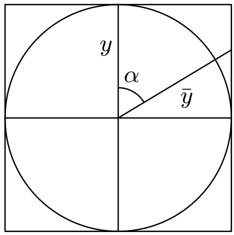
**22. ročník, úloha IV . 1 ... *Kyklopovo zrcadlo*** *(4 body; průměr 1,50; řešilo 12 studentů)*

*Zkuste vypočítat, jaký tvar by mělo mít zrcadlo, aby se v něm Kyklopova hlava jevila jako čtverec. Kyklop má hlavu ve tvaru koule s okem uprostřed.*

*Při pohledu do zrcadla uviděl Mára.*

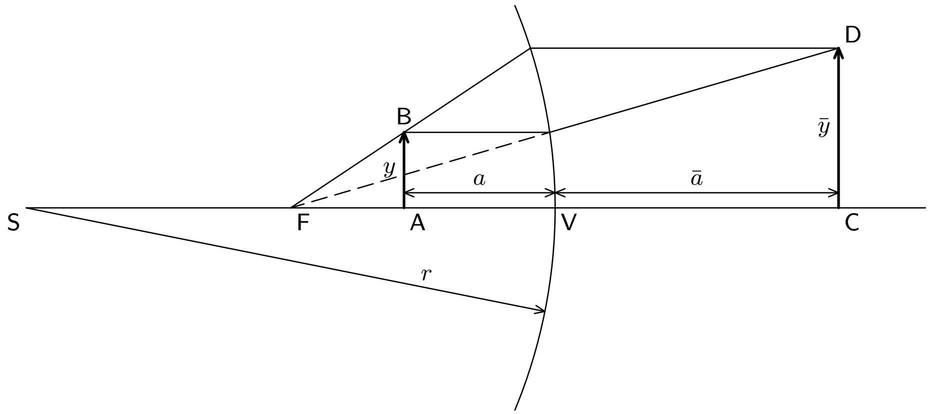
Stěžejní myšlenkou pro vyřešení této úlohy je fakt, že chceme kouli, respektive její rovinný průmět, tedy kruh, zobrazit na čtverec. Předpokládejme čtverec o straně $y/2$, což je zároveň i poloměr kruhu, tedy Kyklopovy hlavy. Z obrázku 1 je patrné, že chceme-li zobrazit libovolný bod kruhu na čtverec, musíme vzdálenost $y$ o něco zvětšit. Z téhož obrázku jasně plyne, že vztah mezi těmito rozměry $y$ a $\bar{y}$ lze vyjádřit přes kosinus úhlu, který svírají. Platí

$$\bar{y} = \frac{y}{\cos\alpha}\,.$$




Obr. 1. Rozdělení zrcadla

Z obrázku je také patrné, že zrcadlo je souměrné, nadále se tedy můžeme zabývat pouze jednou čtvrtinou zrcadla, ostatní tři čtvrtiny se naštěstí budou chovat stejně, přičemž nejvzdálenější bod, který chceme zobrazovat bude ležet ve vzdálenosti polovina uhlopříčky od středu, tedy $\sqrt{2}R/2$.




Obr. 2. Zobrazení optickou soustavou

Předpokládáme-li duté zrcadlo, po kterém budeme chtít takový obraz vytvořit, můžeme se řídit podobností trojúhelníků a potažmo také zobrazovací rovnicí, která pro zrcadlo musí platit. Z obrázku 2 je patrné, že trojúhelníky FAB a VCD jsou podobné, a pokud $r$ je zakřivení zrcadla, pak platí

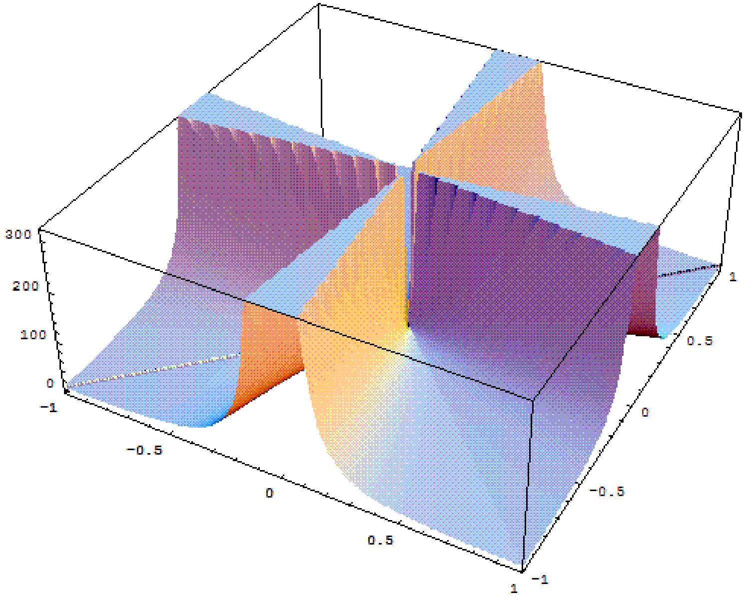
$$\frac{y}{\frac{r}{2}-a} = \frac{\bar{y}}{\frac{r}{2}} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{2a}{1-\cos\alpha}\,. \tag{1}$$

Výše uvedený výsledek určuje tvar zrcadla. Předpokládali jsme, že zrcadlo je kulové a duté, takže bychom mohli zkusit vypočítat souřadnice každého bodu zrcadla. K předpokladu o kulové slupce navíc dodáme ten, že vůči počátku souřadného systému zrcadlo posuneme o $r$ v $z$-ové souřadnici. Kulová plocha je pak popsána rovnicí

$$r^2 = (r-z)^2 + x^2 + y^2\,.$$

Jedná se o kvadratickou rovnici pro proměnnou $z$, jejímž řešením po dosazení předchozího výsledku (1) je výraz

$$z = \frac{2a}{1 - \cos\alpha} - \sqrt{\frac{4a^2}{(1-\cos\alpha)^2} - x^2 - y^2}\,. \tag{2}$$




Obr. 3. Tvar Kyklopova zrcadla

Hodilo by se si ještě vyjádřit $\cos\alpha$, neboť se pohybujeme v kartézském systému souřadnic a pro popis plochy chceme použít souřadnice $x$ a $y$. Platí

$$\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

a dosazením do rovnice (2) obdržíme výsledný vztah

$$z = \frac{2a}{1 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} - \sqrt{\frac{4a^2}{\left(1 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} - x^2 - y^2}\,.$$

To je však pouze čtvrtina plochy zrcadla; zbytek získáme ze symetrií. Tvar zrcadla není úplně jednoduše popsatelný, a proto jej pro představu uvádíme jako obrázek 3.

***Jana Poledniková***
janap@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.