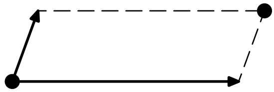
22. ročník, úloha V . 1 ... *otáčení koberce* *(4 body; průměr 2,40; řešilo 15 studentů)*

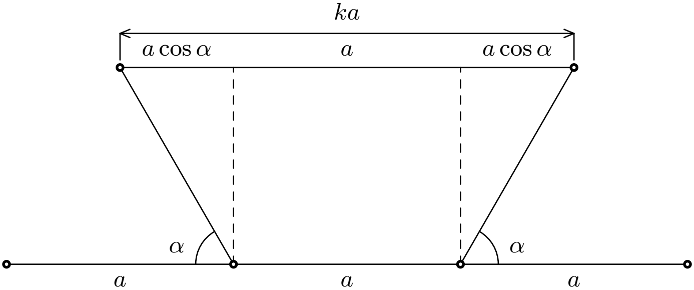
Pomocí dvou různých vektorů v rovině můžeme opakovaným posouváním počátečního bodu dostat nekonečnou mříž bodů (viz obr. 1). (Stejným způsobem vznikne krystal, jen místo bodu posouváme skupinu atomů.) Posunutím celé mříže o jeden z vektorů dostaneme stejnou mříž, tj. každý bod bude nahrazen jiným bodem. Stejně tak se může stát, že otočením celé mříže kolem jednoho bodu o nějaký úhel dostaneme stejnou mříž. Najděte všechny úhly, pro které je to možné, a nakrelete, jak vypadají mřížky s touto rotační symetrií.



Obr. 1

Základní otázku krystalografie zadal Honza Prachař.

Dostali jsme před sebe síť bodů (rovnoběžníků) a chtěli bychom zjistit, o jaký úhel můžeme celou mříž otočit (okolo jednoho z bodů) tak, abychom po rotaci nepozorovali žádnou změnu.



Obr. 2. Otočení vektoru

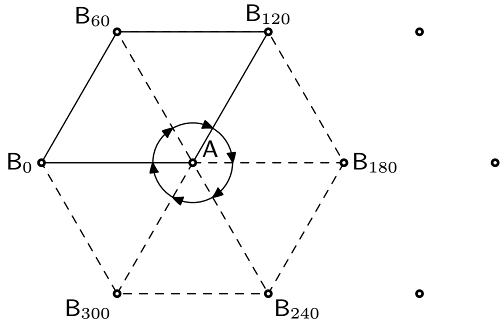
Uvažme čtyři body ležící na přímce tak, že vzdálenost mezi sousedními dvěma je vždy a, jak nám ilustruje obrázek 2. Vzdálenost a bude velikost jednoho z vektorů, který definuje mřížku. První bod otočíme o úhel $-\alpha$ okolo druhého sousedního bodu. Kolem třetího bodu pak otočíme o úhel $+\alpha$ poslední čtvrtý bod. Oba nově vzniklé body leží na rovnoběžce s původní přímkou. Aby ležely ve stejné mřížce jako původní čtyři body, musí být jeden z nových bodů posunutím druhého nového bodu o celočíselný násobek vektoru velikosti a. Tato vzdálenost se však dá vzhledem ke geometrii situace popsat i jiným způsobem, viz obr. 2. Platí tedy

$$ka = a + 2a\cos\alpha\,,$$
$$\frac{k-1}{2} = \cos\alpha\,.$$

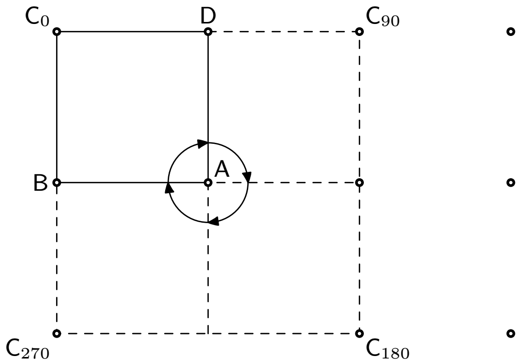
Jak dobře víme, $\cos\alpha$ nabývá hodnot pouze od -1 do 1, a tak si všechny možné hodnoty shrňme do následující tabulky.

$k-1$	$\cos\alpha$	α
-2	-1	180°
-1	$-1/2$	120°
0	0	90°
1	$1/2$	60°
2	1	0°

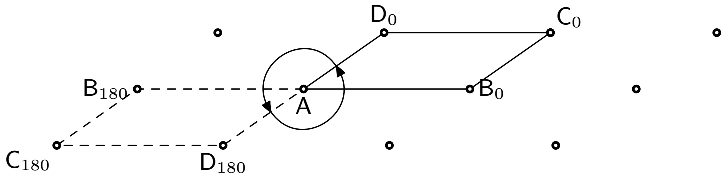
Jednotlivé hodnoty můžeme snadno ilustrovat stále na 2. Rotace o 180° (jedná se o tzv. dvoučetnou osu) posune 1. bod na 3. a 4. vrátí na 2., jejich vzdálenost ka je opravdu ve smyslu zavedení $-a$. Při rotaci o 120° (okolo osy trojčetné) se body setkají uprostřed horní úsečky. Rotace 90° (osa čtyřčetná) doplní čtverec a 60° (šestičetná osa) je přímo na 2.



Obr. 3. Rotace kolem šestičetné osy



Obr. 4. Rotace kolem čtyřčetné osy



Obr. 5. Rotace kolem dvoučetné osy

Všimněme si, že dvoučetná osa existuje vždy. Naopak na zbytek je potřeba specifikovat druhý vektor. Pro existenci čtyřčetné osy musí být oba vektory kolmé a mít stejnou velikost. Šestičetné osa vyžaduje taktéž vektory stejně dlouhé, musí ale svírat úhel 60°. Trojčetná osa je pak pouze speciálním případem osy šestičetné, stačí okolo ní otáčet dvakrát. Budeme-li mít pouze mříž bez tzv. hmotné báze, pak nenajdeme příklad, kdy by existovala osa trojčetná, ale neexistovala osa šestičetná. Nakonec jsme připravili obrázky předvádějící jednotlivé příklady. Osa dvoučetná na obrázku 5, označené jsou všechny body před rotací i po ní. Na obrázku 4 rotujeme čtvercovou mříží, pro přehlednost budeme sledovat pouze bod C, rotojume okolo bodu A. Poslední osa šestičetná je na obrázku 3.

Kryštof Touška
krystof@fykos.mff.cuni.cz