**22. ročník, úloha IV . 4 ... *šachovnice*** *(4 body; průměr 3,17; řešilo 23 studentů)*

*Jistě znáte pohádku o chytrákovi, který si udělal legraci z krále tím, že mu dal za úkol na políčka šachovnice vyskládat postupně 1, 2, 4, 8, 16, . . . , $2^{63}$ zrníček rýže po řádcích zleva doprava. Většinou se ale nedodává, že se chytrák velmi podivil, když král šachovnicový stolek nechal přinést. Vypočtěte, kde byl vypodložen, aby zrníčka nespadla. Zrníčka jsou hmotné body umístěné ve středu polí. (Přesněji řečeno nás zajímá poloha těžiště šachovnice s rýží.)*

*Několik vagónů rýže si objednal Jakub Michálek.*

Vyjdeme ze vzorce pro těžiště

$$x_{\mathsf{T}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\,, \qquad y_{\mathsf{T}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\,.$$

Vypočítejme těžiště první řady, pro niž platí $m_i = 2^i$, kde indexy bereme od nuly do sedmičky. Než se však vrhneme na sumy, nahlédneme, že všechny řádky budou mít $x$-ovou složku těžiště stejnou, stejně tak všechny sloupce mají stejnou souřadnici $y$-ovou – vždyť hmotnosti násobíme jenom nějakou mocninou konstanty $2^8$, čímž zlomek rozšiřujeme a jeho hodnota se nemění. Celá deska musí mít proto těžiště v bodě o souřadnicích $(x_{\mathsf{T}}, y_{\mathsf{T}})$.

Stojíme před problémem, jak vypočítat součty typu $\sum_{i=0}^{n} k^i$ a $\sum_{i=0}^{n} ik^i$. První známe, říká se mu geometrická řada. Na vzorec se přijde jednoduchou úvahou: označme $S_n = 1 + k + \ldots + k^n$. Potom od obou stran odečteme jedničku a vydělíme $k$, čímž dostaneme $(S_n - 1)/k = 1 + k + \ldots + k^{n-1}$. Pokud k oběma stranám přičteme $k^n$, získáme na pravé straně rovnice opět $S_n$ a odsud vyjádříme

$$S_n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}\,.$$

Obdobně postupujeme pro druhou sumu. Označíme $P_n = k^1 + 2k^2 + \ldots + nk^n$. Potom $P_n/k = 1 + 2k + \ldots + nk^{n-1}$ a z předchozího odstavce máme $-S_{n-1} = -1 - k - \ldots - k^{n-1}$. Sečtením posledních dvou rovnic dostáváme

$$\frac{P_n}{k} - S_{n-1} = k + 2k^2 + \ldots + (n-1)k^{n-1}\,.$$

To nás těší, protože na pravé straně nevyšlo nic jiného než $P_n - nk^n$. Teď už jen z rovnice

$$\frac{P_n}{k} - S_{n-1} = P_n - nk^n$$

vyjádříme

$$P_n = \frac{k}{(k-1)^2}\left(k^n\left(nk - n - 1\right) + 1\right)\,.$$

Pokud umíte derivovat, můžete si tento vztah odvodit derivováním částečného součtu geometrické řady. My už jen dosadíme pro řádek $k = 2$ a pro sloupec $k = 2^8$ a $n = 7$. Souřadnice těžiště vycházejí přibližně $(6{,}031; 6{,}996)$, což se shoduje s domněnkou, že těžiště bude docela blízko předposledního políčka se souřadnicemi $(6, 7)$.

***Jakub Michálek***
`jmi@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.