostatečně velká, nemuseli bychom se pravděpodobně vůbec jejím tvarem zaobírat.

Výsledky fitu Helmholtzových frekvencí potvrzují, že se lahev opravdu chová jako Helmholtzův rezonátor. Jejich intenzita je největší a s přehledem přehlušují frekvence vzniklé rezonancí celého sloupce.

Poznámky k řešením

Téměř všichni řešitelé dospěli ke správnému hyperbolickému grafu. Bylo ale vhodné měřit vzdálenost od hladiny k ústí (jak vyplývá z teorie), ne ode dna. Výsledky se potom dají lépe porovnat a navíc takto závislost někteří mylně považovali za exponenciálu. Za pěkné zpracování

jsme chtěli pochválit Karla Koláře, ale ten svoje řešení poslal tak pozdě, že si nic nezaslouží.

Aleš Podolník

ales@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.