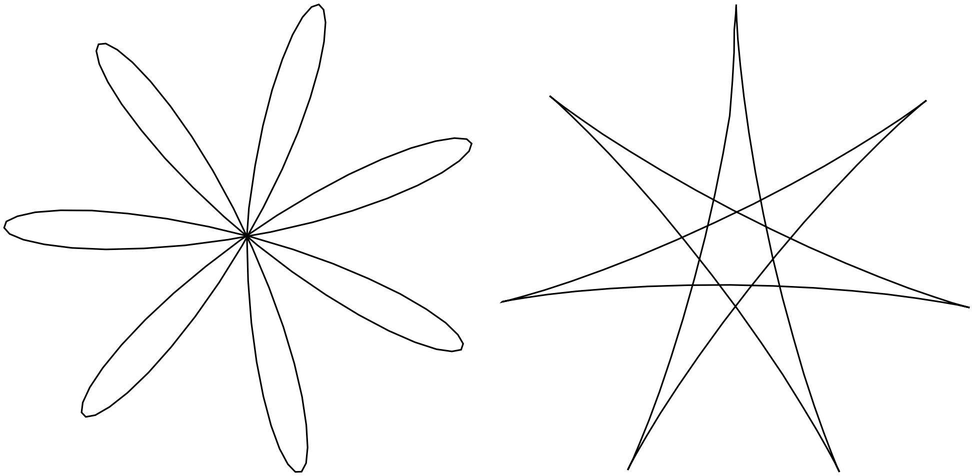
22. ročník, úloha IV . S ... *Foucaultovo kyvadlo a rotace Země* *(5 bodů; průměr 2,40; řešilo 10 studentů)*

a) Foucaultovo kyvadlo do písku nakreslilo při dvou různých demonstracích dva odlišné obrazce, oba jsou na obrázku. Rozhodněte, co způsobilo jiný tvar a také jak dlouhé by muselo být kyvadlo, aby tyto obrazce mohly na podlaze pařížské katedrály vzniknout. Kolikacípé jsou hvězdy/květy ve skutečnosti?



b) Jaký tvar bude mít hladina v kbelíku s vodou, který klidně stojí na rovném stole?

c) Ukažte, že vztah

$$\delta f = f_+ - f_- = \frac{4}{\lambda_0}\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{S}}{P}$$

pro frekvenční rozdíl (frekvenci rázů) dvou protiběžných paprsků v laserovém gyroskopu platí pro jeho libovolný rovinný tvar – tedy nejen kruhový.

Pro své milé řešitele zadali autoři seriálu.

Foucaltovo kyvadlo

Podle teorie ze čtvrtého dílu seriálu se kyvadlo na povrchu planety v bodě P nachází v rotující soustavě s úhlovou frekvencí $\Omega_\mathsf{P} = \Omega_0 \sin\varphi_\mathsf{P}$, kde Ω_0 je rychlost rotace Země a φ_P zeměpisná šířka uvažovaného místa P. To znamená, že označíme-li T_0 periodu rotace Země, lokální perioda rotace bude

$$T_\mathsf{P} = \frac{T_0}{\sin\varphi_\mathsf{P}}\,.$$

Když budeme prstem sledovat pohyb kyvadla znázorněný na obrázcích, všimneme si, že se sedmkrát zhouplo (tedy prodělalo $n/2 = 3{,}5$ kmitů) a zároveň se rovina jeho kývání otočila o 180° (případně celočíselný násobek tohoto úhlu – to ale nebudeme uvažovat). Jeden kmit tak trval

$$\tau = \frac{T_\mathsf{P}/2}{n/2} = \frac{T_0}{n\sin\varphi_\mathsf{P}}\,.$$

Perioda matematického kyvadla v homogenním tíhovém poli se zrychlením g je

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

takže délku kyvadla snadno vyjádříme jako

$$l = g\left(\frac{T_0}{2\pi n \sin\varphi_{\mathsf{P}}}\right)^2 \doteq 7\cdot 10^7\,\mathrm{m}\,.$$

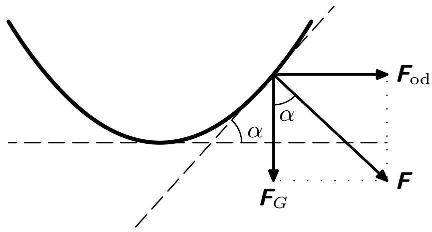
Za φ_{P} jsme dosadili zeměpisnou šířku Paříže, $\varphi_{\mathsf{P}} = 48^\circ\,52'$. Není třeba dvakrát zdůrazňovat, že ani kyvadlo ani homogenní gravitace takového rozsahu nejsou představitelné. Skutečný počet výběžků podobného obrazce při parametrech ze seriálu je o to větší

$$n = \frac{T_0}{2\pi\sin\varphi_{\mathsf{P}}}\sqrt{\frac{g}{l}} \doteq 7\cdot 10^3\,.$$

Příčina odlišného tvaru obrazců je prostá. Kyvadlo rozhoupáváme ve svislé rovině procházející rovnovážnou polohou. Na počátku má tedy kyvadlo jen radiální složku rychlosti; tečnou, mířící kolmo na tuto rovinu, již jsme počítali v seriálu, získává až během zhoupnutí. Nulovou kolmou rychlost má kyvadlo v případě prvního záznamu, je-li uprostřed; v případě druhého je-li v amplitudě. Proto jediná odlišnost mezi znázorněnými situacemi je, že v prvním případě jsme kyvadlo vyrazili z rovnovážné polohy, zatímco v druhém případě jsme jej uvolnili z výchylky.

Kyblíček

Jelikož se klidně stojící kyblík vlastně točí, hladina se o něco prohne. Uvažujme, že má hladina ustálený tvar, a zkoumejme rovnováhu v takovém stavu. Je jasné, že vektorový součet tíhové síly a odstředivé síly působící na malý objem vody u hladiny musí být na hladinu kolmý, neboť jinak by se tento malý objem začal po hladině přesouvat na nějaké jiné místo, dokud by nenašel polohu, pro kterou by tvrzení o rovnováze platilo. Podle obrázku bude mít výslednice správný směr, pokud bude svírat se svislicí stejný úhel $\alpha(x)$ jako horizontála s tečnou k povrchu (hladinou) v bodě vzdáleném o x od středu. To nastane, bude-li



Obr. 1. Síly tvarující hladinu

$$\mathrm{tg}\,\alpha(x) = \frac{F_{\mathrm{od}}}{F_g} = \frac{\omega^2 x}{g}\,.$$

Popíšeme-li rovinný osový řez hladiny křivkou $y(x)$, je také podle definice derivace $y'(x) = \mathrm{tg}\,\alpha(x)$, takže dostáváme

$$y'(x) = \frac{\omega^2 x}{g} \quad\Rightarrow\quad y(x) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 x^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_0^2 x^2}{g}\sin^2\varphi\,.$$

Má-li kbelík poloměr r, bude uprostřed hladina o h nižší než na krajích, kde

$$h = \frac{1}{2}\frac{\Omega_0^2 r^2}{g}\sin^2\varphi\,.$$

Sami si už můžete dosazením reálných hodnot ověřit, že fakt, že jste při mytí podlahy žádné promáčknutí nepozorovali, rozhodně není chyba vašeho zraku. Rozměr h vyjde řádově menší než průměr atomu.

Gyroskop

V seriálu jsme rozebírali kruhový laserový gyroskop, v němž vznikají a zanikají fotony o frekvenci f_0, které se však díky rotaci celého zařízení dopplerovsky posouvají vůči vnějšímu pozorovateli na frekvence

$$f_{\pm} = f_0 \left(1 \pm \frac{\omega r}{c}\right) ,$$

kde $\omega = \Omega_0 \sin\varphi$ je úhlová frekvence rotace soustavy, r poloměr prstence laseru a c rychlost světla. Tento vztah lze přepsat použitím tečné rychlosti $v_\mathrm{t} = \omega r$ do obecnějšího tvaru

$$f_{\pm} = f_0 \left(1 \pm \frac{v_\mathrm{t}}{c}\right) .$$

Pokud se nejedná o kruhový laser, není rychlost $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ obecně rovnoběžná s elementem laserového gyroskopu v místě $\boldsymbol{r}$ a pro dopplerovský posun se uplatní jen její průmět do směru trubice (daného jednotkovým vektorem $\boldsymbol{t}$)

$$v_\mathrm{t} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}\, r \sin\vartheta ,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor kolmý na plochu tvořenou rovinnou trubicí (kolmý proto, že $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{t}$ v této rovině leží) a ϑ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{t}$. Tečné rychlosti mohou být podél křivé trubice různé a také frekvenční posuny způsobené rotací budou různé, ale protože částic plynu i fotonů je spousta, lze jejich chování popsat statisticky. V průměru bude mít největší vliv střední hodnota vyzařovaných frekvencí. Budeme proto pracovat i se střední hodnotou $\langle v_\mathrm{t} \rangle$ podél obvodu,

$$\langle v_\mathrm{t} \rangle = \frac{1}{P} \int_P v_\mathrm{t}\, \mathrm{d}l = \frac{1}{P} \int_P \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}\, r \sin\vartheta\, \mathrm{d}l .$$

Symbolem P značíme celou délku obvodu, $\mathrm{d}l$ je délka jeho malého lineárního úseku. Předchozí vztah můžeme upravit na

$$\langle v_\mathrm{t} \rangle = \frac{2}{P}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} \int_P \frac{r \sin\vartheta}{2}\, \mathrm{d}l .$$

Výraz $(r/2) \sin\vartheta\, \mathrm{d}l$ je ale obsah trojúhelníku napnutého mezi počátkem souřadnic a dvěma body na okrajích úseku $\mathrm{d}l$, tedy uvedený integrál není nic jiného než plocha obepnutá celým gyroskopem. Máme proto, při značení $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} S$,

$$\langle v_\mathrm{t} \rangle = \frac{2}{P}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{S} .$$

Rozdíl frekvencí pak vyjde

$$\delta f = f_+ - f_- = 2\, \frac{f_0}{c}\, \langle v_\mathrm{t} \rangle = \frac{2}{\lambda_0}\, \langle v_\mathrm{t} \rangle = \frac{4}{\lambda_0}\, \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{S}}{P} .$$

Jakub Benda
`jakub@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.