**22. ročník, úloha VI . 3 ... *relativistická koule*** *(4 body; průměr 2,00; řešilo 5 studentů)*

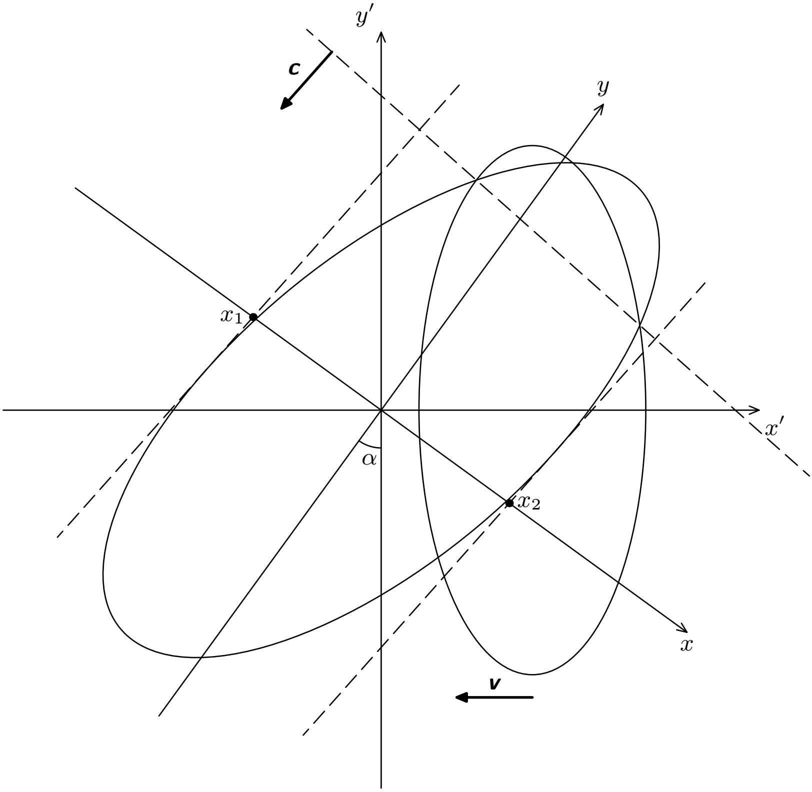
*Při pohybu rychlostí srovnatelnou s rychlostí světla dochází ke kontrakci délek, ale zároveň se nám předmět zdá delší než ve skutečnosti je (zkuste sledovat paprsky světla vyslané z bližšího a vzdálenějšího konce tělesa). Vypočítejte, jestli se u relativistické koule tyto efekty nevyruší.*

*Z Cambridge donesl Dalimil.*

Nechť se koule v dané inerciální soustavě pohybuje rychlostí $v$ ve směru osy $x'$. (Sledujte obrázek.) Její rozměry v tomto směru se v souladu se speciální teorií relativity zkrátí (rozměry ve směru osy $x'$ v této soustavě jsou vynásobeny faktorem $\sqrt{1-u^2}$ oproti klidovým rozměrům v tomto směru, kde $u = v/c$) v této inerciální soustavě tedy nabude koule tvar elipsoidu.

Dále budeme předpokládat, že kouli sledujeme z velké vzdálenosti. To nám umožní aproximovat světelnou vlnoplochu, která nám bude podávat zrakovou informaci v jistý okamžik, rovinou (v obecném případě v isotropním prostředí by se jednalo o vlnoplochu kulovou).

Letící elipsoid bude vypadat jako koule, pokud bude sjednocení průniků pohybujícího se elipsoidu a vlnoplochy ve všech časech promítnuté na rovinu vlnoplochy kruhový tvar. (Vyjádříme-li tuto podmínku jinými slovy, přilétnuvší vlnoplocha na sítnici v daný okamžik „vypálí“ kruh. Uvědomme si ale, že pokud bychom kouli pomalovali nějakým vzorkem, připouštíme deformaci vzorku u pohybující se koule.)




Obr. 1. Letící elipsa

Výpočty si ještě poněkud zjednodušíme, pokud si příklad převedeme na rovinný problém rozřezáním na roviny rovnoběžné se směrem pohybu vlnoplochy i elipsoidu. V řezu bude tedy vlnoplocha přímkou, elipsoid elipsou; výsledný průmět bude pak úsečkou. Tyto úsečky by pak po opětovném složení měly utvořit kruh.

Umístíme-li střed koule (v dané soustavě elipsoidu) v čase $t = 0$ do počátku kartézské soustavy souřadnic, dostáváme rovnici pohybující se elipsy

$$\frac{(x' + vt)^2}{(1 - u^2)r^2} + \frac{(y')^2}{r^2} = 1\,,$$

kde $r$ jest klidový poloměr odpovídající *kružnice* (jež je výsledkem řezu původní koule uvedenou rovinou). Budiž normála vlnoplochy od osy $y'$ odchýlena o úhel $\alpha$. Zvolíme nyní novou kartézskou soustavu souřadnic se stejným počátkem, avšak kde osa $y$ míří ve směru normály vlnoplochy. Transformace je tedy dána předpisem

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha\,,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha\,.$$

Vyjádření elipsy v těchto souřadnicích jest tedy

$$\frac{(x\cos\alpha + y\sin\alpha + vt)^2}{(1 - u^2)r^2} + \frac{(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2}{r^2} = 1\,.$$

V těchto souřadnicích je snadné vyjádřit rovnici pohybující se vlnoplochy směrem k pozorovateli

$$y = -ct\,.$$

Z toho pak můžeme dosadit za výraz $vt = -uy$ do rovnice elipsy; po úpravě tak dostáváme rovnici množiny průniků vlnoplochy a elipsy (od nynějška používám z důvodu úspory místa označení $s = \sin\alpha$, $c = \cos\alpha$, rychlost světla ve vakuu již dále použita není).

$$(xc + ys + yu)^2 + (-xs + yc)^2(1 - u)^2 - r^2(1 - u^2) = 0\,.$$

Výsledný útvar je zřejmě opět nějakou elipsou. Po roznásobení, využití vztahu $s^2 + c^2 = 1$ a seskupení členů obsahujících $x^2$, $xy$, $y^2$, nebo $r^2$ nabude rovnice tvaru

$$y^2\left(1 + u^2 + 2su - c^2u^2\right) + xy\left(2cu + 2csu^2\right) + x^2\left(1 - s^2u^2\right) - r^2\left(1 - u^2\right)\,.$$

Najděme nyní krajní body $x_1$, $x_2$ kolmého promítnutí tohoto obrazce na osu $x$. Vzhledem ke konvexnosti elipsy má každá z přímek $x = x_1$, $x = x_2$ právě jeden bod dotyku s oním útvarem. Díky této jednoznačnosti musí být diskriminant výše uvedené kvadratické rovnice v neznámé $y$ nulový, tj. po drobných úpravách

$$\left(cu + csu^2\right)^2 - \left(1 + u^2 + 2su - c^2u^2\right)\left(\left(1 - s^2u^2\right) - \frac{r^2}{x_{1,2}^2}\left(1 - u^2\right)\right) = 0\,.$$

Roznásobením a po poměrně značném množství jednoduchých úprav dostáváme výsledek

$$x_{1,2}^2 = r^2\,,$$

tedy $x_1 = -r$, $x_2 = r$. Tyto krajní body jsou totožné s těmi, které bychom získali sledováním řezu stojící koule. Tudíž pohybující se koule vypadá opět jako koule podle výše uvedené podmínky.

Na závěr poznamenejme, že nápověda v zadání byla nakonec poněkud zavádějící, neboť nejpřednější a nejzazší bod původní elipsy se netransformuje přesně na body $x_1$, resp. $x_2$, protože elipsa vzniklá „proskenováním“ původní elipsy vlnoplochou nemá osy rovnoběžné s osami $x$, $y$ (to by v uvedené rovnici nestrašily členy obsahující $xy$).

***Marek Nečada***
marekn@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.