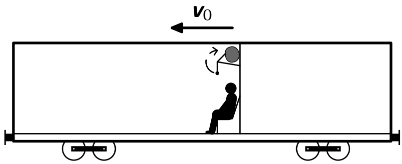
22. ročník, úloha III . 2 ... *trainstopping* *(4 body; průměr 2,16; řešilo 25 studentů)*

Honza jede domů vlakem rychlostí v_0. Z poličky na zavazadla mu z batohu visí olovnice. Najednou vlak začne brzdit (zrychlením a po dobu t), protože na železniční přejezd před ním vjel neopatrný řidič. A Honzu napadne – mohla se olovnice s napnutým provázkem otočit o 180°? Uvažte, že je olovnice pevně zavěšena na poličce.

Z maďarské přípravy na FO od Dalimila vybral Aleš.



Obr. 1. Honza ve vagónu

Přejděme do soustavy pevně spojené s vlakem. Když vlak začne brzdit, v soustavě vlaku pozorujeme jednak tíhovou sílu $\boldsymbol{F}_G$ a jednak také zdánlivou setrvačnou sílu $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$. V soustavě vlaku můžeme zavést „lokální“ tíhové zrychlení $\tilde{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{a}$, dané jako vektorový součet gravitačního a setrvačného zrychlení. Zrychlení $\tilde{\boldsymbol{g}}$ klidně můžeme nazvat tíhovým, protože předmět v soustavě vlaku volně padá směrem daným $\tilde{\boldsymbol{g}}$.

Označme α úhel, který svírá $\tilde{\boldsymbol{g}}$ se svislým směrem. Olovnice pak ale představuje kyvadlo, pohybující se v poli síly $m\tilde{\boldsymbol{g}}$, přičemž rovnovážná poloha kyvadla je při výchylce $\varphi = \alpha$. Pozorujeme vlastně úplně obyčejné kyvadlo, akorát jsme si pootočili tíhovou sílu a změnili její velikost. Úhel α splňuje

$$\cos\alpha = \frac{g}{\tilde{g}} = \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} \,. \tag{1}$$

Uvažujme, že vlak neustále brzdí. Olovnice bude kmitat kolem rovnovážné polohy $\varphi = \alpha$, přičemž startuje z klidu z počáteční polohy $\varphi = 0°$. Snadno nahlédneme, že její maximální výchylka je $\varphi_{\max} = 2\alpha$. V tom případě se ale olovnice nemůže s napnutým provázkem otočit o 180°, protože rovnovážná poloha $\alpha = 90°$ by nastala jen pro nekonečně velké zrychlení.

Co se ale bude dít, když vlak najednou přestane brzdit? Zmizí setrvačná síla, tedy vodorovná složka působící síly. Uvažme, že $2\alpha < 90°$. Potom „vypnutím“ vodorovné složky síly v libovolné poloze můžeme maximální výchylku jen zmenšit, protože vodorovná složka síly pro úhly $\varphi < 90°$ působí vždy ve prospěch zvětšení výchylky. Nemůžeme proto doufat, že při zpomalení $a < g$ dosáhneme kýžené obrátky o 180°. V polohách $\varphi > 90°$ již ale setrvačná síla působí ve prospěch zmenšení výchylky. Když by tedy pro polohy $\varphi > 90°$ byla setrvačná síla vypnutá, mohli bychom dosáhnout větší maximální výchylky než 2α. Zkoumejme, zda vypnutím setrvačné síly ve vhodnou chvíli můžeme dosáhnout přetočení olovnice s napnutým provázkem.

Z výše uvedeného plyne, že nejvýhodnější pro maximalizaci výchylky je vypnout setrvačnou sílu v poloze $\varphi = 90°$. Uvažujme ale, že ji vypneme v nějaké obecné poloze $\varphi = \beta$.

Formulujme podmínku pro úplné přetočení olovnice s napnutým provázkem. Délku závěsu označme l. V poloze $\varphi = 180°$ je nutné, aby odstředivá síla byla v rovnováze s gravitační. Odtud

$$\frac{mv^2}{l} = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = E_{\mathrm{fin}} = \frac{1}{2}mgl \,, \tag{2}$$

kde v, E_{fin} značí rychlost a kinetickou energii v poloze $\varphi = 180°$.

Po celou dobu pohybu, ať vlak brzdí, nebo ne, pohybuje se olovnice v poli gravitační síly, která míří kolmo. Potenciální energie příslušející síle $\boldsymbol{F}_G$ je dána svislou vzdáleností od počáteční polohy, $V_G(\varphi) = mgl(1 - \cos\varphi)$. Když ale vlak brzdí, pohybuje se olovnice rovněž v poli síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$, která míří vodorovně a je konstantní v prostoru i čase. Setrvačné síle ale také potom bude příslušet nějaká potenciální energie V_{s}. V analogii s gravitačním potenciálem bude její hodnota dána vodorovnou vzdáleností od počáteční polohy, tedy $V_\mathrm{s}(\varphi) = -mal\sin\varphi$. Rozmyslete si, proč tam je minus.

E_fin vypočteme jako práci na olovnici vykonanou silami $\boldsymbol{F}_G$, $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$. Práce vykonané po řadě gravitační a setrvačnou silou jsou rovny

$$W_G = V_G(0^\circ) - V_G(180^\circ) = -V_G(180^\circ) = -2mgl\,,$$
$$W_\mathrm{s} = V_\mathrm{s}(0^\circ) - V_\mathrm{s}(\beta) = -V_\mathrm{s}(\beta) = mal\sin\beta\,,$$

uvědomíme–li si, že setrvačná síla koná práci jen mezi polohami $\varphi = 0^\circ$ a $\varphi = \beta$. Dohromady dostáváme

$$E_\mathrm{fin} = W_\mathrm{s} + W_G = mal\sin\beta - 2mgl\,, \tag{3}$$

dosazením za E_fin z (2) máme

$$\tfrac{5}{2}g = a\sin\beta\,. \tag{4}$$

Nejmenší a takové, že rovnice (4) má řešení, je $a = 5g/2$, čemuž odpovídá úhel $\beta = 90^\circ$. To souhlasí s naší výše uvedenou předpovědí, že nejvýhodnější je „vypnout“ setrvačnou sílu pro $\varphi = 90$.

Takže $a = 5g/2$ je minimální zrychlení, při kterém lze v ideálním případě dosáhnout obrátky o 180°. Tomuto zrychlení odpovídá $\alpha = 68{,}2^\circ$. Vlak však musí přestat brzdit přesně ve chvíli, kdy je $\varphi = 90^\circ$. Přesný čas T, za který v tomto případě dosáhne olovnice výchylky $\varphi = 90^\circ$, již nelze vypočítat pomocí přiblížení malých kmitů, protože naše výchylky jsou velké.

Moment síly působící na olovnici je určen vztahem $M = m\tilde{g}l\sin(\varphi - \alpha)$, přičemž M lze zdola omezit výrazem $M_- = m\tilde{g}l\varphi\sin\alpha/\alpha$ a shora omezíme výrazem $M_+ = m\tilde{g}l\varphi$. Kyvadla, na něž působí M_- a M_+ jsou již harmonické oscilátory, jejichž úhlové frekvence jsou po řadě

$$\omega_- = \sqrt{\frac{l\sin\alpha}{\tilde{g}\alpha}} \qquad \text{a} \qquad \omega_+ = \sqrt{\frac{l}{\tilde{g}}}\,.$$

Olovnice kmitá rychleji než ω_- a pomaleji než ω_+. Například pro $l = 20\,\mathrm{cm}$ číselně získáváme $T = (0{,}17 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}$, přičemž T roste s odmocninou l. Pro $a = 5g/2$ za čas T vlak zpomalí zhruba o $15\,\mathrm{km/h}$. Zrychlení $a = 25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je hodně velké (odpovídá zpomalení z devadesátky na nulu za jednu sekundu a vyžaduje koeficient klidového tření $f = 5/2$) a můžeme vytušit, že pokud se olovnice přetočila, vlak pravděpodobně na přejezdu narazil do auta a Honza se navíc asi pěkně potloukl…

Pro zrychlení ještě větší než $a = 5g/2$, dostaneme dva úhly β_1, β_2 řešící rovnici (4). Tyto úhly jsou rozloženy symetricky okolo úhlu 90°. Bude-li výchylka olovnice v intervalu (β_1, β_2) a olovnice bude ve stoupavém pohybu, pak se při náhlém brzdění vlaku přetočí s napnutým provázkem. Dojde-li k ukončení brzdění při sestupném pohybu olovnice, přetočení samozřejmě nelze dosáhnout.

Práce W_s je vždy menší než $mv_0^2/2$. Podle (3) je potom pro přetočení s nataženým provázkem bezpodmínečně nutné, aby $v_0 > \sqrt{5gl}$. Stejně tak je zřejmě nutné, aby $v_0 > aT$. Čím delší je provázek, tím je třeba větší počáteční rychlosti v_0.

Poznámky k došlým řešením

Dvěma body jsem zpravidla oceňoval důležitou myšlenku, že olovnice při brzdění kmitá jako kyvadlo kolem nové rovnovážné polohy. Rovněž jsem bodem oceňoval zjištění, jakou minimální rychlost musí mít olovnice ve vrchní poloze, aby zůstal provázek napnutý. Řešitelé, kteří si uvědomili, že klíčovou roli sehraje ukončení brzdění, dostali další body. Zcela správně měl řešení pouze *Ján Bogár*, za což si vysloužil bod navíc oproti *Studentu Pilnému*, který tentokráte udělal hloupou numerickou chybu.

Marek Scholz
mara@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.